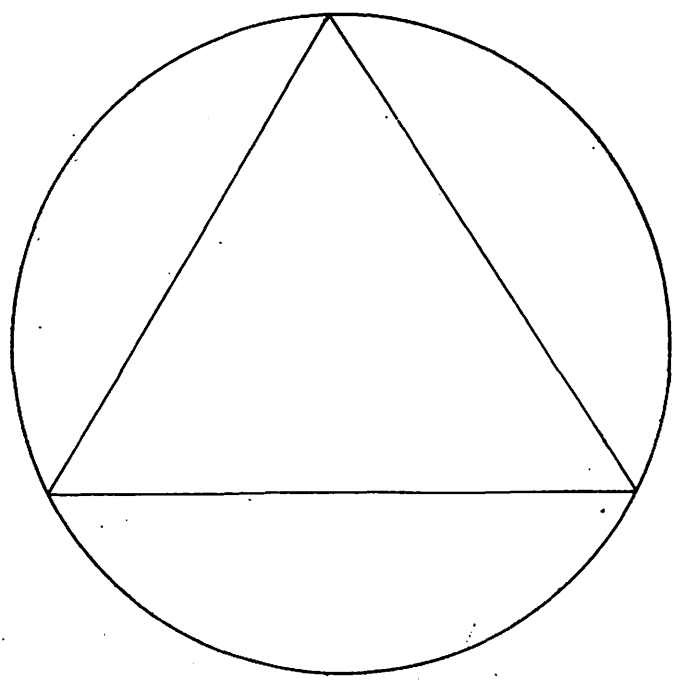
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

ION D. TEODORESCU ȘTEFAN D. TEODORESCU

CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE SUPERIOARĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI — 1975

Această *culegere de probleme* e structurată pe lucrarea unuia dintre autori: „GEOMETRIE SUPERIOARĂ" [40]; de fapt, e o continuare a acesteia.

Exercițiile și problemele au fost grupate pe capitolele și paragrafele acestei cărți, căutîndu-se să se asigure problematica ei cu material aplicativ și complementar.

Se știe că, dîndu-se o definiție, se demonstrează proprietăți ale noțiunii definite, unele din ele fiind caracteristice (esențiale); luînd o proprietate caracteristică drept definiție, se demonstrează afirmația din definiția inițială ca proprietate. De aceea, în diferite lucrări de specialitate se ia una sau alta din proprietățile caracteristice drept definiție. În prezenta culegere se pornește de la noțiunile și rezultatele lucrării [40], încît uneori se cere să se demonstreze asertiuni care sînt luate ca definiții în unele lucrări de specialitate.

Rezolvarea grafică (întocmirea și executarea figurilor) a fost realizată de *arh.* S t. D. T e o d o r e s c u, *conf. univ. la* I n s t i t u t u l d e c o n s t r u c ț i i d i n B u c u r e ș t i, fiind aportul acestui autor la această lucrare. Pentru reprezentarea curbelor plane s-a folosit sistemul cartezian ortogonal sau sistemul polar. Curbele și suprafețele în spațiul tridimensional R^3 au fost reprezentate în epura de perspectivă paralelă, utilizîndu-se axonometria ortogonală trimetrică.

Referent științific: Prof. univ. Nicolae Mihăileanu
Redactor: Despina Dumitru
Tehnoredactor: Velcovici Constanța
Grafician: Wegeman Victor

CURBE PLANE

1. REPREZENTĂRI ANALITICE ALE UNEI CURBE PLANE

1 Să se stabilească natura drumului d : a) $x = \frac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t^3}{1+t^2}$, $t \in R$; b) $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $t \in R$, cu $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } t \text{ e irațional} \\ 1 \text{ dacă } t \text{ e rațional} \end{cases}$; c) $x = 5t - t^5$, $y = 2t^2 - t^4$; d) $x = \frac{1}{2} f(3^0 t) + \frac{1}{2^2} f(3^2 t) + \frac{1}{2^3} f(3^4 t) + \ldots$, $y = \frac{1}{2} f(3^1 t) + \frac{1}{2^2} f(3^3 t) + \frac{1}{2^3} f(3^5 t) + \ldots$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, cu $f(t)$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2, reprezentată în intervalul $I = [-1, 1]$ prin graficul din fig. 1; e) $x = \frac{3t - t^3}{4} - \frac{3t}{1+t^2}$, $y = \frac{3t^2-1}{4} + \frac{3}{1+t^2}$; f) $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$; g) $x = 3a \cos 2\theta$, $y = 2a \cos 3\theta$, $\theta \in [\pi/6, 5\pi/6]$; h) $x = a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$, $y = b \sin 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$; i) $x = 3\cos\theta - \cos 3\theta$, $y = 2 \sin\theta - \sin 2\theta$; j) $y = \exp(x^2)$; k) $\rho = a \sin\theta \sin 2\theta$;

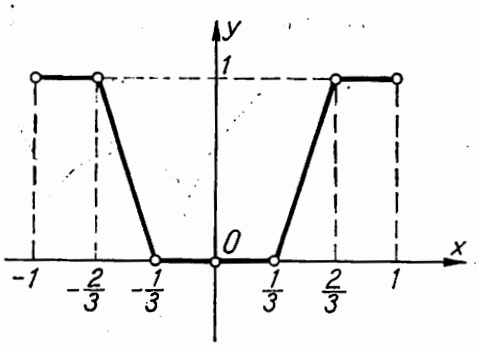


Fig. 1

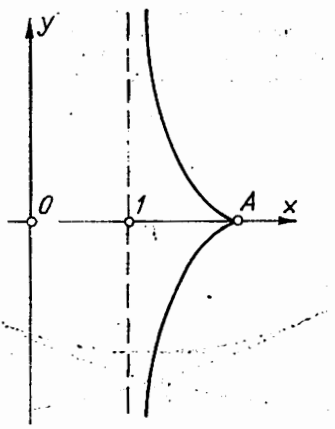


Fig. 2

l) $\rho = a \cos^3 \frac{\theta}{4}$, în sensul dacă d e (sau nu) închis, simplu, cu tangentă continuă sau neted ($a > 0$ și $b > 0$).

R. Fie drumul d definit prin ecuația $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$. d e *simplu* dacă n-are puncte multiple; *punctul* $P(t') \in d$ e *multiplu*, dacă există $t'' \in (a, b) \subset I$ cu $t'' \neq t'$ și $d(t'') = d(t')$. d e *închis* dacă $I = [a, b]$ și $d(a) = d(b)$ etc. (v. [40], p. 7).

a) d e *drum simplu* (din $x(t') = x(t'')$ rezultă $t'' = -t'$, iar din $y(t') = y(t'')$ găsim $t' = 0$), *cu tangentă continuă* ($x(t), y(t) \in C^\infty(R)$) și *nu e neted* (căci $x'(o) = y'(o) = o$, punctul $d(o) = A(2, 0)$ fiind *singular*), (fig. 2). b) Punctele (x, y) se găsesc pe dreptele $y = 0$ și $y = 1$, fără ca ele să poată fi legate prin vreo trăsătură continuă; căci, fiind date două numere raționale (irraționale), între ele există o infinitate de numere irraționale (raționale). d e un *drum discontinuu*, de clasă $C^\circ(R)$.

c) Domeniul de definiție: R. d e *drum închis*; *nu e simplu*, căci $d(-\sqrt[4]{5}) = d(\sqrt[4]{5}) = A(0{,}2\sqrt{5} - 5)$; e *cu tangentă continuă*, căci $d \in C^4(R)$; *nu e drum neted*, căci $d'(-1) = d'(1) = 0$; punctele $d(1) = B(4, 1)$ și $d(-1) = B'(-4, 1)$ fiind singulare (fig. 3). *Obs.* Restringînd domeniul de definiție I la compactul $[-1, 1]$, drumul d_1 e compact, cu extremitățile B' și B, fiind simplu și neted. d) Din definiție: $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$; deci seriile din membrul al doilea sînt, amîndouă, majorate de seria convergentă $\sum \frac{1}{2^n}$, fiind uniform convergente în orice interval finit. Termenii acestor serii fiind funcții continue de t, atunci $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții continue; termenii ambelor serii fiind pozitivi iar suma seriei majorante egală cu 1, rezultă $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant y(t) \leqslant 1$. Fie (x_0, y_0) un punct al pătratului $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Scriind

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_{2n-2}}{2^n} + \ldots, \quad y_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{2^n} + \ldots$$

în reprezentarea binară (unde numerele a_i nu pot lua decît una din valorile 0 și 1), să arătăm că există o valoare $t_0 \in (0, 1)$, astfel încît să avem $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$; această valoare este

$$t_0 = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \ldots + \frac{2a_{k-1}}{3^k} + \frac{2a_k}{3^{k+1}} + \ldots$$

În adevăr, să ne limităm la calculul valorilor lui $f(3^k t_0)$ pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$. Avem $3^k t_0 =$ număr par $+ \frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots$. Să presupunem $a_k = 0$; atunci $\frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots \leqslant \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3}$. Ținînd seama de periodicitatea lui $f(t)$, avem $f(3^k t_0) = 0$. Să presupunem că $a_k = 1$; atunci $\frac{2}{3} \leqslant \frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots \leqslant \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots = 1$, deci $f(3^k t_0) = 1$. În ambele cazuri: $f(3^k t_0) = a_k$. Așadar, avem $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Deci: *drumul d umple un pătrat* (în sensul că trece prin toate punctele pătratului). *Obs.* Un prim exemplu de astfel de drum e datorit lui *G. Peano* (v. [28], II, p. 156). e) Domeniul de definiție: R. d e drum simplu, cu tangentă continuă, dar nu e neted; $d(1) = A(-1, 2)$ și $d(-1) = A'(1, 2)$ sînt puncte singulare, $Oy \cap d = d(0) = B\left(0, \frac{11}{4}\right)$ (fig. 4). f) Se ia $x = t (t \in R)$. d e drum simplu; nu e cu tangentă continuă,

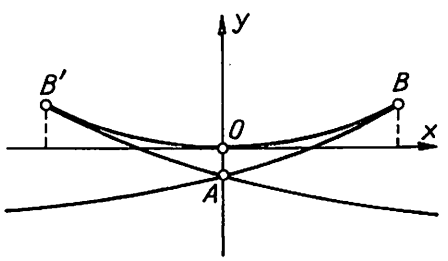


Fig. 3

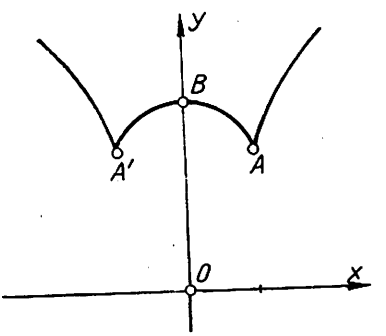


Fig. 4

căci $\lim_{t \to -0} y' = 1$ și $\lim_{t \to +0} y' = 0$; $d(0) = O$ e punct singular (fig. 5). g) d e drum închis, căci $d\left(\frac{\pi}{6}\right) = d\left(\frac{5\pi}{6}\right) = A\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$, și simplu; nu e cu tangentă continuă, căci $d'\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq d'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. A fiind un punct singular. Imaginea lui d e bucla $ABCB'A$ din mulțimea definită de ecuația implicită $27ay^2 - 2(2x - 3a)^2(x + 3a) = 0$ (fig. 6). *Obs.* Dacă se ia $I_1 = [0, \pi]$,

obținem un drum compact d_1, cu extremitățile $d_1(0) = D(3a, 2a)$ și $d_1(\pi) = D'(3a, -2a)$, care nu e drum simplu, A fiind un punct multiplu; d_1 e drum neted. Pentru $I_2 = [0, 2\pi]$, d_2 e drum închis, căci $d_2(0) = d_2(2\pi) = D$; d_2 nu e drum simplu, toate punctele fiind multiple. h) d e drum închis: $d(0) = d(2\pi) = A(a/2, 0)$; nu e drum simplu; $d(\pi/6) = d(7\pi/6) = B(0, b\sqrt{3}/2)$ e punct multiplu; e drum neted (fig. 7). *Obs.* Cu $I_1 = [0, \pi]$,

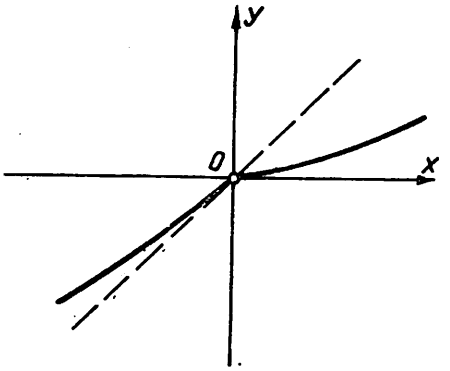


Fig. 5

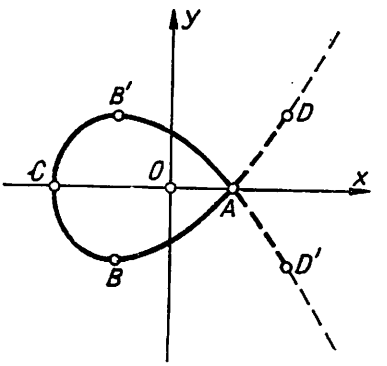


Fig. 6

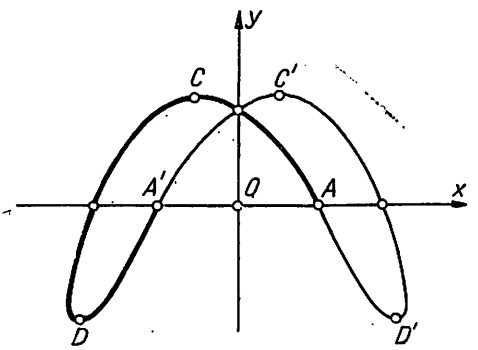


Fig. 7

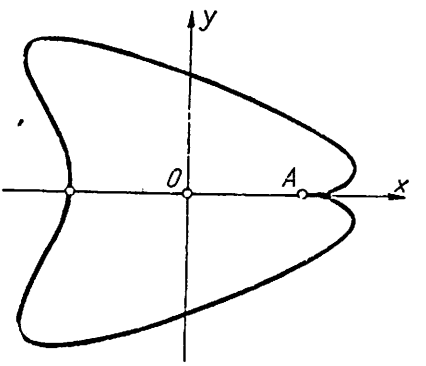


Fig. 8

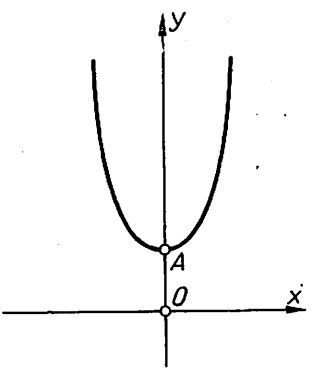


Fig. 9

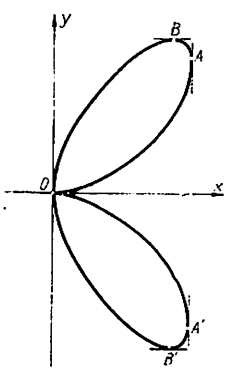


Fig. 10

d_1 e drum compact, simplu și neted (având imaginea $ABCDA'$). i) $I = [0, 2\pi]$. d e drum închis, simplu și cu tangentă continuă; nu e neted, căci $d'(0) = 0$, punctul $d(0) = A(2, 0)$ fiind singular (fig. 8). j) d e drum simplu și neted (fig. 9). k) $\rho \geqslant 0$ dacă $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. d e drum închis, căci $d(-\pi/2) = d(\pi/2) = 0$; nu e drum simplu, căci $d(-\pi/2) = d(0)$ e punct multiplu; e drum cu tangentă continuă și nu e drum neted, căci $d'(0) = 0$, O fiind și un punct singular (fig. 10). l) $\rho \geqslant 0$

dacă $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$. d e drum închis, căci $d(2\pi) = d(-2\pi) = O$; nu e drum simplu, căci $d(-\pi) = d(\pi) = A(-1/2\sqrt{2}, 0)$ e punct multiplu; e drum cu tangentă continuă și nu e drum neted, căci $d'(2\pi) = 0$, O fiind punct singular (fig. 11).

2 Să se demonstreze că un drum echivalent cu un drum simplu (sau închis) e de asemenea simplu (respectiv, închis). *Apl.* Să se arate că drumurile: a) $d_1: x = t^2, y = t^3, t \in R$ și $d_2: x = \frac{4\tau^2}{(1-\tau^2)^2}$, $y = \frac{8\tau^2}{(1-\tau^2)^3}$, $\tau \in (-1,1)$ aparțin aceleași curbe deschise și simple; b) $d_1: x = 2a\cos^2 t$, $y = a\sin 2t$, $t \in [0, \pi]$ cu $a > 0$ și $d_2: x = f(\tau)$, $y = g(\tau)$, $\tau \in [0, 4a]$ cu $f(\tau) = |2a - \tau|$ dacă $\tau \in [0, 4a]$ și $g(\tau) = \begin{cases} \sqrt{2a(2a-\tau) - (2a-\tau)^2} & \text{dacă } \tau \in [0, 2a] \\ -\sqrt{2a(\tau-2a) - (\tau-2a)^2} & \text{dacă } \tau \in [2a, 4a] \end{cases}$ aparțin aceleași curbe închise și simple.

R. Fie $d_1: x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$ și $d_2: x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ iar $d_1 \sim d^2$ prin homeomorfismul $h: [\alpha, \beta] \to [a, b]$, deci $t = h(\tau)$, ce implică

(1) $a = h(\alpha)$, $b = h(\beta)$, $d_2(\tau) = d_1[h(\tau)]$ pentru orice $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Fie d_1 un *drum simplu*. Dacă d_2 n-ar fi simplu, ar exista τ' și τ'' cu

(1') $\alpha \leqslant \tau' \leqslant \tau'' \leqslant \beta$, $d_2(\tau') = d_2(\tau'')$ și (cel puțin) una din $\alpha < \tau'$, $\tau'' < \beta$;

fie, de exemplu, $\alpha < \tau'$. Atunci $\alpha < h(\tau') < h(\tau'') \leqslant b$, $d_1[h(\tau')] = d_1[h(\tau'')]$, adică d_1 n-ar fi simplu, contrazicînd ipoteza. Deci d_2 e drum simplu. Să considerăm că d_1 e un *drum închis*; deci $d_1(a) = d_1(b)$ sau, cu (1), $d_1[h(\alpha)] = d_1[h(\beta)]$, adică $d_2(\alpha) = d_2(\beta)$. Rezultă că d_2 e drum închis.

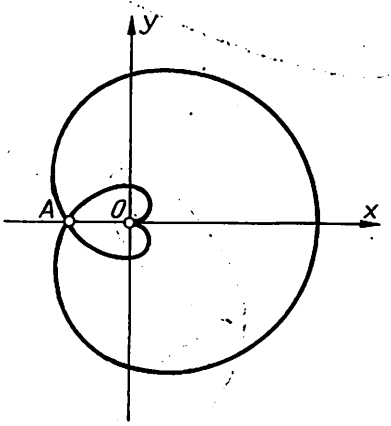


Fig. 11

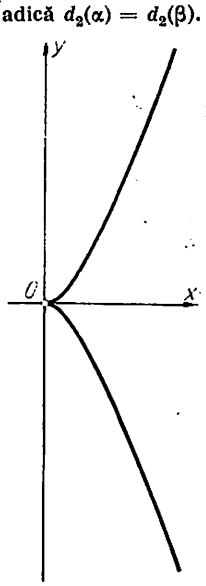


Fig. 12

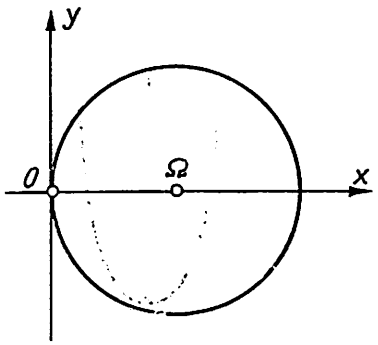


Fig. 13

Apl.

a) Condițiile (1) devin $h(-1) = -\infty$, $h(1) = +\infty$, $\frac{4\tau^2}{(1-\tau^2)^2} = h^2(\tau)$, $\frac{8\tau^3}{(1-\tau^2)^3} = h^3(\tau)$; deci $h(\tau) = \frac{2\tau}{1-\tau^2}$, care e continuă și strict crescătoare pentru orice $\tau \in (-1, 1)$. Rezultă $d_1 \sim d_2$. Însă d_1 e simplu (dacă n-ar fi, ($1'_2$) ar da $t'^3 = t''^3$, adică $t' = t''$, contrazicînd ($1'_1$)) și deschis. Curba are ecuația implicită $y^2 = x^3$ (fig. 12). b) Luînd $h: [0, \pi] \to [0, 4a]$ cu $h(0) = 0$, $h(\pi) = 4a$

și $|2a-h(t)| = 2a\cos^2 t$, $g[h(t)] = a\sin 2t$, avem $h(t) = \begin{cases} 2a(1-\cos^2 t), & t \in [0, \pi/2] \\ 2a(1+\cos^2 t), & t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$; căci $g[h(t)] = 2a|\sin t||\cos t| = a\sin 2t$ cu $t \in [0, \pi/2]$ și $g[h(t)] = -2a|\sin t||\cos t| = -a|\sin 2t| = a\sin 2t$ cu $t \in [\pi/2, \pi]$. $h(t)$ e continuă și strict crescătoare. d_1 e închis ($d_1(0) = d_3(\pi/2) = A(2a, 0)$) și simplu. Curba e un *cerc* cu centrul $\Omega(a, 0)$ și de rază a (fig. 13). *Obs.* Ori de cîte ori se introduce o noțiune sau o operație relativă la drumuri, ele nu pot deveni caracteristici ale curbelor corespunzătoare decît dacă se arată invarianța lor față de relația de echivalență a două drumuri.

3 Să se stabilească dacă aparțin unei aceleiași curbe următoarele drumuri: a) d_1: $x = \dfrac{\sin\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$, $y = \dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$, $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d_2: $x = \dfrac{2t(1-t^2)^2}{8t^3 + (1-t^2)^3}$, $y = \dfrac{4t^2(1-t^2)}{8t^3 + (1-t^2)^3}$, $t \in [0, 1]$ și d_3: $x = \dfrac{\tau(1-\tau)^2}{\tau^3 + (1-\tau)^3}$, $y = \dfrac{\tau^2(1-\tau)}{\tau^3 + (1-\tau)^3}$, $\tau \in [0, 1]$; b) d_1: $x = at$, $y = bt$, $t \in [0, 1]$ și d_2: $x = a\,f(\tau)$, $y = b\,f(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ cu $f(\tau): [0,1] \to [0,1]$; c) d_1: $x = t$, $y = b\sqrt{1 - t^2/a^2}$, $t \in [-a, a]$, d_2: $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ și d_3: $x = a\cos\tau$, $y = b|\sin\tau|$, $\tau \in [0, 2\pi]$ cu $a, b > 0$; d) d_1: $x = t$, $y = kt^2$, $t \in [0, 1]$ și d_2: $x = f(\tau)$, $y = k\,f^2(\tau)$, $\tau \in [a, b]$ cu $f(\tau): [a, b] \to [\alpha, \beta]$; e) d_1: $x = \sqrt{1 - t^2}$, $y = t^3 - t$, $t \in [-1, 0]$, d_2: $x = u$, $y = u^2\sqrt{1 - u^2}$, $u \in [0, 1]$ și d_3: $x = |v|$, $y = v^2\sqrt{1 - v^2}$, $v \in [-1, 1]$.

R. d și d' aparțin aceleiași curbe C numai dacă $d \sim d'$. a) $d_1 \sim d_2$; căci $h(\theta): [0, \pi/2] \to [0, 1]$ cu $h(\theta) = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ o funcție continuă și strict crescătoare. $d_1 \sim d_3$; căci $\omega(\theta): [0, \pi/2] \to [0, 1]$ cu $\omega = \sin\theta$, $1 - \omega = \text{const.}$, încît $\omega = (1 + \sin\theta - \cos\theta)/2$, care e o funcție continuă și strict crescătoare ($\omega' > 0$ pentru $\theta \in [0, \pi/2]$). C e închisă ($d_1(0) = d_1(\pi/2)$) și simplă; imaginea e bucla $OAB A'O$ din mulțimea de puncte definită de ecuația implicită $x^3 + y^3 = xy$ (fig. 14). b) d_1 și d_2 au aceeași imagine: segmentul OA cu $A(a, b)$ de pe *dreapta* $y = \dfrac{b}{a}x$. Fie $h(\tau): [0, 1] \to [0, 1]$; din (1) deducem $h(\tau) = f(\tau)$. Dacă $f(\tau)$ e funcție continuă și strict crescătoare (de exemplu: $f = \tau^2$, $f = 1 - \sqrt{1 + \tau^2}$, $f = 2\tau^2 - \tau^4$): $d_1 \sim d_2$; deci d_1 și d_2 aparțin aceleiași curbe simple (fig. 15). În caz contrar (de exemplu: $f_1 = 8\tau^3 - 11\tau^2 + 4\tau$, $f_2 = |2\tau - 1|$, $f_3 = (2\tau - 1)^2$):

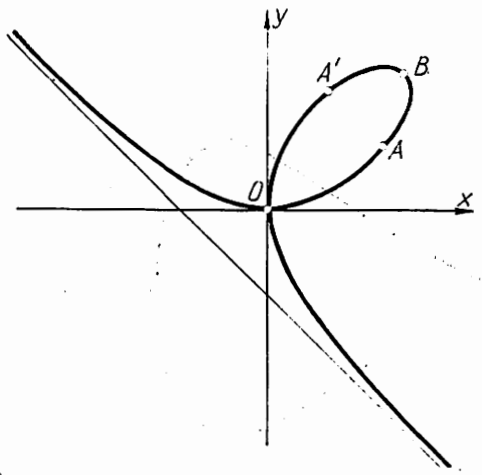


Fig. 14

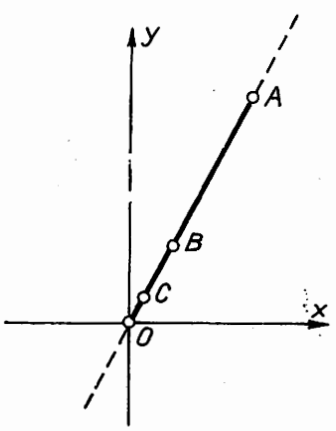


Fig. 15

$d_1 \nsim d_2$; de altfel: d_2 nu e simplu (de exemplu: pentru f_1, punctele între $B(t = 1/4)$ şi $C(t = 2/3)$ sînt puncte multiple; căci, cînd t variază de la 0 la 1, $P(af(t), bf(t))$ descrie pe OA astfel: $OBCBA$), iar uneori e închis (de exemplu: $f_2(0) = f_2(1)$ şi $f_3(0) = f_3(1)$, toate punctele fiind multiple, afară de O şi A). c) $d_1 \sim d_2$ şi aparţin unei curbe simple; imaginea ei e porţiunea din *elipsa* $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ (fig. 16). $d_1 \nsim d_3$; d_3 e închis şi nu e simplu. d) $d_1 \sim d_2$ numai dacă $f(\tau)$ e continuă şi strict crescătoare iar $\alpha = f(a) = 0$, $\beta = f(b) = 1$; imaginea curbei e porţiunea OA cu $A(1, k)$ din *parabola* $y = kx^2$ (fig. 17). e) $d_1 \sim d_2$ şi aparţine unei curbe simple; imaginea ei e porţiunea $OA'A$ din mulţimea de puncte definită de $x^6 - x^4 + y^2 = 0$ (fig. 18). $d_1 \nsim d_3$; d_3 e închis şi are puncte multiple.

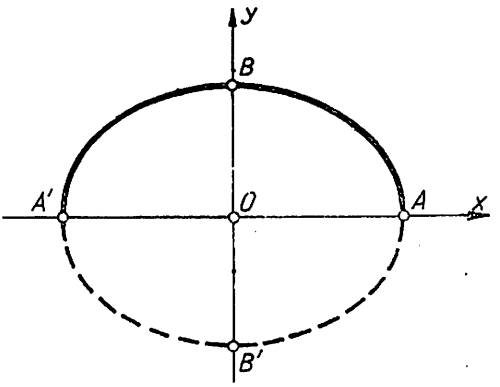


Fig. 16

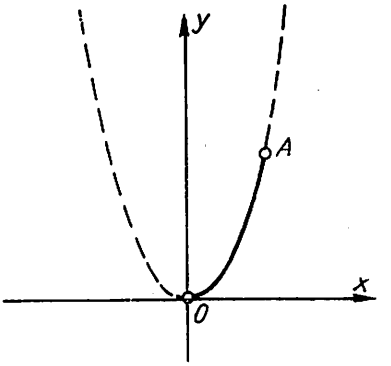


Fig. 17

4 Se dă un cerc C de rază a şi tangenta d în punctul fix $A \in C$. Fie cercurile Γ tangente lui C şi d. Să se găsească locul punctelor P de intersecţie a axei radicale a lui C şi Γ cu tangenta la Γ paralelă cu d. Să se arate că acest loc are un punct multiplu.

R. Fie $C: x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $\Gamma: x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \beta^2 = 0$; sînt tangente, dacă $\beta^2 - 4a\alpha = 0$. Cu $\beta = t$, locul e *cubica unicursală* (fig. 19): $x = t^2/2a$, $y = t(1 - t^2/8a^2)$ sau $y^2 = 2ax(1 - x/4a)^2$. Din $x(t') = x(t'')$ se deduce $t' = -t''$ cu $t'' > 0$; înlocuind în $y(t') = y(t'')$, obţinem $t'' = 2\sqrt{2a}$. Deci $M(4a, 0)$ e un *nod. Obs.* Centrul lui Γ e pe parabola de parametru $2a$, vîrful A şi d ca tangentă în vîrf.

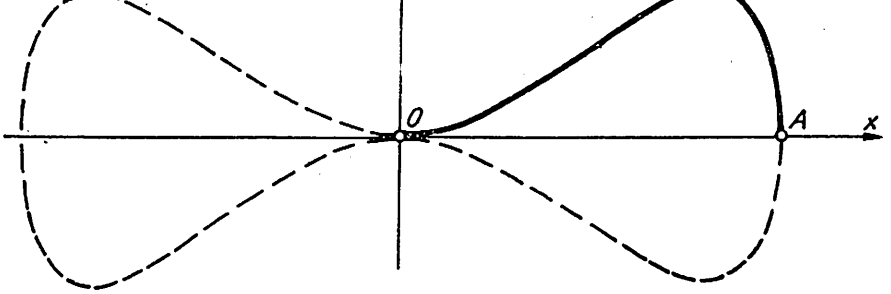


Fig. 18

5 Fie curba C de ecuaţie explicită

(2) $$y = f(x), \quad x \in I \quad (I \subset R).$$

Să se arate că, dacă : a) $f(x)$ e o funcție periodică ; b) $f(x) = a\,e^{bx}$ $(b \neq 0)$, curba C e o curbă transcendentă.

R. Se mai spune că *curba* C e *definită de funcția* $f: I \to R$, relația (2) fiind ecuația graficului Γ a lui f. *Curba* C e *transcendentă* dacă ecuația ei nu e algebrică ; cînd $f(x)$ e un polinom, *curba* C e *algebrică*. a) Dacă ω e perioada, deci $f(x_0 + k\omega) = f(x_0)$ iar $P_0(x_0, y_0 = f(x_0)) \in C$, atunci și $P_k(x_0 + k\omega, y_0) \in C$ (k—număr întreg). Dreapta $y = y_0$ avînd o infinitate de puncte comune cu C, fără a fi conținută în C, rezultă că C e transcendentă. Exemple : a_1) $y = \sin x + \sin^2 x$ (fig. 20) ; a_2) $f(x)$ e funcție periodică cu perioada 2π, definită pe $[-\pi, \pi]$ de ecuația $xy = \pi$ (fig. 21).

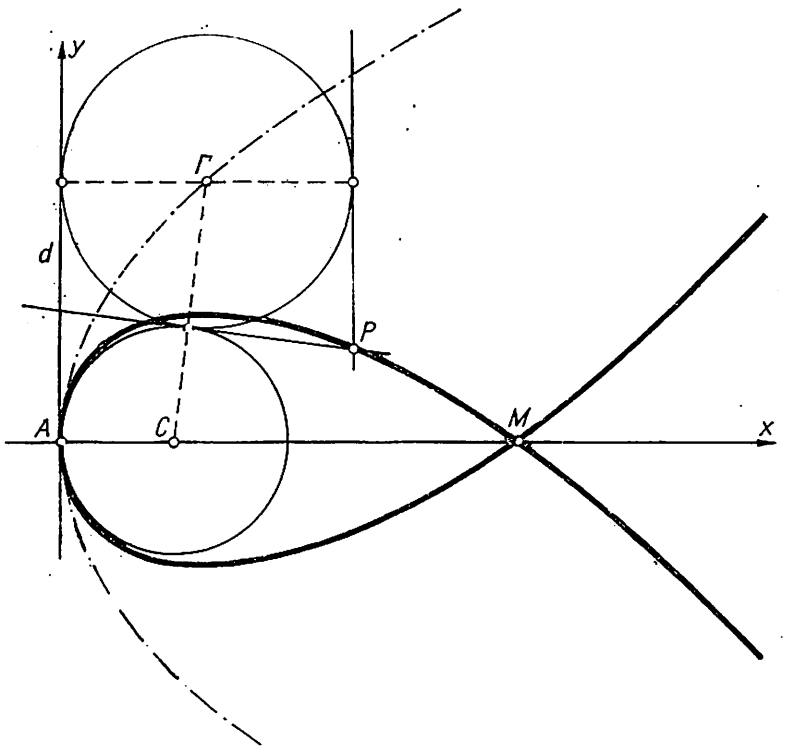


Fig. 19

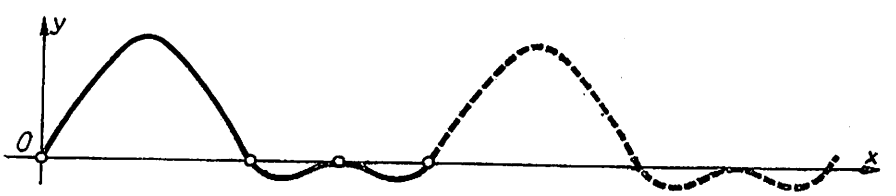


Fig. 20

Consecințe. a_3) *Curbele definite de funcțiile trigonometrice și inversele lor sînt curbe transcendente* (fig. 22). a_4) *Curba oscilației compuse* $y = \sum_{i=1}^{n} A_i' \sin a_i x + B_i' \cos a_i x$, adică $y = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin (a_i x + b_i)$

sau $y = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(a_i x + b_i)$ cu $A_i = \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2}$ iar $\sin b_i = B_i'/A_i$, $\cos b_i = A_i'/A_i$ sau $\sin b_i = -A_i'/A_i$, $\cos b_i = B_i'/A_i$, e o curbă transcendentă. Pentru $n = 1$, obținem *curba oscilației armonice* (sinonim: *curba armonică simplă*): $y = A\sin(ax + b)$ sau $y = A\cos(ax + b)$, care e transformata afină a *sinusoidei* $Y = \sin X$, respectiv $Y = \cos X$. *Obs.* Mișcarea particulei de masă

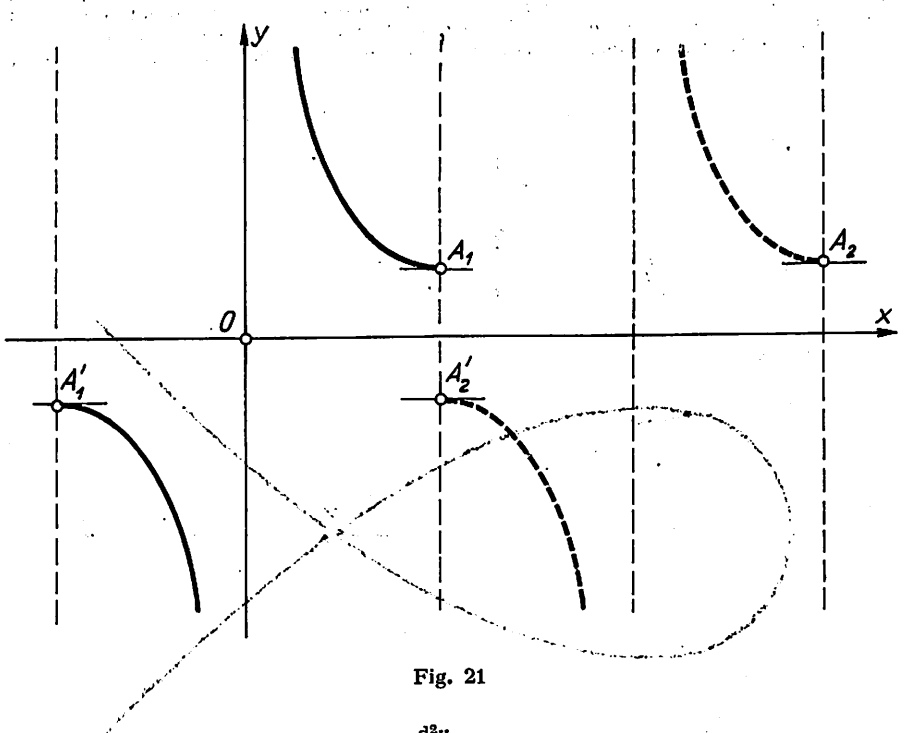
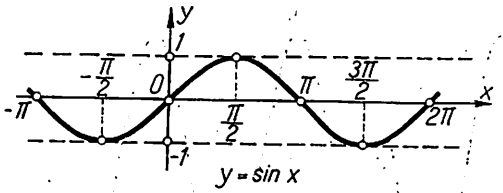
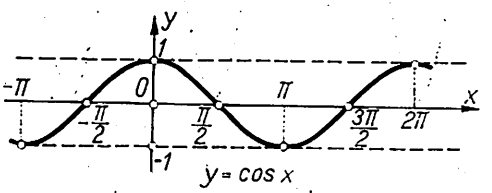


Fig. 21

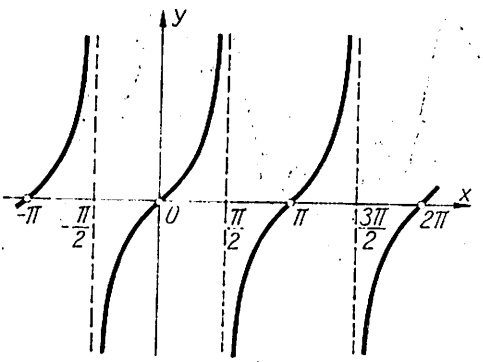
m e o oscilație armonică dacă accelerația $\frac{d^2y}{dx^2}$ a particulei e proporțională cu deplasarea sa y din poziția de echilibru și orientată spre această poziție, adică $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0 (a^2 = \frac{k}{m}$ — *pulsația*, x — timpul, k — factor de proporționalitate); soluția acestei ecuații diferențiale e curba armonică simplă, constantele A (*amplitudinea* mișcării) și b (*faza inițială* a oscilației) fiind determinate prin condiții inițiale. *Oscilația compusă*, prin compunerea a două sau mai multe oscilații armonice (care se produc în lungul aceleiași drepte), poate fi o oscilație armonică sau o oscilație nearmonică, după cum oscilațiile componente au aceeași pulsație sau nu. În ultimul caz, amplitudinea A variază după o lege $A = A(x)$; de exemplu: α) $n = 2$, $A_1 = A_2$, $a_1 \ll a_2$ sînt puțin diferite una de cealaltă ($b_1 = b_2$ la momentul inițial), cînd oscilația nearmonică cu $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $A = |2A_1 \cos \frac{1}{2}(a_2 - a_1)x|$, $b = b_1$ reprezintă fenomenul numit *bătăi* (fig. 23e). β) Pentru $A = A_0 e^{-\beta x}$ obținem *oscilația amortizată* (fig. 23f), cînd particula descrie mișcarea $m\frac{d^2y}{dx^2} = -ky - r\frac{dy}{dx}$ $\left(\beta = \frac{r}{m}\right.$, r — coeficientul de rezistență a mediului$\left.\right)$. γ) În cazul *oscilațiilor forțate*, cînd asupra particulei acționează încă o forță perturbatoare (periodică): $m\frac{d^2y}{dx^2} = -ky - r\frac{dy}{dx} + H\cos ax$ $\left(a_0^2 = \frac{k}{m}, \beta = \frac{r}{m}, h = \frac{H}{m}\right)$, oscilația



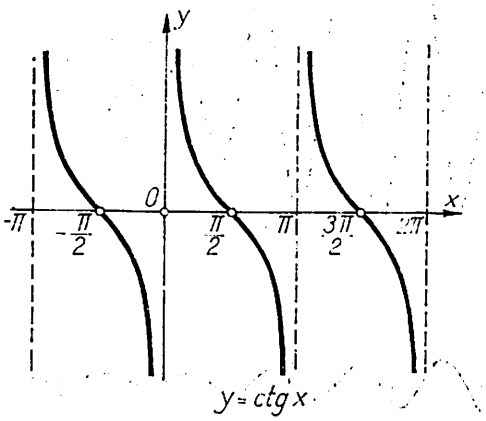
$y = \sin x$



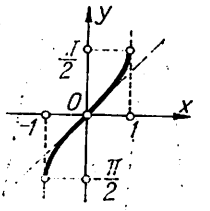
$y = \cos x$



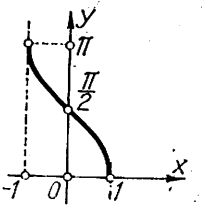
$y = tg\,x$



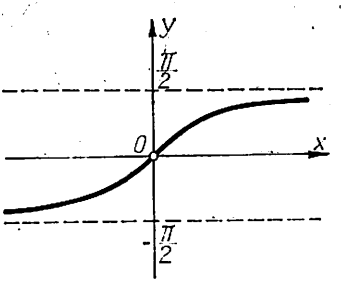
$y = ctg\,x$



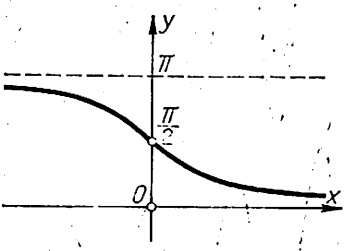
$y = arc\,sin\,x$



$y = arc\,cos\,x$



$y = arc\,tg\,x$



$y = arc\,ctg\,x$

Fig. 22

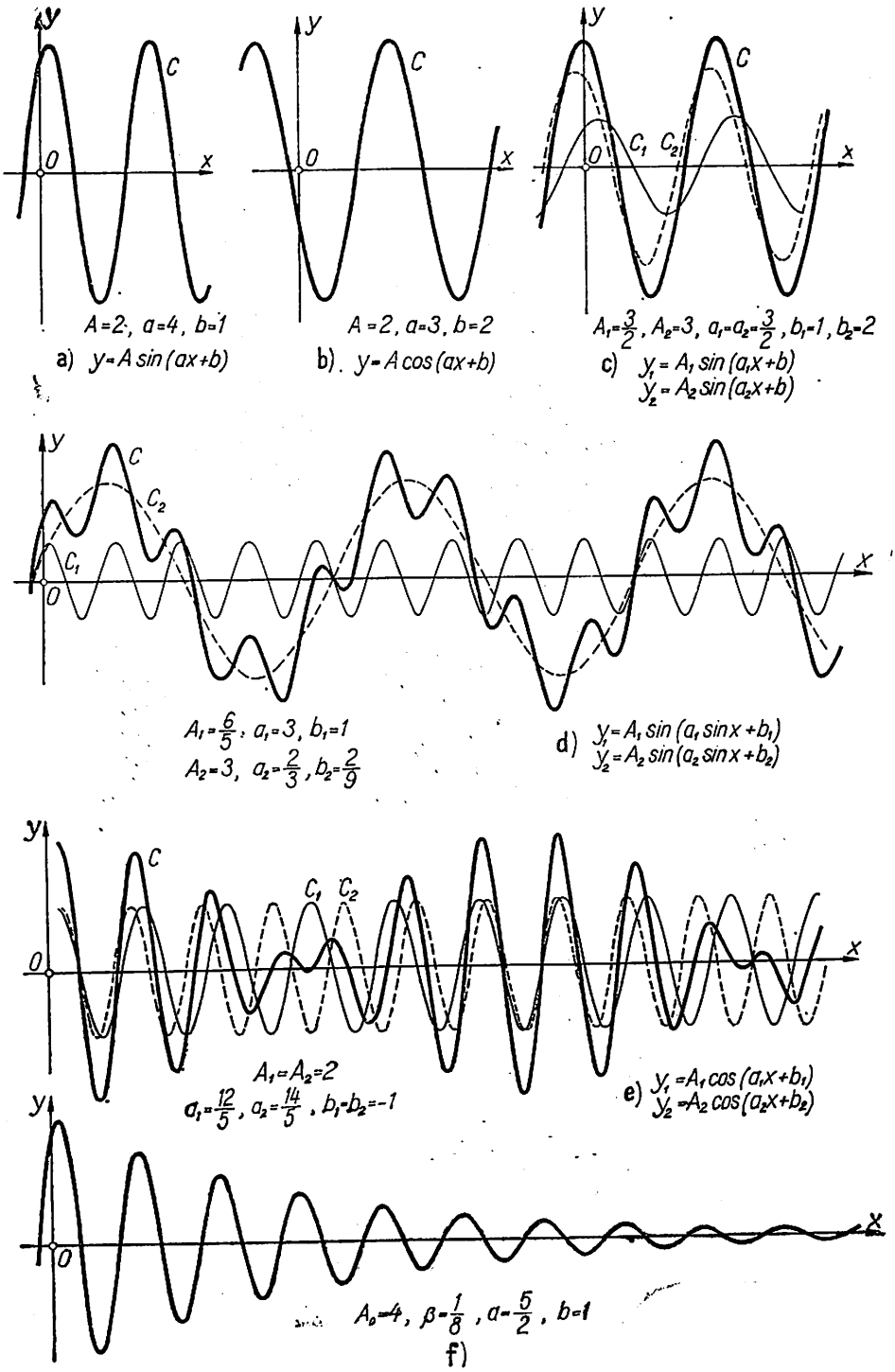

y
C
0
x
A=2, a=4, b=1
a) y=A sin(ax+b)
A=2, a=3, b=2
b). y=A cos(ax+b)
C1 C2
A1=3/2, A2=3, a1=a2=3/2, b1=1, b2=2
c) y1=A1 sin(a1x+b)
y2=A2 sin(a2x+b)
A1=6/5, a1=3, b1=1
A2=3, a2=2/3, b2=2/9
d) y1=A1 sin(a1 sin x+b1)
y2=A2 sin(a2 sin x+b2)
A1=A2=2
a1=12/5, a2=14/5, b1=b2=-1
e) y1=A1 cos(a1x+b1)
y2=A2 cos(a2x+b2)
A0=4, β=1/8, a=5/2, b=1
f)

Fig. 23

are amplitudinea $A = h/\sqrt{(a_0^2 - a^2)^2 + 4\beta^2 a^2}$; la variația lui a (a_0 fiind constantă), se obține *fenomenul de rezonanță* cînd A are valoarea maximă $A_{rez} = h/2\beta\sqrt{a_0^2 - \beta^2}$ ($a_{rez} = \sqrt{a_0^2 - 2\beta^2}$). Cînd $\beta = 0$, $a_{rez} = a_0$ iar $A \to \infty$; însă $\beta \neq 0$, iar A_{rez} se obține pentru $a_{rez} < a_0$. Dependența lui A de a, pentru diferite valori ale lui β, dă curbele de rezonanță (fig. 24). Invers, o oscilație compusă poate fi descompusă în două sau mai multe, chiar în o infinitate de oscilații armonice simple;

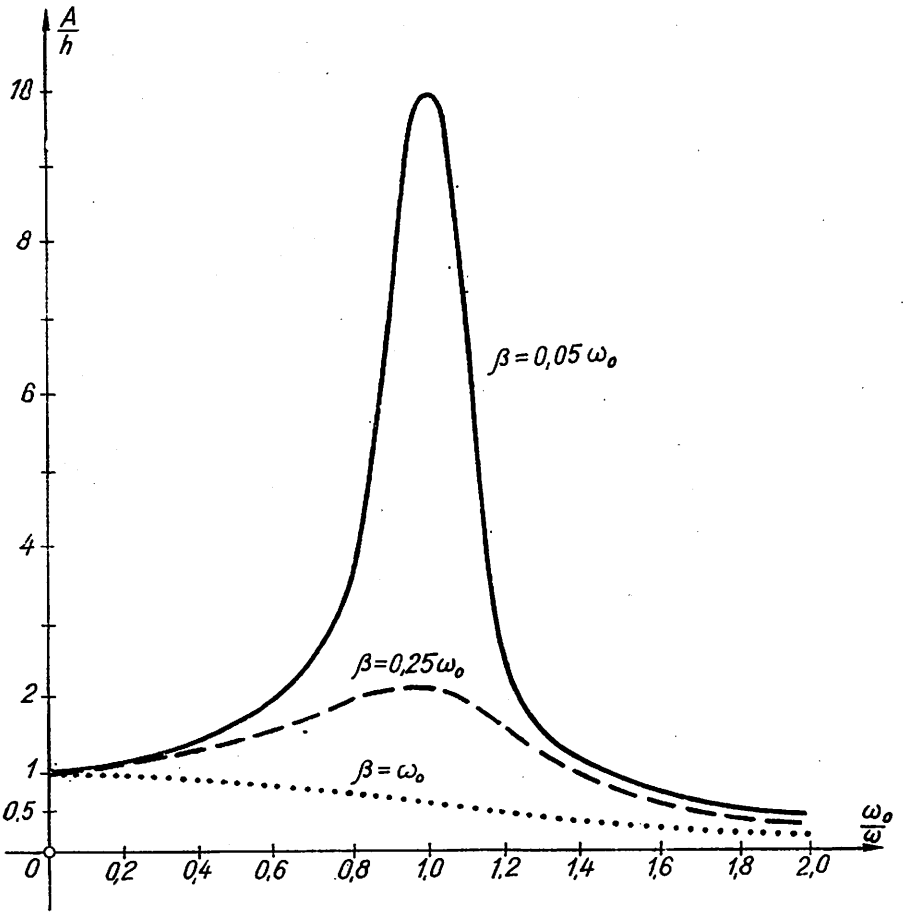


Fig. 24

de exemplu, *oscilația modulată* $y = A \cos a_0 x$ cu $A = A_1 + A_2 \cos ax$ ($A_1 < A_2$) iar $a \ll a_0$ se descompune în trei oscilații armonice cu pulsațiile a_0, $a_0 + a$, $a_0 - a$ și cu amplitudinile A_1, $A_2/2$ și $A_2/2$. a$_5$) *Curbele* (sinonim: *figurile*, *franjurile*) lui *Lissajous* reprezintă traiectoria unei particule care participă (în același timp) la două oscilații armonice ce se produc după direcții perpendiculare: $x = a \sin(mt + \alpha)$, $y = b \sin(nt + \beta)$ sau $x = a \cos(mt + \alpha)$, $y = b \cos(nt + \beta)$. Aceste curbe sînt transcendente sau algebrice după cum raportul m/n e irațional sau rațional. Dacă perioadele sînt egale ($m = n$), curba e o *elipsă* a cărei formă depinde de diferența de fază a oscilațiilor componente, ea reducîndu-se la un segment de dreaptă cînd această diferență e 0 sau π și la o elipsă raportată la direcțiile perpendiculare pe care se produc oscilațiile cînd diferența lor de fază e $\pi/2$ sau $3\pi/2$; cînd amplitudinile oscilațiilor componente sînt egale ($a = b$), elipsa e un cerc. În cazul general (cazul a două perioade diferite), curbele lui Lissajous au un aspect complicat, fiind însă înscrise într-un dreptunghi (fig. 25); raportul perioadelor celor două oscilații componente e egal cu raportul dintre numărul punctelor de tangență dintre curbă și două laturi alăturate ale dreptunghiului. b) Să presupunem că punctele lui C ar verifica o ecuație algebrică $F(x, y) = y^n f_0(x) + \ldots + y f_{n-1}(x) = 0$ (f_i — polinoame; $i = 0, 1, \ldots, n$). Dacă $b > 0$ ($b < 0$), din

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^m}F(x,ae^{bx})=0$ obținem $A_0=0$, contrar ipotezei (că f_n e de grad m). Curba $C: y=ae^{bx}$ se numește *curba exponențială* (fig. 26); ea taie pe Oy în $A(0,a)$. E transformata afină a curbei $Y=e^X$. *Consecințe.* b_1) *Curba logaritmică* $y=a\log_p\frac{x}{b}$ e o curbă transcendentă; căci ecuația ei se poate scrie

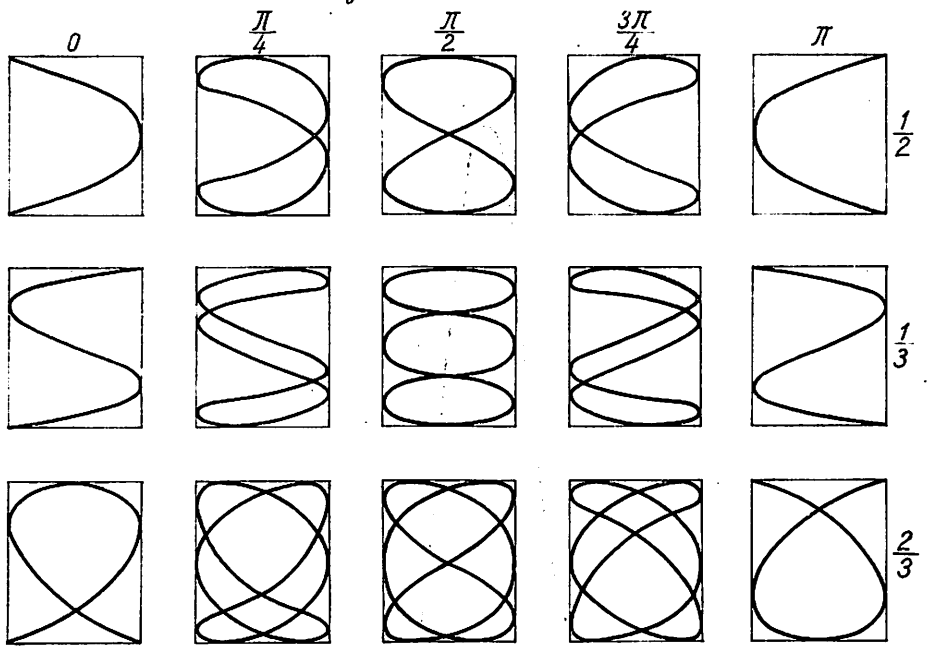


Fig. 25

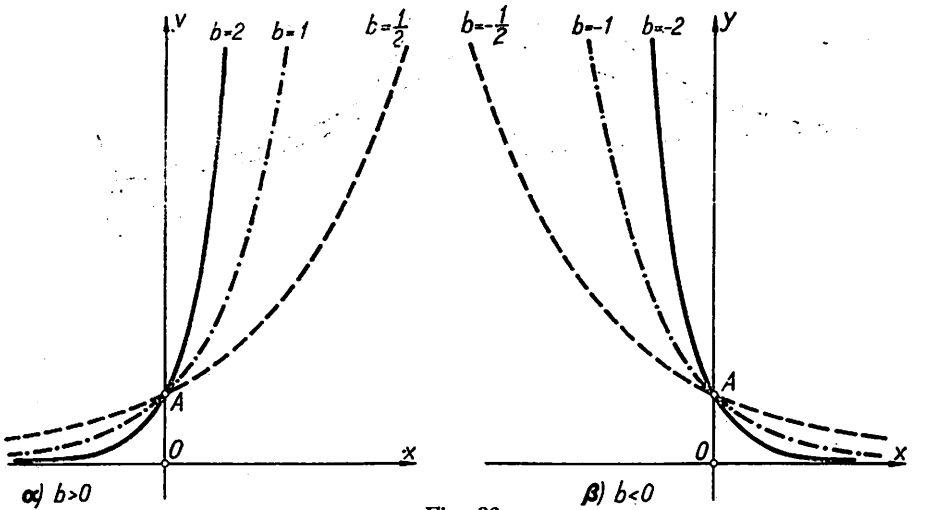


Fig. 26

$x=b\,p^{y/a}$, care e o curbă exponențială. E suficient să studiem cazul $p=e$, cînd obținem $\Gamma: y=a\ln\frac{x}{a}$ (fig. 27), numită *curba lui Neper* (sinonim: *curba logaritmică neperiană*); căci, scriind $C: y=\frac{a}{\ln p}\ln\frac{x}{b}$, rezultă că C e transformata lui Γ prin afinitatea omologică $x=X$,

$y = \frac{1}{\ln p} Y$. Relația dintre curbele logaritmice C corespunzătoare la diferite baze p și curba logaritmică neperiană Γ e $y - Y = \frac{1 - \ln p}{\ln p} Y$ (fig. 28); C și Γ trec prin punctul $A(b, 0)$. b$_3$) *Curbele definite de funcțiile hiperbolice și inversele lor sînt curbe transcendente* (fig. 29); căci și curba $y = A(x) + B(x)\, e^{\varphi(x)}$ e transcendentă (A, B, φ — polinoame).

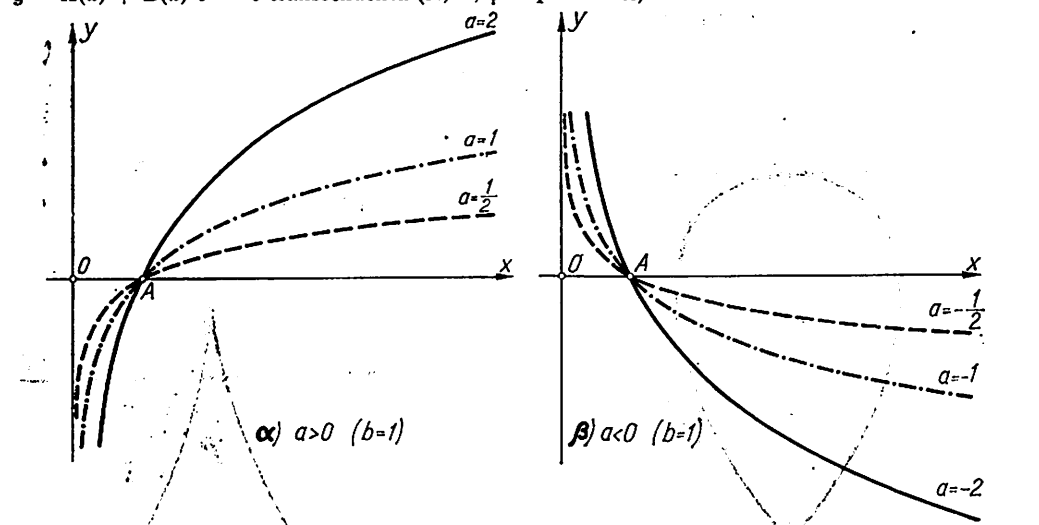


Fig. 27

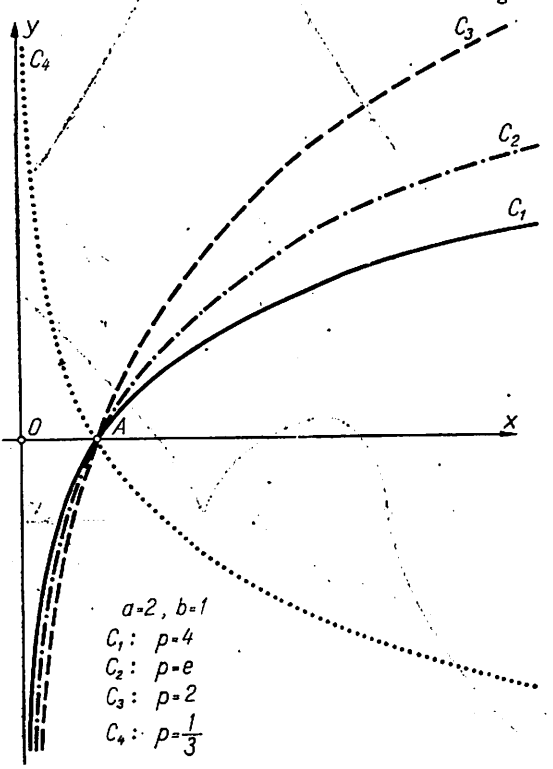


Fig. 28

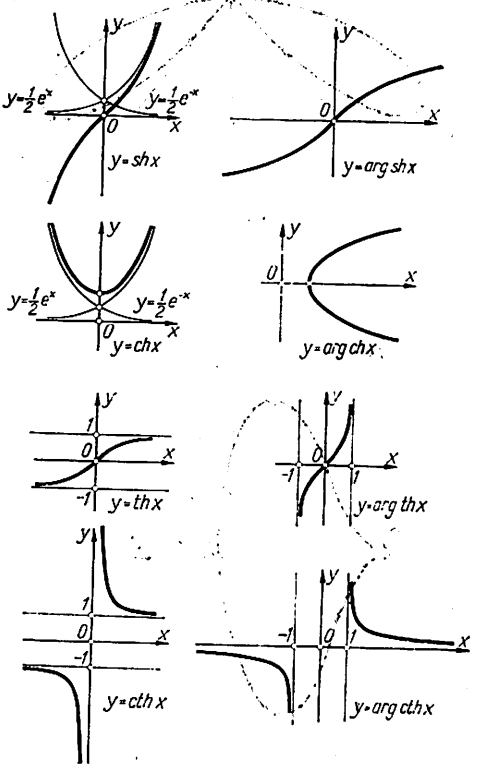


Fig. 29

6 Să se determine o parametrizare a curbei C dată prin ecuaţia implicită: a) $x^4 + y^4 + 8x^2y - 6y^3 = 0$ (fig. 30); b) $(y-1)^3 + 27(x-2)^2 = 0$ (fig. 31); c) $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$ (fig. 32); d) $x^3 - y^3 - 3x + 2 = 0$ (fig. 33); e) $ax = by\, e^{2\alpha(xy/ab)}$ (fig. 34); f) $x^4(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2)^2 = 0$ (fig. 35); g) $(x^2 - y)^2 - y^3 = 0$ (fig. 36); h) $x^4 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ (fig. 37); i) $x^2y^2 + y - 1 = 0$ (fig. 38).

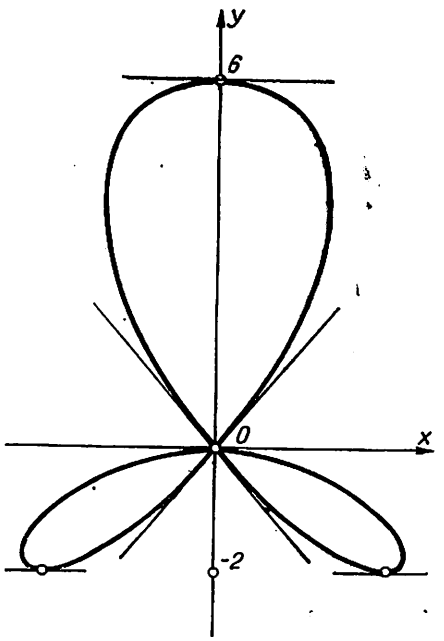


Fig. 30

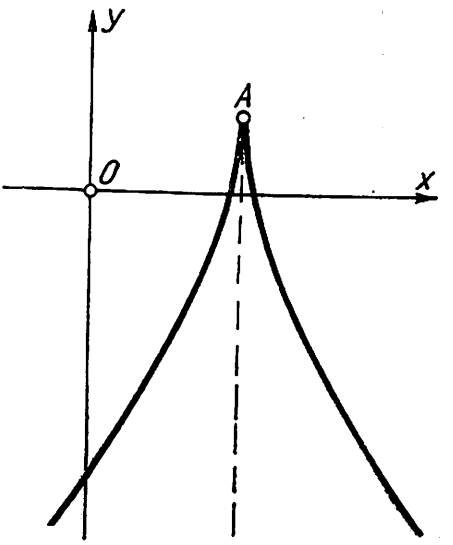


Fig. 31

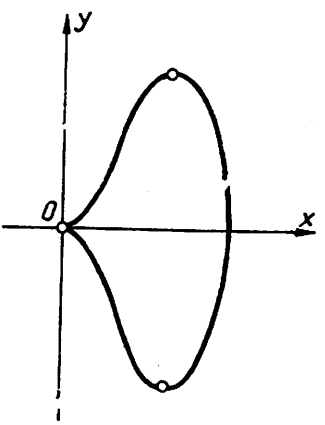


Fig. 32

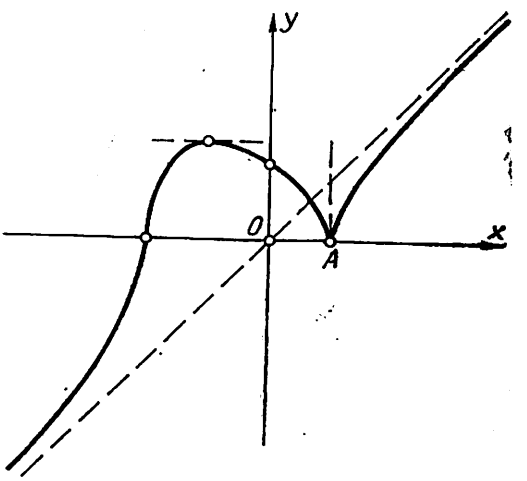


Fig. 33

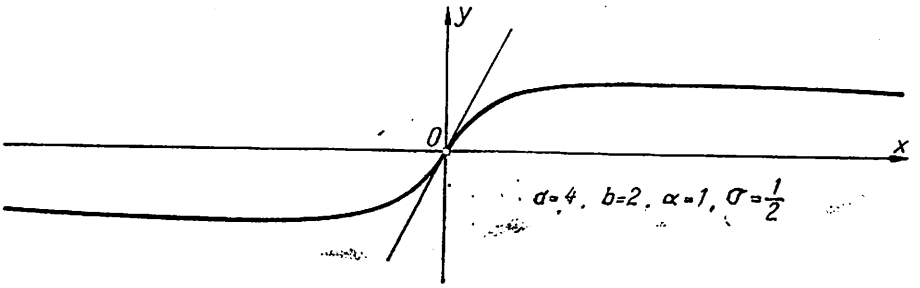


Fig. 34

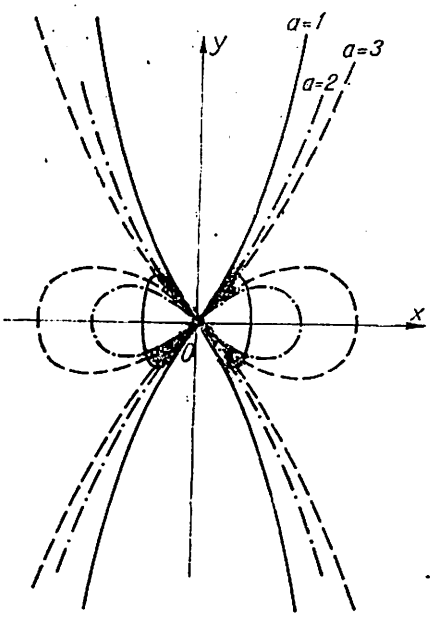


Fig. 35

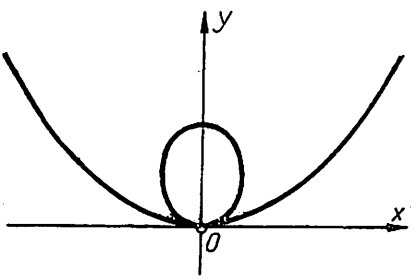


Fig. 36

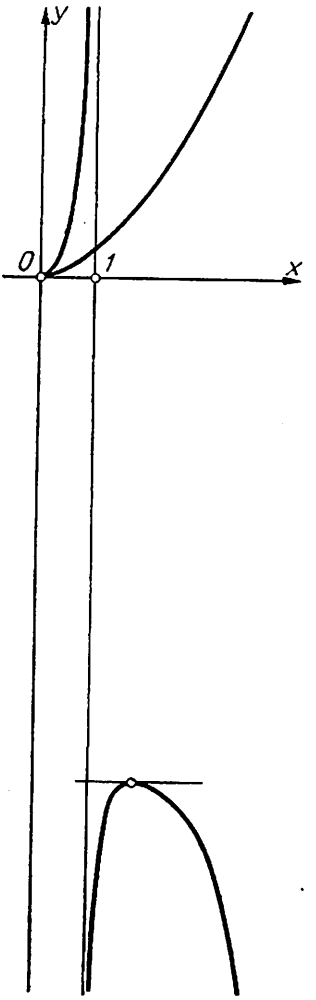


Fig. 37

: — c 2039

R. În cazul a), intersectăm pe C cu $d: y = tx$; deci $C: x = 2t(3t^2 - 4)/(1 + t^4)$, $y = 2t^2(3t^2 - 4)/(1 + t^4)$. Pentru f), intersectăm pe C cu $d: y = x \operatorname{tg}\theta$ şi

(3) $$C: x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,$$

cu $\rho = a\cos 2\theta/\cos^2\theta$. Intersectăm pe C, în cazul b) cu $d: y - 1 = t(x - 2)$ cînd $C: x = 2 + 27t^{-3}$, $y = 1 + 27t^{-2}$, iar în cazul d) cu $d: y = t(x - 1)$ obţinînd $C: x = (t^3 + 2)/(t^3 - 1)$, $y = 3t/(t^3 - 1)$. Pentru c) şi h), intersectăm pe C cu parabola $y = tx^2$; în cazul e), C se intersectează cu hiperbola $xy = abt^2$. Explicitarea ecuaţiei în raport cu y (sau x), conduce la o parametrizare a lui C, ca în cazurile g) şi i): $x = \pm\sqrt{y \pm \sqrt{y^3}}$, $y = \tau^2$ şi $\tau + 1 = t^2$ cînd $C: x = t(t^2 - 1)$, $y = (t^2 - 1)^2$ şi $x = \pm\sqrt{1 - y}/y$, $1 - y = t^2$ cînd $C: x = t/(1 - t^2)$, $y = 1 - t^2$. *Obs.* α) Obţinînd ecuaţia polară a curbei C:

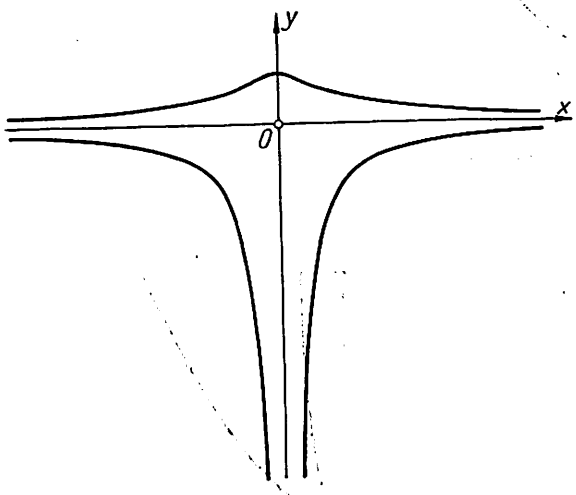


Fig. 38

(4) $$\rho = \rho(\theta),$$

prin (3) se determină o parametrizare a lui C; de exemplu, în cazul a), deducem $\rho = a\sin\theta\cos 2\theta$. β) Exceptînd e), C e unicursală. Se ia uneori

(5) $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = t$, deci $\sin\theta = 2t/(1 + t^2)$, $\cos\theta = (1 - t^2)/(1 + t^2)$.

7 Dacă, în coordonate polare, curba C e dată de o ecuaţie de forma

(6) $$F(\rho, \cos\theta, \sin\theta) = 0 \text{ cu } F \text{ polinom},$$

C e o curbă algebrică. *Apl.* Curba C: a) $\rho = a/\cos^2\dfrac{\theta}{4}$; b) $\rho = 2\cos 2\theta + 1$; c) $a^2(\rho^2 - 4a\rho\cos 3\theta + 4a^2) = (\rho^2 - 3a\rho\cos 3\theta + 2a^2)^2$; d) $\rho = \cos\theta + \cos 3\theta$; e) $\rho^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = a^2$; f) $\rho = \operatorname{tg}\theta/(1 - 2\sin\theta)$ e o curbă algebrică.

R. Ecuaţia carteziană $F(\sqrt{x^2 + y^2}, x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ se poate scrie, grupînd termenii cu radicali, $\Phi(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} + \Psi(x, y) = 0$ (Φ, Ψ — polinoame); raţionalizînd, obţinem

(7) $$(x^2 + y^2)\Phi^2(x, y) - \Psi^2(x, y) = 0.$$

Consecinţă. Dacă, explicitînd ecuaţia (6), ρ se exprimă printr-o funcţie raţională (de $\sin\theta$ şi $\cos\theta$), atunci curba e unicursală; căci, prin (5):

(8) $$\rho = f\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right),$$

deci $\rho = \varphi(t)$ cu φ funcţie raţională de t. *Apl.* Se ţine seama de (3) în (6) şi se grupează în termeni pari şi impari în ρ, apoi se ridică la pătrat ş.a.m.d. a) Avem $\rho = 2a/\left(1 + \cos\dfrac{\theta}{2}\right) = 2a/\left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)}\right)$, deci $\rho^2(1 + \cos\theta) = 2(2a - \rho)^2$ sau $(x + 8a)\rho = 8a^2 + \rho^2$; rezultă $(x + 8a)^2(x^2 + y^2) = (8a^2 + x^2 + y^2)^2$ (fig. 39). b) $(x^2 + y^2)^3 = (3x^2 - y^2)^2$ (fig. 40). c) $a^2\left(x^2 + y^2 - 4ax\dfrac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} + 4a\right) = \left(x^2 + y^2 - 3ax\dfrac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} + 2a^2\right)^2$ (fig. 41). d) $(x^2 + y^2)^2 = 2x(x^2 - y^2)$ (fig. 42). e) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ (fig. 43). f) $x^2(x^2 + y^2) = y^2(2x + 1)^2$ (fig. 44). *Obs.* Curbele *b*, *d* şi *f* sînt unicursale.

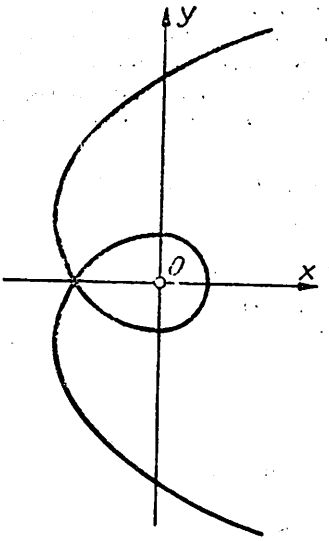


Fig. 39

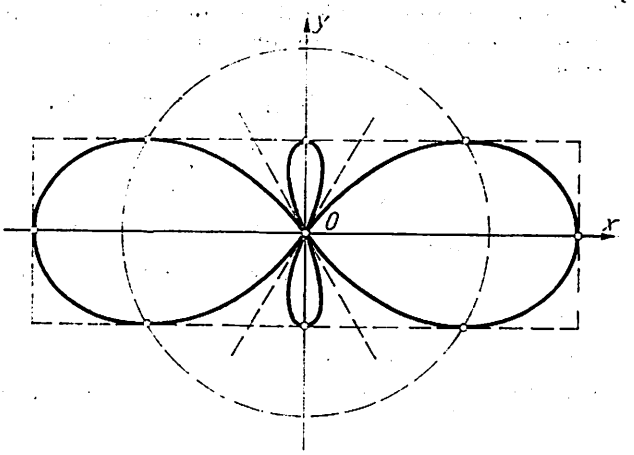


Fig. 40

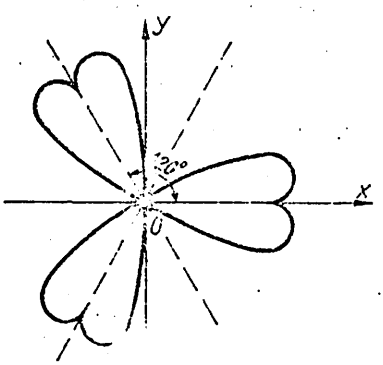


Fig. 41

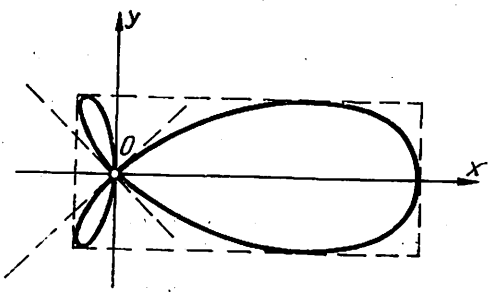


Fig. 42

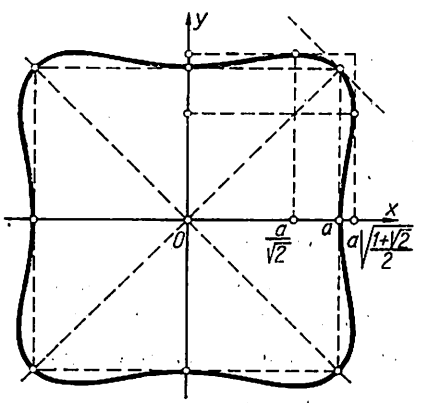


Fig. 43

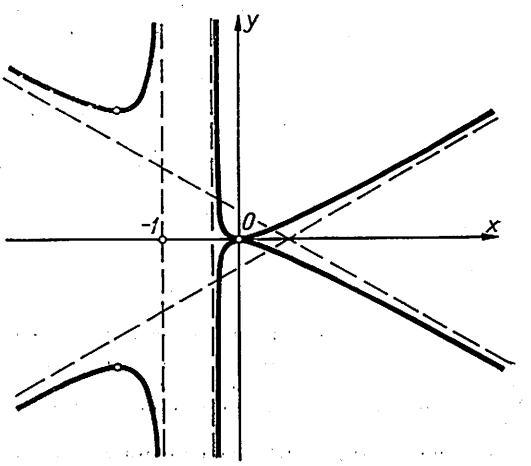


Fig. 44

8 O curbă algebrică C_n de gradul n care trece prin punctele ciclice ale planului se numește *curbă circulară*; dacă C_n trece de m $(2m \leqslant n)$ ori prin fiecare punct ciclic, *curba* se numește *m-circulară*. Se cere: a) Să se determine ecuația unei astfel de curbe. b) Să se arate că se poate găsi un reper cartezian orotgonal în raport cu care ecuația unei *cuartice bicirculare* are forma

(9) $$(x^2 + y^2)^2 + 4(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0.$$

R. a) Cu $\varphi_k(x, y) = a_{k0}x^k + a_{k-11}x^{k-1}y + \ldots + a_{0k}y^k (k = 0, 1, \ldots, n)$, avem

(10) $$C_n : \mathrm{F}(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0.$$

Dacă C_n e *circulară*, deci $I(1, \mathrm{i}, 0) \in C_n$ și $J(1, -\mathrm{i}, 0) \in C_n$, obținem $\varphi_n(1, \mathrm{i}) = 0$, $\varphi_n(1, -\mathrm{i}) = 0$; deci C_n are ecuația (10) cu

(11) $$\varphi_n(x, y) = (x^2 + y^2)\,\zeta_{n-2}(x, y).$$

Dacă C_n e o *curbă m-circulară*, atunci

(12) $$\varphi_n = (x^2 + y^2)^m\,\zeta_{n-2m},\ \varphi_{n-1} = (x^2 + y^2)^{m-1}\,\zeta_{n-2m+1}, \ldots,\ \varphi_{n-m+1} = (x^2 + y^2)\,\zeta_{n-m-1}.$$

Căci, dacă C_n e bicirculară, atunci I și J sînt *puncte duble* (puncte multiple de ordinul doi) pentru curbă. Deci, în (11), avem

(13) $$\zeta_{n-2}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\zeta_{n-4}(x, y).$$

Pe de altă parte, dreapta $y = \mathrm{i}x + \lambda$ (respectiv $y = -\mathrm{i}x + \lambda$), trecînd prin I (respectiv J), taie pe C_n în două puncte confundate în $I(J)$ și în alte $n - 2$ puncte la distanță finită; abscisele acestor puncte sînt rădăcinile ecuației

$$\mathrm{F}(x, \mathrm{i}x + \lambda) = \varphi_{n-1}(1, \mathrm{i})\,x^{n-1} + \left[-4\lambda^2\,\zeta_{n-4}(1, \mathrm{i}) + \frac{\partial\varphi_{n-1}(1, \mathrm{i})}{\partial y} + \varphi_{n-2}(1, \mathrm{i})\right]x^{n-2} + \ldots + a_{00} = 0.$$

Deci I e punct dublu dacă $\varphi_{n-1}(1, \mathrm{i}) = 0$; deci $\varphi_{n-1} = (x^2 + y^2)\zeta_{n-3}$. Așadar, ecuația unei curbe bicirculare C_n e

(14) $$(x^2 + y^2)^2\,\zeta_{n-4} + (x^2 + y^2)\,\zeta_{n-3} + \varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0.$$

Obs. Se zice că C_n e o *curbă circulară de speță m* $(2m \leqslant n)$ cînd

(15) $$\varphi_n = (x^2 + y^2)^m\,\zeta_{n-2m}.$$

Dacă $2m = n$, cînd putem considera $\zeta_0 = 1$, C_n se mai numește și *curbă de putere constantă*; căci o dreaptă oarecare d prin $P_0(x_0, y_0) \in R^2$ taie pe C_n în $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ astfel încît produsul $p = \prod_{i=1}^{n} P_0P_i = \mathrm{F}(x_0, y_0) = \text{const.}$, numit *puterea lui* P_0 *față de* C_n, e independent de direcția lui d. *Consecințe.* a_1) *O conică circulară e un cerc*, fiind o curbă de putere constantă. a_2) O curbă m-circulară C_{2m} e o curbă de putere constantă. b) Ecuația generală a unei cuartice bicirculare C_4 e

(16) $$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(\alpha x + \beta y) + \eta(x, y) = 0,$$

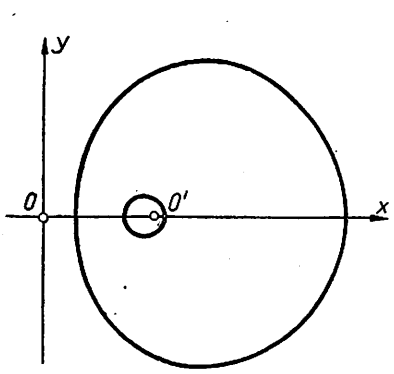
unde $\eta(x, y) = 0$ e ecuația unei conice C_2. Scriind ecuația (16) sub forma

$$(x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y)^2 - (\alpha x + \beta y)^2 + \eta(x, y) = 0 \text{ sau } \left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2\right]^2 + \eta_1(x, y) = 0$$

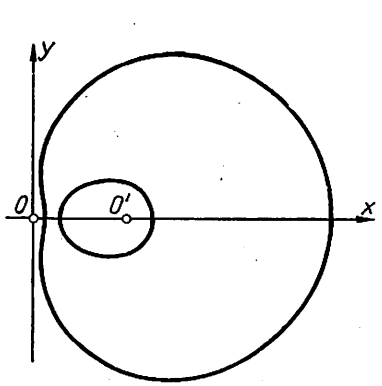
și translatînd originea în $\Omega\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$, numit *punct fundamental* al lui C_4, ecuația cuarticei devine

$$(x^2 + y^2)^2 + f(x, y) = 0 \text{ cu } f(x, y) = 0 \text{ ecuația unei conice } C_2'.$$

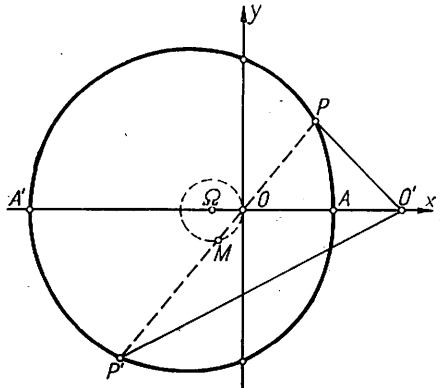
Făcînd o rotație de axe care să le aducă paralele cu axele lui C_2', obținem (9). *Obs.* O dreaptă prin Ω taie pe C_4 în 4 puncte M_i ai căror vectori de poziție pe dreaptă au mărimi care verifică relația $\sum_{i=1}^{4} \rho_i = 0$; relația e echivalentă cu $OM_{ih} + OM_{jk} = 0$, unde M_{ih} e mijlocul lui M_iM_h. Deci Ω e mijlocul lui $M_{ih}M_{jk}$, cu $(ih\,jk)$ o permutare a lui (1 2 3 4). Fie C_4 de ecuație (9). Dacă $a_{11} = a_{22}$ (și $a_{23} = 0$ printr-o rotație), C_4 se numește *ovalul lui Descartes*: *locul punctelor P astfel încît* (fig. 45)



$a=2{,}5\ ;\ \alpha=3\ ;\ \beta=7\ ;\ \gamma=10$

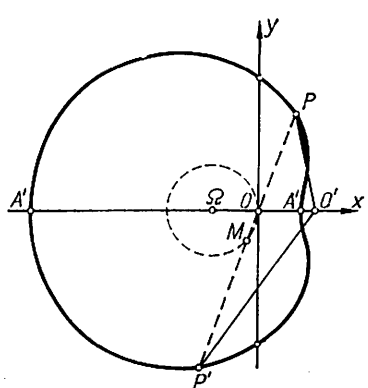


$a=2\ ;\ \alpha=3\ ;\ \beta=7\ ;\ \gamma=12$



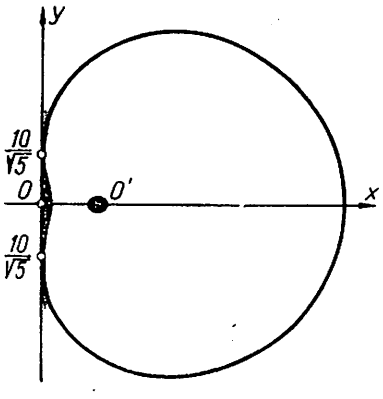
$a=\frac{21}{4}\ ,\ \alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=\frac{21}{2}$

$(l\geqslant 2p\ ;\ h\leqslant\frac{1}{2})$

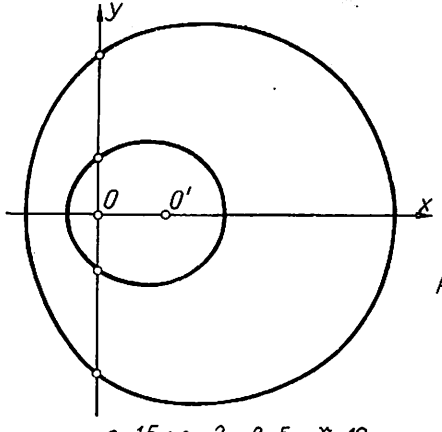


$a=\frac{15}{8}\ ,\ \alpha=3\ ,\ \beta=2\ ,\ \gamma=\frac{15}{4}$

$(p<l<2p\ ;\ \frac{1}{2}<h<1)$

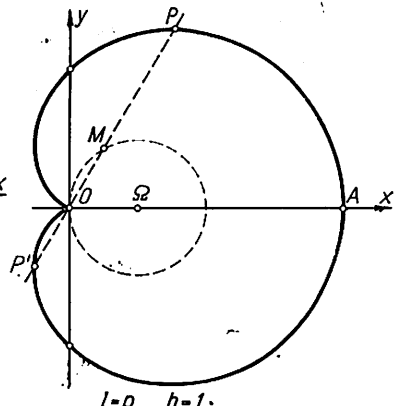


$a=\frac{5}{4}\ ;\ \alpha=2\ ,\ \beta=3\ ;\ \gamma=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

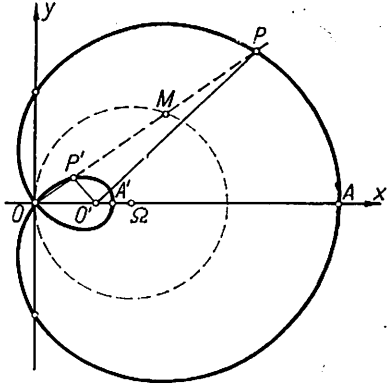


$a=1{,}5\ ;\ \alpha=2\ ;\ \beta=5\ ;\ \gamma=12$

a)



$l=p\quad h=1$



$a=2\ ,\ \alpha=3,\ \beta=5,\ \gamma=10$

$(l<p\ ;\ h>1)$

b)

Fig. 45

$\alpha PO + \beta PO' = \gamma$($O$, O' — două puncte fixe; α, β, γ — constante oarecare);
căci O fiind originea axelor, iar $O'(a, 0)$, $h = \pm\frac{\beta}{\alpha} > 0$, $k = \mp\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, găsim

$$[(1 - h^2)(x^2 + y^2) + 2ah^2x + k^2 - a^2h^2]^2 - 4k^2(x^2 + y^2) = 0. \tag{17}$$

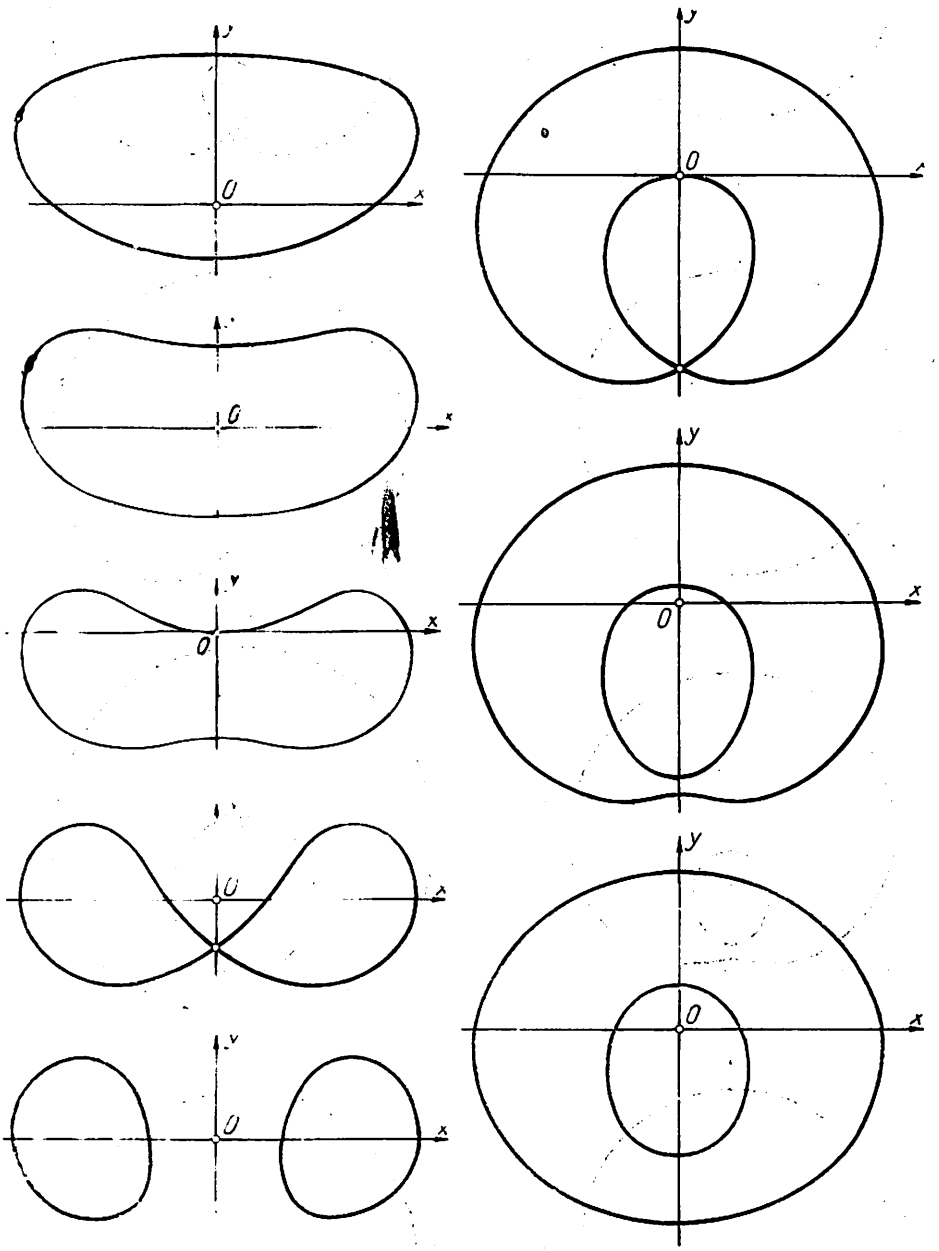


Fig. 46

Translatînd O în $(-ah^2/(1 - h^2), 0)$ și identificînd (17) cu (9), obținem 3 ecuații ce determină pe a, h, k în funcție de a_{11}, a_{13}, a_{33}; dacă a, h, k sînt imaginare, curba se zice e o *cartezianǎ*. Cînd

$k^2 - a^2h^2 = 0$, (17) e ecuația *melcului lui Pascal* (sinonim : *concoida cercului* ; v. probl. 11) ; notînd $p = -2ah^2/(1 - h^2)$ — diametrul cercului — și $l = -2ah/(1 - h^2)$, are ecuația

(18) $$(x^2 + y^2 - px)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0 \text{ sau } \rho = p\cos\theta \pm l,$$

putînd considera numai semnul + iar $\theta \in [0, 2\pi]$. Forma curbei depinde de p și l; sînt 4 cazuri : $l \geqslant 2p$, $p < l < 2p$, $l = p$, $l < p$ (fig. 45b). Cînd $l = p$, cuartica se numește *cardioidă*:

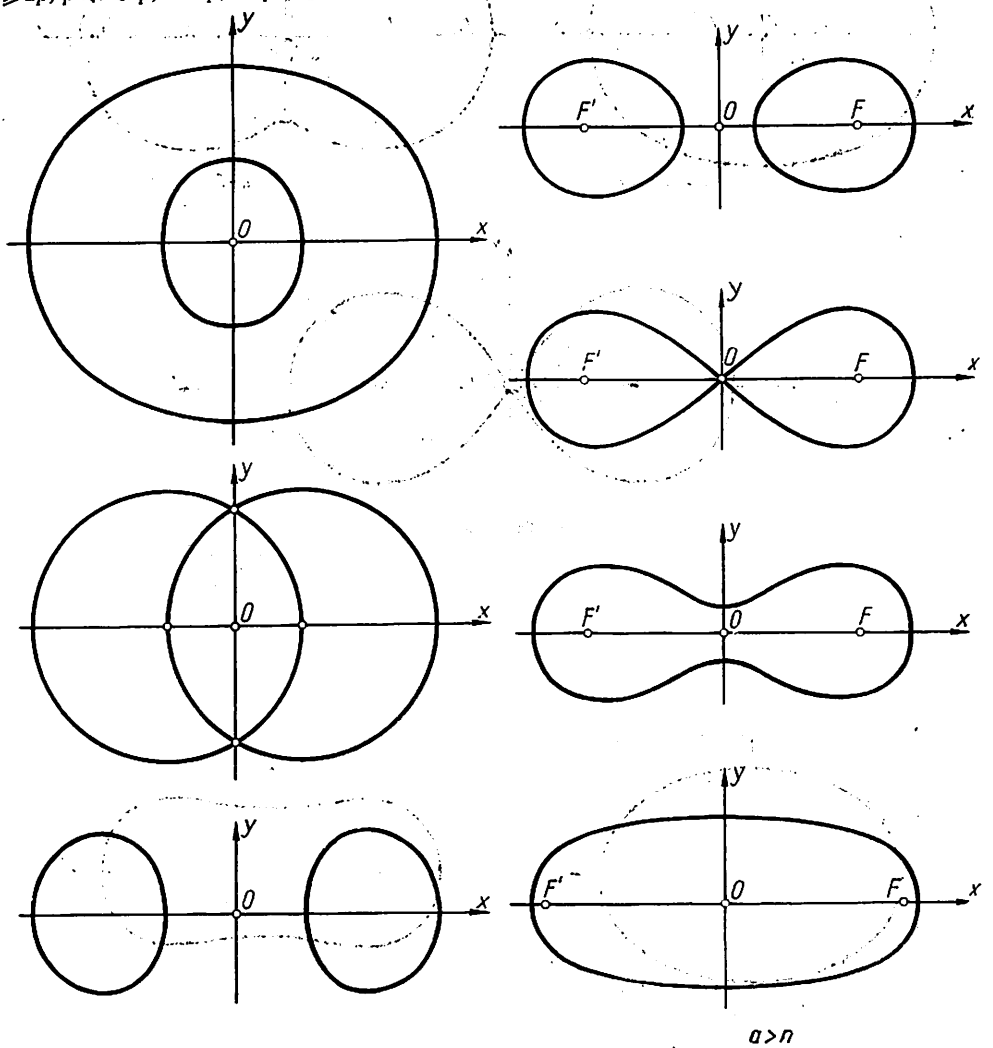


Fig. 47a

(18') $$\rho = p(1 + \cos\theta) ; (x^2 + y^2 - px)^2 = p^2(x^2 + y^2) ; x = \frac{2pt^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, y = \frac{4pt^3}{(1 + t^2)^2}.$$

Dacă $a_{11} \neq a_{22}$, $a_{13}a_{23} = 0$, C_4 se numește *spirică*. Cînd $a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$, spirica are o axă de simetrie (fig. 46). Cînd $a_{13} = a_{23} = 0$, spiricele au două axe de simetrie, numite *spiricele lui Perseus* : *locul punctelor P astfel ca*

(19) $$PF^2 \cdot PF' = h\,OP^2 + k \quad (F, F' \text{ — puncte fixe : } \textit{focare}, O \text{ mijlocul lui } FF').$$

Luînd $FF' = 2c$ și $F(c, 0)$, ecuația spiricelor lui Perseus e (fig. 47 a — c)

(19') $$(x^2 + y^2) - (2c^2 + h)x^2 + (2c^2 - h)y^2 = k - c^4.$$

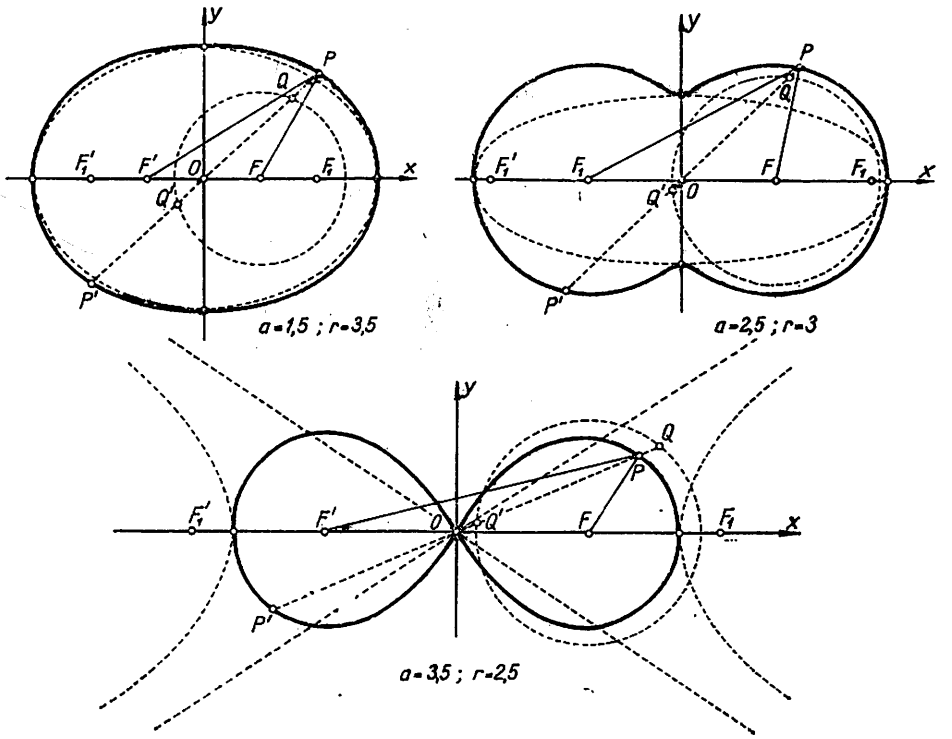


Fig. 47b

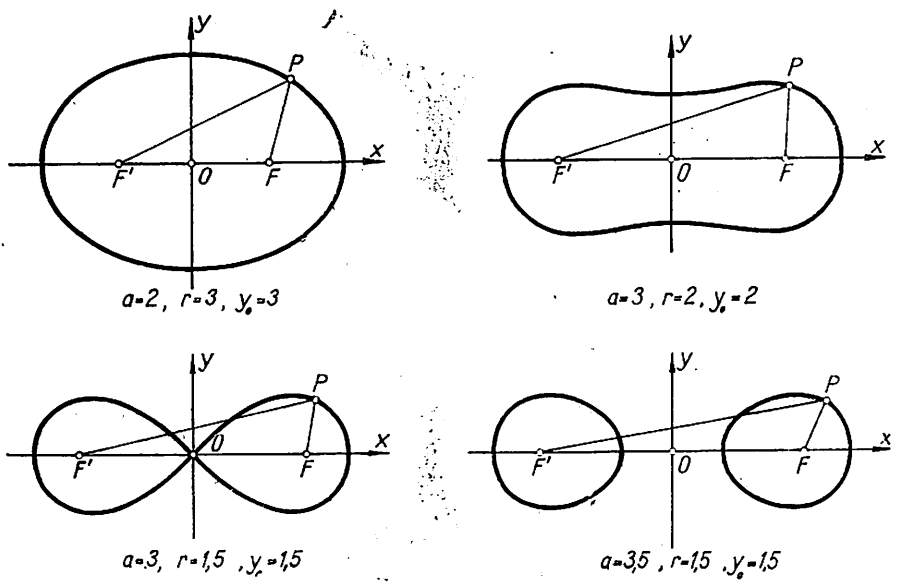


Fig. 47c

Altă deducere: locul punctelor de unde se pot duce la o conică cu centru 2 tangente făcînd un unghi dat $\theta\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$; luînd $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$, găsim:

(19'') $(x^2+y^2)^2-2(A+B+2B\operatorname{ctg}^2\theta)x^2-2(A+B+2A\operatorname{ctg}^2\theta)y^2+(A+B)^2+4AB\operatorname{ctg}^2\theta=0$.

Cînd $k=\left(\frac{1}{2}FF'\right)^4=c^4$, spirica (19') se numește *lemniscata lui Booth* (fig. 47b); cum C_4 e reală numai dacă $h+2c^2>0$, ecuația ei se scrie

(20) $$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+\varepsilon b^2y^2 \quad (a^2=h+2c^2,\ \varepsilon b^2=h-2c^2,\ \varepsilon=\pm1).$$

După cum $\varepsilon=\pm1$, se spune că *lemniscata lui Booth* e *eliptică* ($h\geqslant 2c^2$, degenerînd în *cercurile lui Villarceaux* pentru $h=2c^2$) sau *hiperbolică* ($-2c^2<h<2c^2$); curba e unicursală, căci ($y=tx, \sqrt{b^2t^2+a^2}=bt+u$)

(20') $x=2a^2(u^2+a^2u)/M,\ y=a(a^2+u^2)(a^2-u^2)/M,\ M=u^4+2(2b^2-a^2)u^2+b^4,$

sau ($y=tx, \sqrt{a^2-b^2t^2}=(a+bt)u$)

(20'') $x=2ab^2u(1+u)^2/N,\ y=2a^2bu(1-u^2)/N,\ N=(a^2+b^2)(u^4+1)-2(a^2-b^2)u^2.$

Altă generare: într-o conică cu centrul O și de semiaxe a, b, fie cercul cu centrul Ω în mijlocul distanței focale OF și de rază $a/2$; e locul punctelor P și P' astfel încît $OP=OP'=QQ'$, unde Q și Q' sînt punctele de intersecție ale cercului cu o dreaptă prin O. Reformulare: fie cercul $C(\Omega;r)$ iar $O\Omega=d$; e locul punctelor P și P' de pe dreapta variabilă prin O astfel ca $OP=OP'=QQ'$, unde Q și Q' sînt punctele de intersecție ale dreptei cu cercul: $(x^2+y^2)^2=4[r^2x^2+(r^2-d^2)y^2]$, fiind eliptică sau hiperbolică, după cum O e interior sau exterior lui C. Cînd $h=0$ ($a_{11}+a_{22}=0$), spiricele (19') se numesc *ovalele lui Cassini*; forma curbei depinde de a și c ($k=a^4$): $a\geqslant c\sqrt{2}, c<a<c\sqrt{2}$, $a=c$, $a<c$ (fig. 47c). Pentru $a=\frac{1}{2}FF'$, deci $a=c$, ovalul are ecuația

(21) $$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2);\ \rho^2=2a^2\cos 2\theta;\ x=\frac{2a^2t(t^2+2a^2)}{t^4+4a^4},\ y=\frac{2a^2t(t^2-2a^2)}{t^4+4a^4}$$

și se numește *lemniscata lui Bernoulli*; ecuația ei se mai scrie

(21') $$(x^2+y^2)^2=4a^2xy;\ \rho^2=2a^2\sin 2\theta;\ x=2at/(1+t^4),\ y=2at^3/(1+t^4),$$

luînd bisectoarele axelor de coordonate ca axe. *Obs.* E caz particular de lemniscată Booth: cînd conica e o hiperbolă echilateră. Alte generări (independente de definiția comună a ovalelor lui Cassini):

— În pătratul OAA_1C se înscrie un cerc Γ, care se taie cu o dreaptă variabilă d dusă prin O; locul punctelor comune lui d cu cercul de centru O și raza egală cu coarda determinată de Γ pe d. Punctele G, H, I, K, în care ordonata curbei are valori extreme, sînt situate pe cercul care are ca diametru segmentul focal F_1F_2.

— Curba pe care trebuie să se producă mișcarea unei particule grele într-un plan vertical, pornind din O cu viteză inițială nulă, pentru ca să ajungă într-un punct A în același timp în care ar ajunge mișcîndu-se pe segmentul OA (centrul lemniscatei în O, unghiul axei cu verticala e de 45°).

— Aceeași problemă pentru o forță centrală proporțională cu distanța.

Cînd, în (16), η e un polinom omogen în x, y, printr-o rotație avem $\eta=h(y^2-m^2x^2)$. Intersectînd pe C_4 cu cercul Γ: $x^2+y^2+t(y-mx)=0$ obținem $y=(mt^2+2\alpha t-mh)/(t^2-\beta t+h)$; înlocuind în ecuația lui Γ, rezultă pentru C_4:

$$x=\frac{2t(mh-\alpha t-m\beta t)(t^2-2\beta t+h)}{(t^2-2\beta t+h)^2+(mt^2+2\alpha t-mh)^2},\quad y=\frac{2t(mh-\alpha t-m\beta t)(mt^2+2\alpha t-mh)}{(t^2-2\beta t+h)^2+(mt^2+2\alpha t-mh)^2}.$$

Observăm că, pentru $t'=0$ și $t''=mh/(\alpha+m\beta)$, avem $x=y=0$; deci: *originea e un punct multiplu (punct dublu izolat, nodal sau cuspidal*, după cum conica degenerată $\eta=0$ e de gen eliptic, hiperbolic sau parabolic). Dealtfel: *O cuartică bicirculară avînd un punct dublu (la distanță finită) e unicursală. Obs.* a) Dacă O e un centru de simetrie pentru (16), iar $\eta=0$ e degenerată în două drepte perpendiculare (în O), atunci C_4 e o lemniscată Bernoulli; și reciproc. b) Orice oval al lui Descartes care are un punct dublu e unmelc Pascal. c) Singurele spirice cu punct dublu sînt lemniscatele lui Booth.

9 Se consideră două puncte fixe O, Ω și o curbă C. Locul Γ al punctului P de intersecție al secantei $M\Omega$ cu perpendiculara din O pe OM, cînd M descrie pe C, se numește *cisoida lui C în raport cu polul O și punctul Ω*. *Apl.* Cazul cînd C e o dreaptă sau un cerc.

R. Dreapta d, determinată de O și Ω, se numește *baza* cisoidei. Fie (fig. 48); deci $\Omega(0, l)$, $C: x = f(t)$, $y = g(t)$, $M\Omega: \frac{x}{f} = \frac{y-l}{g-l}$, $OP: y = -fx/g$ și

$$\Gamma: x = -lfg/(f^2 + g^2 - lg),\ y = lf^2/(f^2 + g^2 - lg). \tag{22}$$

Consecință: Dacă C e unicursală, atunci și cisoida ei Γ e unicursală.

Γ trece prin O și Ω cînd t e rădăcină a lui $f = 0$, respectiv $g = 0$; deci, dacă una din aceste ecuații are p rădăcini distincte, punctul corespunzător e multiplu (de ordinul p). *Obs.* Dacă $l = O\Omega$ e finit, *cisoida* Γ se zice *oblică*; cînd Ω e punctul de la infinit al lui d, se spune că *cisoida* Γ e *dreaptă*. Fie *cisoida dreaptă a lui C*; cum $M\Omega \| d$, atunci

$$x = f,\ y = -f^2/g \text{ sau } \rho_1 = \rho\left(\theta_1 + \frac{3\pi}{2}\right) \sin\theta_1/\cos\theta_1, \tag{23}$$

cînd $l \to \infty$ în (22), respectiv (fig. 49) $OP' = \rho_1 \cos\theta_1 = \rho\cos\theta$, $\theta_1 + (2\pi - \theta) = \pi/2$. *Apl.* Presupunem că C e dreapta

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\sin\alpha;\ y - y_0 = m(x - x_0) \text{ cu } m = \operatorname{tg}\alpha. \tag{24}$$

Rezultă: *Cisoida oblică a unei drepte e o conică de gen eliptic, hiperbolic sau parabolic*, după cum $\Delta = \left[x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha - \frac{l}{2}(\cos\alpha + 1)\right]\cdot\left[x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha - \frac{l}{2}(\cos\alpha - 1)\right] \gtreqless 0$, trecînd prin O ($t = -x_0/\cos\alpha$) și Ω ($t = -y_0/\sin\alpha$). *Obs.* Pentru o direcție dată, dreptele $\Delta = 0$ taie cel puțin o axă de coordonate, determinînd un anumit segment; dacă o dreaptă paralelă cu

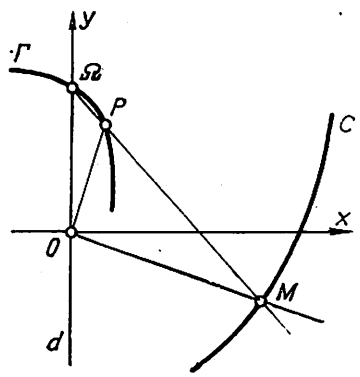


Fig. 48

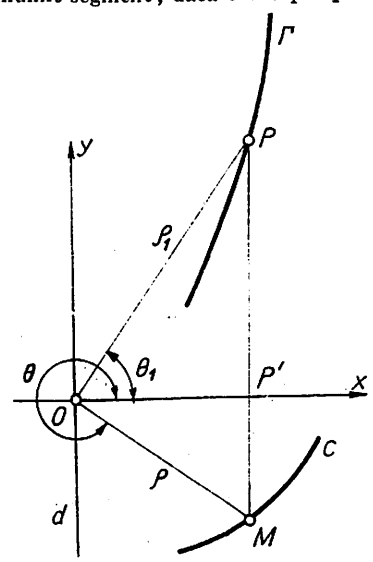


Fig. 49

direcția dată taie acest segment în interior, într-o extremitate sau în interior, atunci $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ sau $\Delta < 0$. Astfel, fie $C: x = a\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, x_0 = a, y_0 = 0\right)$; deci $\Gamma: ax^2 + xy + ay^2 - ay = 0$, fiind (fig. 50) o elipsă $\left(a < -\frac{l}{2} \text{ sau } \frac{l}{2} < a\right)$, parabolă $\left(a = \pm\frac{l}{2}\right)$ sau hiperbolă $\left(-\frac{l}{2} < a < \frac{l}{2}\right)$, căci $\Delta = (a - l/2)(a + l/2)$.

Cisoida dreaptă a unei drepte e o conică de gen parabolic sau hiperbolic, după cum dreapta e perpendiculară sau nu pe baza cisoidei (fig. 51); căci, cu (24) în (23) și cu $m = \operatorname{tg}\alpha$, $\Gamma : x^2 + mxy + (y_0 - mx_0)y = 0$ și $\Delta = -\frac{1}{4}m^2 \leqslant 0$.

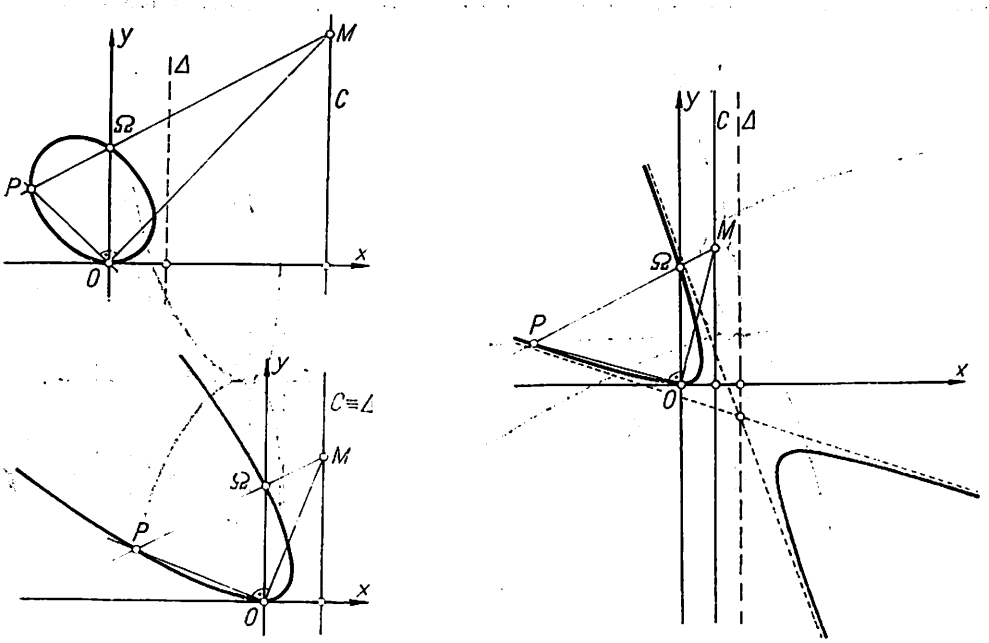


Fig. 50

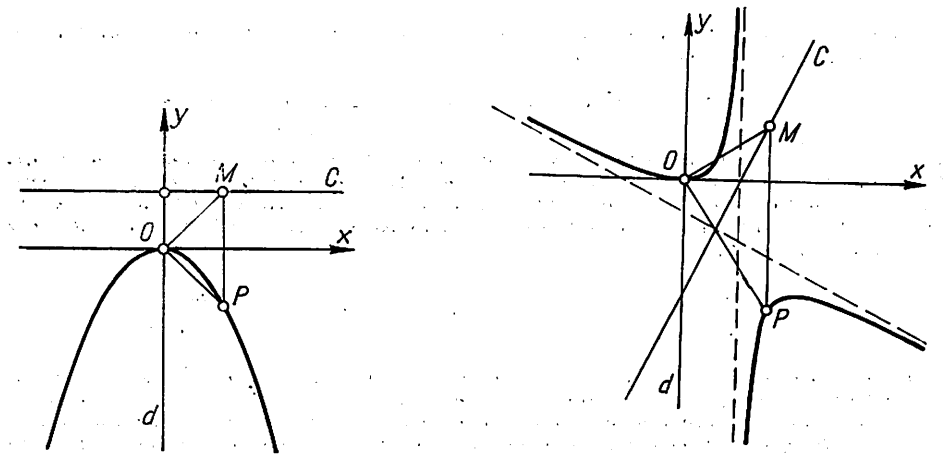


Fig. 51

Să considerăm un cerc de centru $C(a, b)$ și rază R ($c^2 = a^2 + b^2 - R^2$):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;\ x = a + \frac{R(t^2-1)}{t^2+1},\ y = b + \frac{2Rt}{t^2+1};\ \rho^2 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)\rho + c^2 = 0 \tag{25}$$

Cu (25) în (22), respectiv în (23), obținem ecuația cisoidei oblice, respectiv cisoidei drepte, a cercului C. Forma curbei Γ depinde de poziția centrului C față de baza d și polul O, de raza R și intervalul l. De exemplu, fie $b = 0$; atunci Γ are forma din fig. 52 dacă d e secantă cercului, forma din fig. 53 dacă d e tangentă (în O) cercului, respectiv forma din fig. 54 cînd d e exterioară cercului. Prezintă interes al doilea caz: *cisoida (oblică, dreaptă) a unui cerc tangent în polul O bazei d*, care se numește — simplu — *cisoidă (oblică, dreaptă)*. *Cisoida oblică* are ecuația

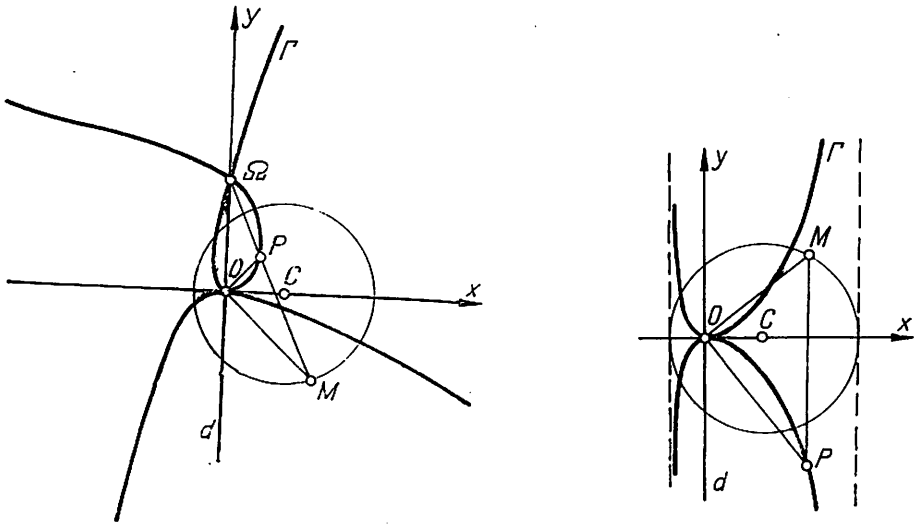


Fig. 52

$$(26)\qquad x = \frac{2alt^2}{(2at + l)(t^2 + 1)},\quad y = \frac{2alt^3}{(2at + l)(t^2 + 1)};\quad (lx + 2ay)(x^2 + y^2) - 2aly^2 = 0.$$

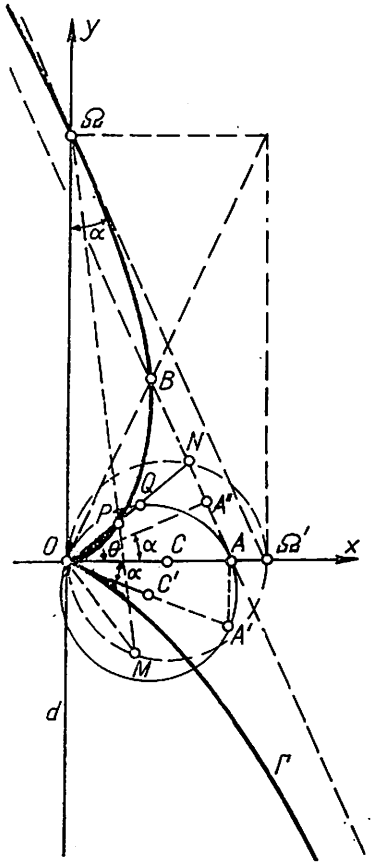
Curba e simplă și cu tangentă continuă; nu e netedă, căci $x'(0) = y'(0) = 0$, *originea* fiind *punct singular*; e o *cubică unicursală*. Avem

$$(26')\qquad \rho = 2al\sin^2\theta/(l\cos\theta + 2a\sin\theta) \text{ sau } \rho = 2r\sin^2\theta/\cos(\theta - \alpha),$$

unde $\alpha = \widehat{OC, OC'}$, C' fiind centrul cercului de rază r trecînd prin O și tangent în A dreptei AB (asimptotă); căci $O\Omega' = OA'/\cos\alpha = 2r/\cos\alpha = 2a$, $O\Omega = O\Omega'/\operatorname{tg}\alpha = 2r/\sin\alpha = l$. *Obs.* În cercul C', avem $NQ.\,NO = AN^2$. Însă $OA = 2r\cos\alpha$, $OA'' = OA\cos\alpha = ON\cos(\theta - \alpha)$, $NA = NA'' + A''A = OA''[\operatorname{tg}(\theta - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha] = ON\sin\theta/\cos\alpha$; deci $QN = OP$. *Cisoida dreaptă* (sinonim: *cisoida lui Diocles*):

$$(27)\qquad x = \frac{2at^2}{1 + t^2},\quad y = \frac{2at^3}{1 + t^2};\quad (x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0;\quad \rho = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

tangenta în A la cerc fiind asimptotă ($\alpha = 0$, deci $C' = C$, $A = \Omega'$ și $r = a$). *Obs.* $QN = AN\sin\theta = OA\operatorname{tg}\theta\sin\theta$; deci $QN = OP$. Atunci: Fie două puncte O și A pe un cerc (de centru C' și rază r), Q fiind punctul curent pe cerc; secanta OQ taie tangenta în A la cerc în N. Locul lui P de pe OQ astfel ca $OP = QN$ e o cisoidă dreaptă sau oblică, după cum A e sau nu opus diametral lui O. Cisoida dreaptă a fost descoperită de geometrul grec *Diocles* (sec. II î.e.n.), în problema dublării cubului: Dreapta $AP: t^3x + y - 2at^3 = 0$ taie pe Oy în $N'(0, 2at^3)$. Deoarece $N(a, at)$, avem $ON' = 2at^3$, $AN = at$, adică $AN = \sqrt[3]{ON'}/2a$. Luînd $ON' = 2\,OA = 4a$, atunci $AN = a\sqrt[3]{2}$ e latura unui cub al cărui volum e egal cu dublul volumului de latură $OC = a$, N construindu-se cu ajutorul cisoidei. Numind *curbă duplicatoare* o curbă care intervine în soluția problemei dublării cubului, rezultă: *Cisoida lui Diocles e o curbă duplicatoare. Obs.* a) Punctul de intersecție al perpendicularei din Q pe OA cu perpendiculara din C pe OQ descrie o cisoidă. b) Altă generare: Fie C un cerc dat și A un punct


y
Ω
α
X
B
N
Q
P
A''
O
θ
α
C
A
Ω'
x
α
C'
X
A'
M
d
Γ

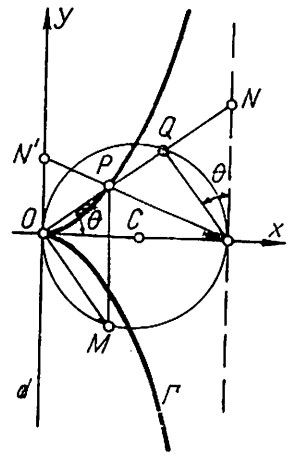
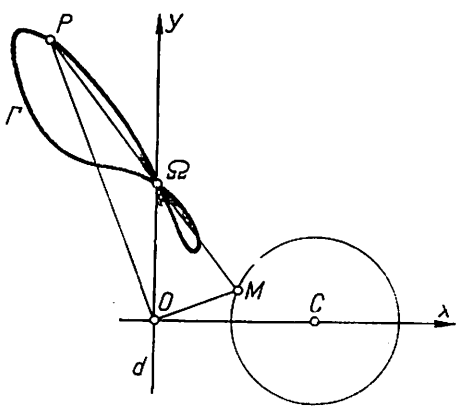

y
N
N'
Q
P
θ
O
θ
C
x
M
d
Γ

Fig. 53


P
y
Γ
Ω
M
O
C
λ
d

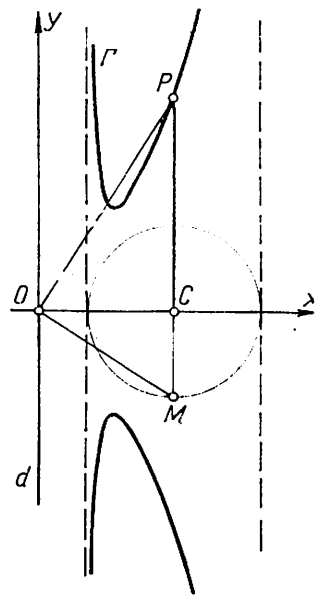

y
Γ
P
O
C
λ
M
d

Fig. 54

fix pe C. Se duc cercuri C' tangente exterior în A la C. Locul punctului de contact cu C' al tangentelor comune lui C şi C' e o cisoidă cu vîrful în A. c) Cisoida dreaptă poate fi construită printr-un dispozitiv mecanic: Vîrful ascuţit P al unui echer PQR se mişcă pe o dreaptă fixă d, astfel încît cateta QR să treacă printr-un punct fix S a cărui distanţă de d să fie egală cu lungimea celeilalte catete QP; mijlocul M al catetei QP descrie o cisoidă.

10 Să se afle *inversa unei curbe* C în raport cu un punct fix Ω şi de modul k, adică locul Γ al transformatelor punctelor unei curbe C printr-o inversiune de pol Ω şi modul k. *Apl.* Să se afle inversa: a) cisoidei în raport cu punctul ei singular; b) unei curbe de putere constantă, cînd polul de inversiune nu e situat pe curbă; c) conicei $a^2x^2 + \varepsilon b^2y^2 = \alpha^4$ ($\varepsilon = \pm 1$) în raport cu centrul ei şi de modul $k = \alpha$.

R. Printr-o inversiune de pol Ω (a, b) şi modul k se trece de la $P(x, y)$ la $P'(X, Y)$ pe aceeaşi rază ΩP, prin condiţia

(28) $\Omega P \cdot \Omega P' = k^2$, adică $X - a = \dfrac{k^2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $Y - b = \dfrac{k^2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Fie curba C de ecuaţii

(29) $x = x(t), y = y(t); F(x, y) = 0.$

Introducînd (29_1) în (28), respectiv (28) în (29_2), obţinem ecuaţia inversei Γ. *Obs.* Calculele se simplifică dacă $\Omega \equiv 0$ (posibil prin translaţia $0\overline{\Omega}$). Dacă C are ecuaţia (4) iar $\Omega \equiv 0$, inversa Γ are ecuaţia polară $\rho_1 = k^2/\rho(\theta)$. *Obs.* Γ trece prin Ω. *Apl.* a) Punctul singular fiind O, inversa lui (26_2) e parabola $y^2 = k^2(lx + 2ay)/2la$, de parametru $p = k^2/4a$, cu axa paralelă cu Ox şi cu vîrful $V(-ak^2/2l^2, k^2/2)$; V se află pe paralela prin O la $C\Omega$. Dacă cisoida e dreaptă ($l \to \infty$), atunci $V \equiv O$. b) O curbă de putere constantă C_{4m-2}. Cînd C_4 e bicirculară, inversa e tot o cuartică bicirculară. *Obs.* Transformata hiperbolei echilatere $x^2 - y^2 = a^2$ într-o inversiune (de cerc fundamental $x^2 + y^2 = a^2$) e o lemniscată; inversa lemniscatei în raport cu unul din focare e un melc Pascal. c) Lemniscata lui Booth (20).

11 Se consideră un punct O şi o curbă C; fie M punctul curent al lui C şi P un punct din plan astfel ca $MP = l$, $\sphericalangle OMP = \pi - \varepsilon\varphi$ ($\varepsilon = \pm 1$). Locul lui P, cînd M descrie *curba directoare* (*baza*) C, se numeşte *concoida lui C în raport cu polul O, de interval l şi unghi* φ. *Apl.* a) Să se arate că concoidele unei drepte sînt curbe unicursale. b) Să se afle concoidele unui cerc.

R. Fie $C: x = f(t), y = g(t)$. Avem (fig. 55): $x = f \pm l\cos(\theta - \varepsilon\varphi)$, $y = g \pm l\sin(\theta - \varepsilon\varphi)$; însă $\operatorname{tg}\theta = f/g$, încît concoida Γ are ecuaţiile parametrice ($N = \sqrt{f^2 + g^2}$)

(30) $x = f \pm l(f\cos\varphi - \varepsilon g\sin\varphi)/N$, $y = g \pm l(g\cos\varphi + \varepsilon f\sin\varphi)/N$.

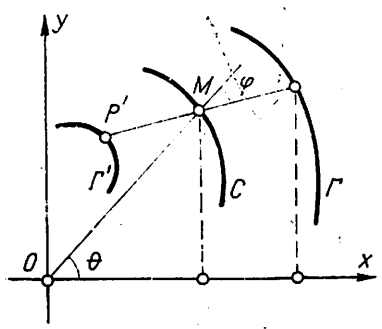


Fig. 55

Obs. Dacă $\varphi \neq 0$ (sau $\varphi \neq \pi$), *concoida* se zice *oblică*; în cazul $\varphi = 0$ (sau $\varphi = \pi$), se spune *concoidă ordinară* sau, simplu, *concoidă* (în ambele cazuri nu se mai specifică unghiul φ, subînţelegîndu-se). Dacă C are ecuaţia (4), atunci

(30′) Γ: $x = \rho(\theta)\cos\theta \pm l\cos(\theta - \varepsilon\varphi)$, $y = \rho(\theta)\sin\theta \pm l\sin(\theta - \varepsilon\varphi)$;

Γ e o curbă unicursală, dacă $\rho(\theta)$ e o funcţie raţională de $\sin\theta$ şi $\cos\theta$. Deci *concoida ordinară are ecuaţia* polară

(30″) $\rho = \rho(\theta) \pm l.$

Apl. a) Dacă C e o dreaptă d, cînd putem avea $d \parallel Ox$, atunci

(31) $x = a$ sau $\rho = a/\cos\theta$, cu $d \cap Ox = A(a, 0)$.

Concoida dreptei d (sinonim: *concoida lui Nicomede*) e cuartica circulară unicursală (căci $\rho(\theta)$ e funcție rațională de cos θ) de ecuație

$$\rho = a/\cos\theta \pm l,\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2];\quad (x^2 + y^2)(x - a)^2 = l^2x^2; \tag{32}$$

$$x = [a + l + (a - l)t^2]/(1 + t^2),\ y = 2t[a + l + (a - l)t^2]/(1 - t^4),$$

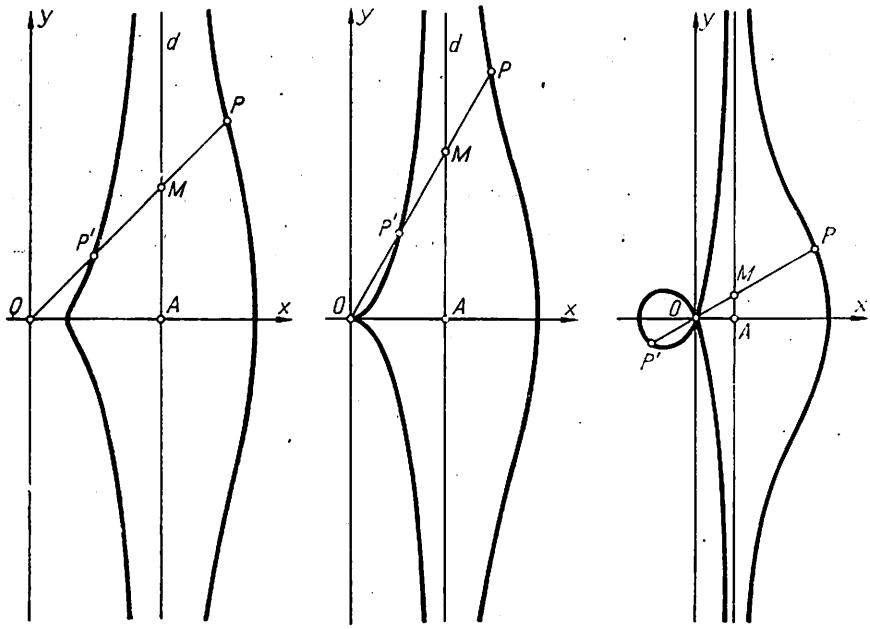


Fig. 56

fiind simetrică față de Ox; rezolvînd ecuația (32_2) în raport cu y, rezultă că Γ are puncte reale numai pentru $x \in [a - l, a + l]$: curba are 2 ramuri, una cuprinsă între dreptele $x = a - l$, $x = a$ și alta între dreptele $x = a$, $x = a + l$, forma curbei depinzînd de valorile lui a și l: $l < a$, $l = a$, $l > a$ (fig. 56). Dacă se ia d ca axă Oy, ecuația concoidei e

$$x^2y^2 = (x + a)^2(l^2 - x^2). \tag{32'}$$

Altă generare: Dacă M e un punct mobil pe un cerc de centru O, dreapta OM taie o dreaptă fixă d în N; e locul mijlocului P al lui MN. *Obs.* a_1) Geometrul grec *Nicomede* (sec. II î.e.n.) a descoperit curba în problema trisecțiunii unui unghi, folosindu-se de ramura cea mai îndepărtată de pol: Fie $\sphericalangle AOB = \theta$ (fig. 57); luînd $AB \perp OA$, considerăm concoida dreptei AB față de polul O, cu $l = 2OB$. Paralela prin B la OA taie în P ramura îndepărtată a concoidei, iar $OP \cap AB = M$. Din proprietatea concoidei: $MP = 2OB$. Dacă N e mijlocul lui MO și triunghiul MBP fiind dreptunghic (în B), atunci $MN = NP = NB = OB$; deci triunghiul OBN și triunghiul BNP sînt isoscele, încît $\overset{\frown}{NBP} = \overset{\frown}{BPN}$ și $\overset{\frown}{BON} = \overset{\frown}{ONB}$. Însă $\overset{\frown}{ONB} = 2\overset{\frown}{BPN}$ (unghi exterior triunghiului BNP) și $\overset{\frown}{BPN} = \overset{\frown}{AOM}$; rezultă $\overset{\frown}{BOM} = 2\theta$, adică $\overset{\frown}{AOM} = \theta/3$. Numind *trisecantă* (sinonim: *trisectoare*) o curbă care intervine în soluția problemei trisecțiunii unui unghi, rezultă: *Concoida lui Nicomede e o trisecantă.* a_2) Concoidele oblice ale lui d se obțin ținînd seama de (31) în (30'). b) Fie cercul (25) cu $b = 0$; deci

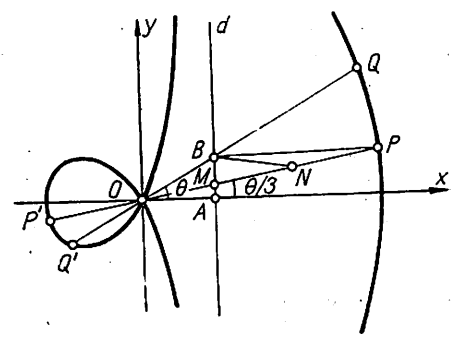


Fig. 57

$$\rho = a\cos\theta + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\theta}. \tag{33}$$

După (30′) și probl. 7, rezultă : *Concoidele cercului sînt sexticele*

(34) $$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + l^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + y^2 - ax)^2,$$

dacă polul O e interior sau exterior cercului ; dacă O e pe cerc, avem

$$(x^2 + y^2 - l^2)[(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - l^2(x^2 + y^2)] = 0,$$

adică : *concoida cercului față de un punct al său e melcul lui Pascal. Obs.* b_1) Forma lui Γ depinde de a, R și l. b_2) Concoidele oblice ale unui cerc se obțin ținînd seama de (33) în (30′). Cînd $O \in C$, o concoidă oblică a lui C e o concoidă ordinară față de alt punct al lui C ; căci, OM și MP făcînd un unghi constant φ și $MP = l$, MP trece prin punctul fix $O' \in C$, P descriind o concoidă ordinară de pol O'.

12 Se numește *spirală* locul punctelor a căror rază vectoare ρ variază monoton cu creșterea unghiului polar θ. Să se arate ce fel de curbă (algebrică, transcendentă) e o spirală. *Ex.* de spirale : a) $\rho = \frac{3\pi + \theta}{\pi - \theta}$; b) $x = ae^{-t}(\cos t - \sin t)$, $y = ae^{-t}(\cos t + \sin t)$; c) $\rho = a^{\theta - \pi/2}$.

R. Se numește *spirală algebrică* o curbă dată de ecuația polară

(35) $$F(\rho, \theta) = 0 \text{ cu } F \text{ un polinom în } \rho \text{ și } \theta.$$

O spirală algebrică e o curbă transcendentă ; căci ecuația carteziană $F(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\, y/x) = 0$, cu condiția ca $\sin(\operatorname{arc\,tg}\, y/x) = \pm\, x/\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos(\operatorname{arc\,tg}\, y/x) = \pm\, y/\sqrt{x^2+y^2}$ (radicalii cu același semn), cînd

(35′) $$(x^2 + y^2)\Phi^2(x^2 + y^2, \operatorname{arc\,tg}\, y/x) = \Psi^2(x^2 + y^2, \operatorname{arc\,tg}\, y/x) \text{ cu } \Phi, \Psi \text{ — polinoame}$$

Spirale algebrice remarcabile :

(36) *Spirala lui Arhimede:* $\rho = a\theta$ $(a>0, \theta \in [0, +\infty)$ cînd $\rho \geqslant 0)$;

e locul descris de un punct P ce se deplasează uniform pe o dreaptă d care se rotește uniform în jurul unui punct O al său (dacă $P = O$ la momentul inițial $t = 0$, ω e viteza unghiulară a lui d, iar v e viteza lui P pe d, atunci $\theta = \omega t$, $\rho = vt$). Graficul (fig. 58) taie axele de coordonate cînd θ ia valorile $0, \pi/2, 3\pi/2, \ldots, k\pi/2, \ldots$, crescînd de la 0 la $+\infty$; distanțele dintre două spire succesive măsurate pe raza vectoare sînt egale. *Obs.* α) Se poate considera domeniul de definiție $I = (-\infty, +\infty)$, obținîndu-se două ramuri simetrice față de Oy și trecînd prin aceleași puncte de pe Oy (puncte duble pentru spirală). β) Se disting două cazuri, după cum $a>0$ sau $a<0$, obținîndu-se două spirale simetrice în raport cu Ox. γ) Curba

(36′) $$\rho = a\theta \pm b$$

e concoida spiralei lui Arhimede și e congruentă cu spirala dată (prin rotația axei polare cu unghiul $\omega = \theta \pm b/a$) ; reciproc : dacă concoida unei curbe C coincide cu C, C e o spirală a lui Arhimede.

(37) *Spirala lui Fermat:* $\rho^2 = a^2\theta$;

curba e simetrică în raport cu polul O (fig. 59). Spirele ei se îndesesc cînd ρ crește : distanța între spire consecutive, măsurată pe raza vectoare, descrescînd $(a(\sqrt{\theta + 2\pi} - \sqrt{\theta}) = 2a\pi/(\sqrt{\theta + 2\pi} + \sqrt{\theta}) \to 0$ cînd $\rho \to \infty)$.

(38) *Spirala lui Galilei:* $\rho = a - b\theta^2$;

curba e simetrică în raport cu axa polară (fig. 60), pe care admite punctele duble $\rho = a - bk^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Curba intervine în problema mișcării unei particule în cădere liberă către centrul Pămîntului, ținînd seama de rotația uniformă a Pămîntului în jurul axei polilor ; proiecția ortogonală pe planul ecuatorial a traiectoriei e (38).

39) *Spirala hiperbolică:* $\rho\theta = a$ $(a > 0, \theta \in (0, +\infty)$ cînd $\rho \geqslant 0)$;

e locul extremităților arcelor egale, de lungime dată a, duse pe cercuri concentrice de centru O din punctele de intersecție ale acestor cercuri cu o dreaptă fixă d ce trece prin O. Luînd $d = Ox$, fie $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ intersecția cercurilor cu d, iar P_n punctele de pe cercurile corespunzătoare astfel încît (fig. 61) $A_nP_n = a$; deci $\rho_n\theta_n = a$. Deoarece $\lim \rho(\theta) = 0$, curba e formată dintr-o infinitate de spire în jurul polului, de care punctele curbei se apropie progresiv ; *polul O* e un *punct singular*, numit *punct asimptotic*. E inversa spiralei Arhimede.

(40) *Spirala parabolică:* $(\rho - a)^2 = 2ap\theta$.

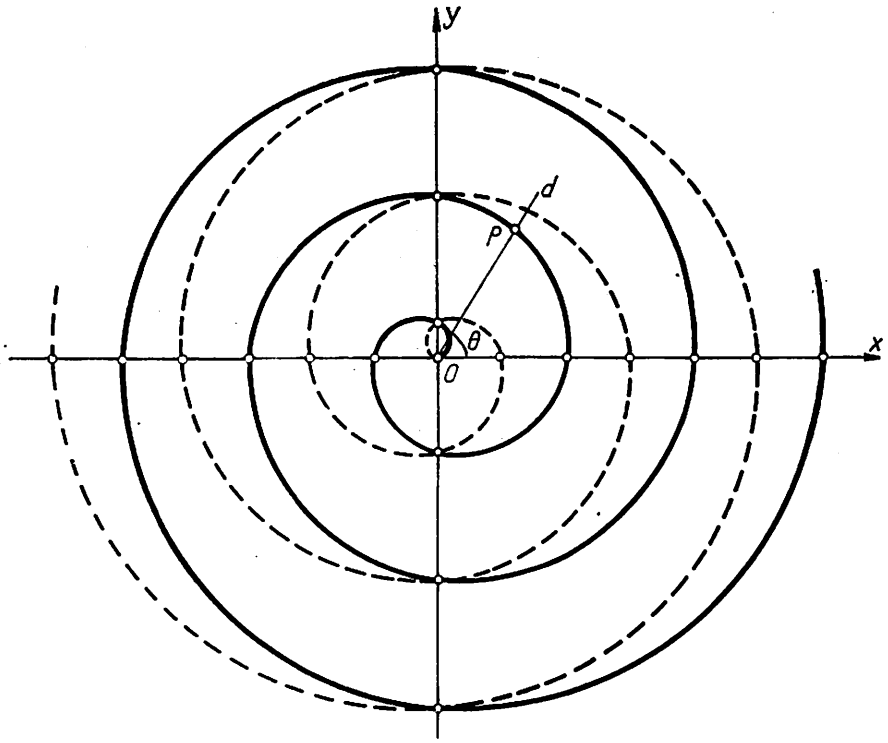


Fig. 58

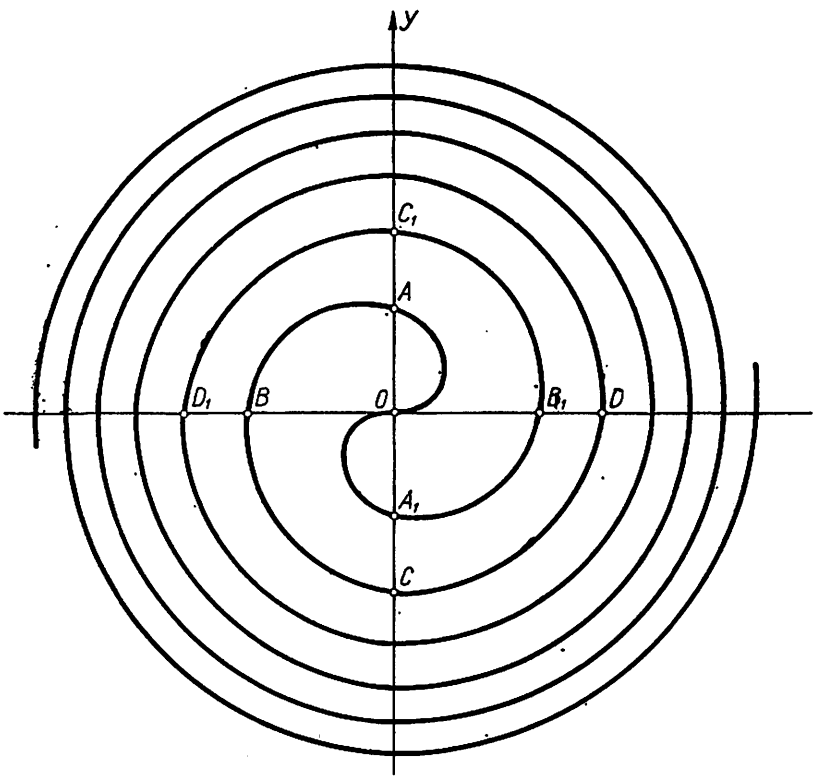


Fig. 59

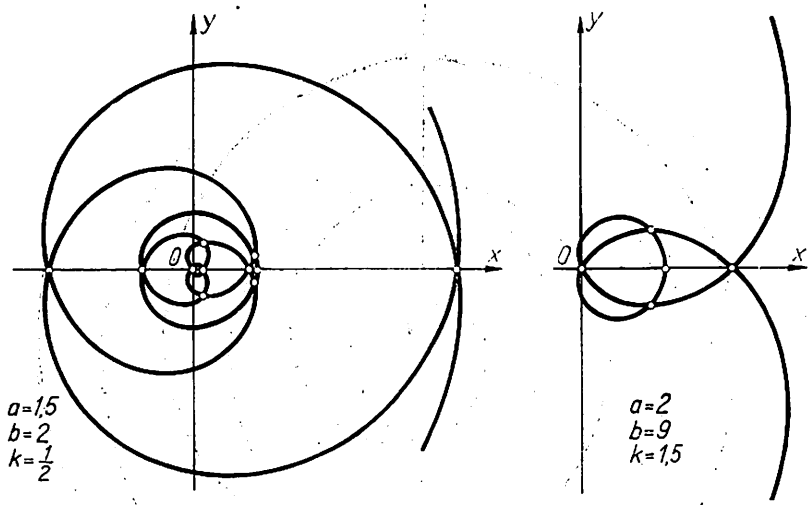


Fig. 60

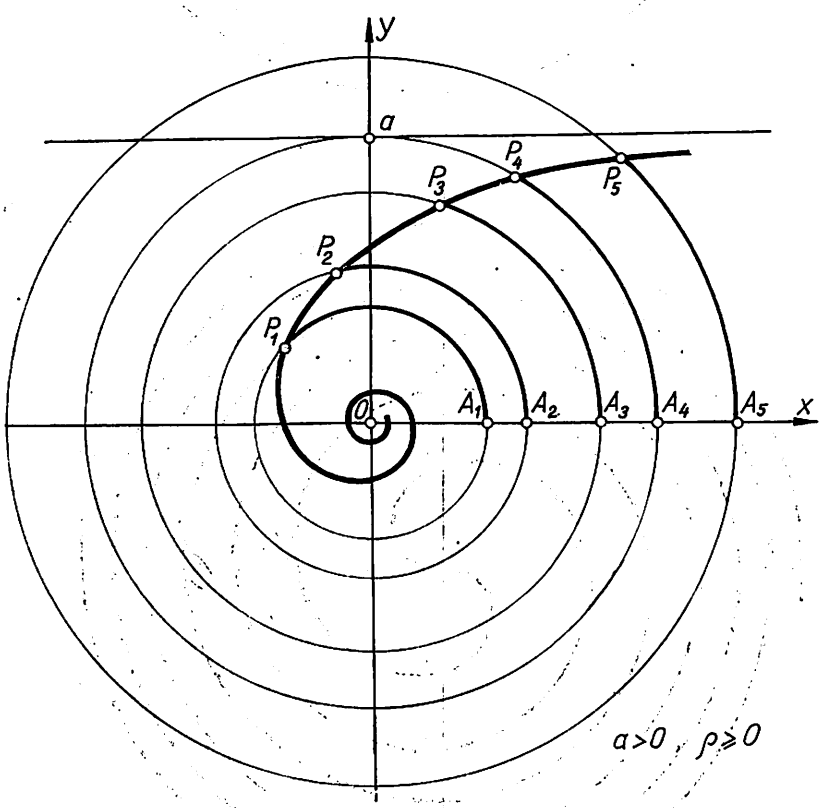


Fig. 61

Curba e formată din două ramuri: $ABC\ldots$: $\rho = a + \sqrt{2ap\theta}$ și $AODEF\ldots$: $\rho = a - \sqrt{2ap\theta}$ (fig. 62), care sînt, respectiv, concoidele spiralelor (ramuri ale aceleiași spirale Fermat) $\rho = \pm \sqrt{2ap\,\theta}$.

(41) *Spirala Lituus* (în latină: lituus = *ctrja*): $\rho^2\theta = a^2$;

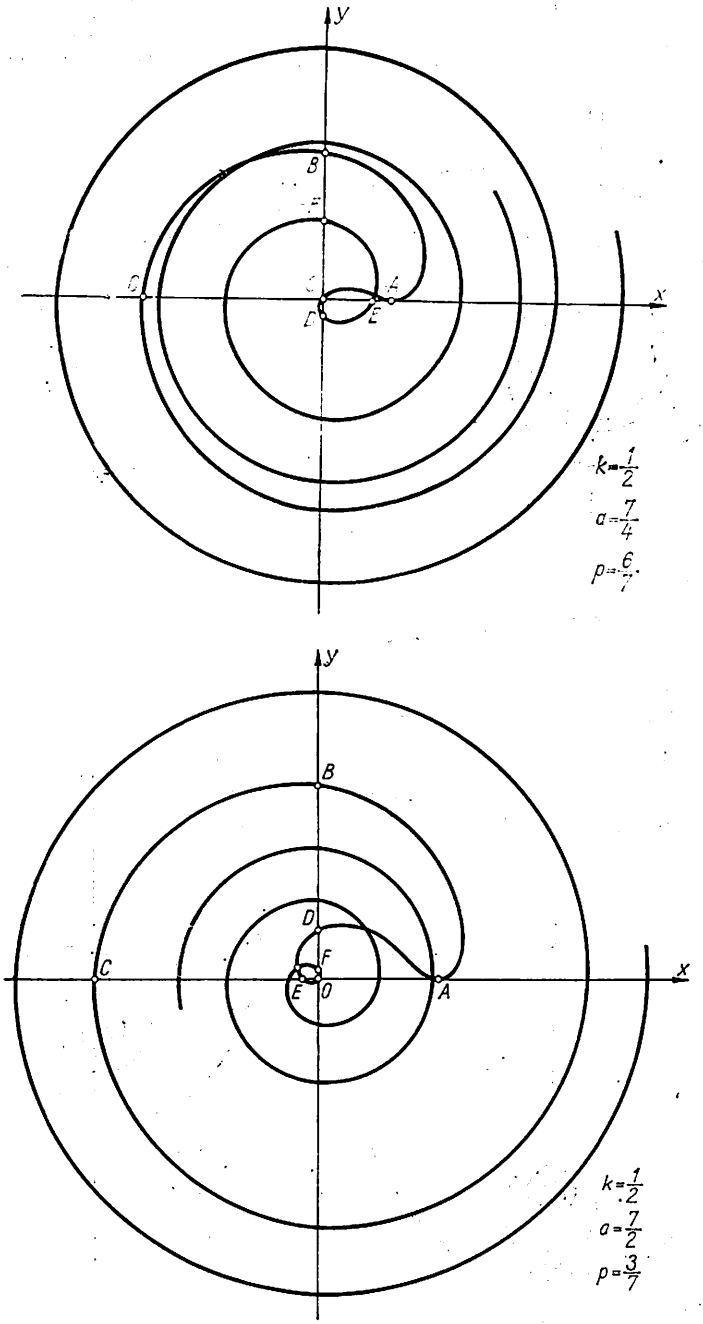


Fig. 62

e locul punctului P care se mişcă astfel încît aria sectorului circular OPP', aparţinînd cercului de rază OP şi corespunzînd unghiului la centru $\widehat{xOP} = \theta$, să aibă o valoare constantă (fig. 63).

De asemenea, sînt *curbe transcendente* următoarele spirale:

(42) *Spirala hiperbolică generală*: $\rho = a\theta^{-p}$ (p număr real pozitiv).

Polul O e punct singular. Dacă $p = m/n$ (m, n numere naturale, fără divizori comuni), curba e o *spirală algebrică*, fiind formată din două ramuri egale, simetrice faţă de Ox pentru m par şi

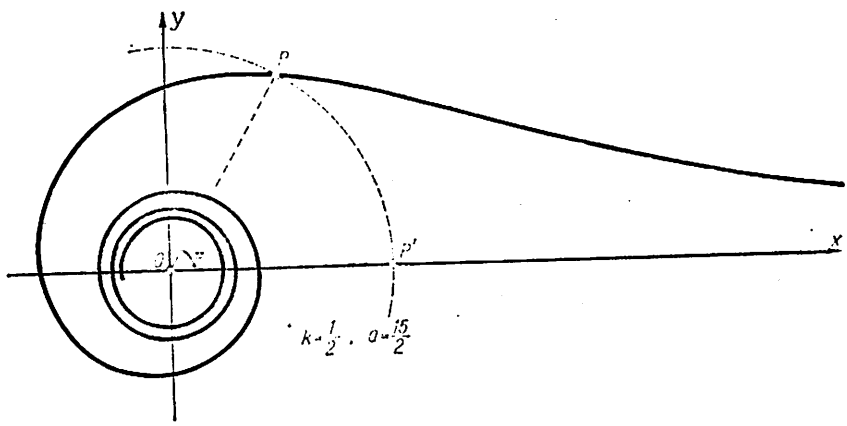


Fig. 63

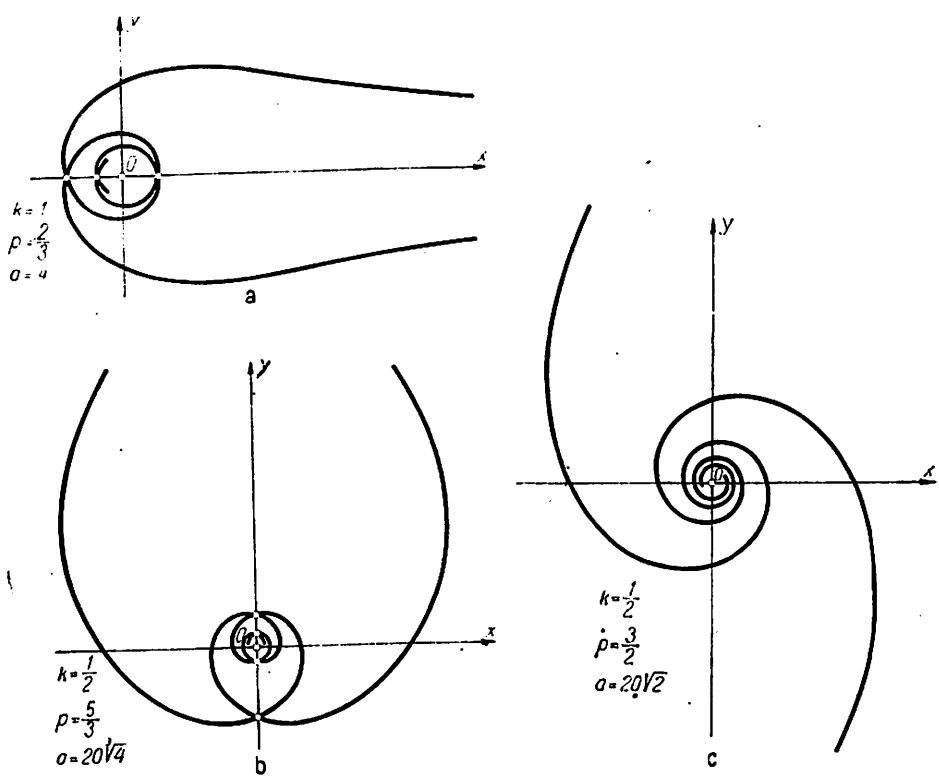


Fig. 64

n impar, simetrice față de Oy pentru m și n impare, sau simetrice în raport cu polul O pentru m impar și n par (fig. 64). Dacă p e număr irațional, curba e formată dintr-o singură ramură. Se zic *spirale elicoidale hiperbolice* concoidele

(42′) $$\rho = a\theta^{-p} + b.$$

(43) *Spirala parabolică generală*: $\rho = a\,\theta^p$ (p număr real pozitiv).

Dacă $p = m/n$ e număr rațional, curba e o *spirală algebrică*, având forma spiralei Arhimede dacă m și n sînt impare, forma spiralei Fermat cînd m e impar și n e par, respectiv e formată din două ramuri asemănătoare ramurii $OABC$ a spiralei Fermat, simetrice față de Ox și cu O punct singular (de tip cuspidal) pentru m par și n impar (fig. 65). Dacă p e număr irațional, una din ramurile ultimului caz nu există. Concoidele

(43′) $$\rho = a\,\theta^p + b$$

se numesc *spirale elicoidale parabolice*.

(44) *Spirala logaritmică*: $\rho = a\,e^{k\theta}$ (a, k — numere reale).

Domeniul de definiție $I = (-\infty, +\infty)$. Pentru $\theta \in [0, +\infty)$ se obține ramura $AB_1A_1B_2\ldots$ formată dintr-o mulțime infinită de spire în jurul lui O, de care punctele curbei se depărtează progresiv, cu $A\,(a, 0)$; pentru $\theta \in (-\infty, 0]$ se obține ramura $AB_1'A_1'B_2'\ldots$ formată dintr-o infinitate de spire în jurul lui O de care punctele curbei se apropie progresiv, O fiind punct asimptotic (fig. 66). Toate spiralele logaritmice (44), corespunzătoare diferitelor valori ale lui a, sînt asemenea și au același punct singular. Inversa ei în raport cu punctul singular e tot o spirală logaritmică având același punct singular (fig. 66b). *Ex.* a) O spirală algebrică; $I = [-3\pi, \pi]$ cu $\rho \geqslant 0$. Taie axele de coordonate cînd $\theta = -3\pi, -5\pi/2, -2\pi, -3\pi/2, -\pi, -\pi/2, 0$ și $\pi/2$ (fig. 67). b) O spirală logaritmică: $\rho = 2ae^{-t}$ (fig. 68). c) O spirală logaritmică (fig. 69), căci $a^x = e^{x \ln a}$; inversa $\rho = 1/(a^{\theta - \pi/2})$ e tot o spirală logaritmică.

13 Se consideră un punct fix O și o curbă C; fie M punctul curent al lui C și P un punct din plan astfel ca segmentul MP să aibă o lungime constantă: $MP = 2a$, iar O se proiectează ortogonal pe MP în mijlocul său. Locul lui P, cînd M descrie *curba directoare* (*baza*) C, se numește *poloida curbei C în raport cu polul O și de modul a. Apl.* Să se afle poloida unei drepte care conține polul, numită *trisectoarea* (sinonim: *trisecanta*) *lui Delanges*.

R. În reperul polar de pol O, fie $C: f(\rho, \theta) = 0$; atunci poloida Γ:

$$f(\rho, \theta - 2 \arcsin a/\rho) = 0.$$

Obs. Dacă C poate fi descrisă mecanic, Γ poate fi construită mecanic: fie dreptunghiul rigid $A'A''C'B'$, din care s-a înlăturat dreptunghiul $AA''MB$, astfel ca $B'C' = 2a$, $MB = a$ (fig. 70); deplasîndu-se acest instrument astfel ca M să descrie pe C iar AB să treacă prin O, simetricul P al lui M față de AB descrie pe Γ. *Apl.* Dreapta $C: \theta = \theta_0$; poloida Γ (fig. 71): $\rho \sin((\theta - \theta_0)/2) = a$. Altă construcție: Fiind dat un pătrat (de latură $2a$), Γ e locul lui P de intersecție al polarei lui M de pe cercul circumscris pătratului în raport cu cercul înscris pătratului și perpendicularei prin M la una din mediatoarele pătratului. Luînd mediatoarele pătratului ca axe, găsim $(X^2 - a^2)^2 + (X^2 - 2a^2)Y^2 = 0$ sau $\rho \cos \theta/2 = a\sqrt{2}/2$. *Obs.* a) Cu ajutorul trisecantei se poate efectua mecanic trisecțiunea unghiului. Fie AOB (fig. 71 a); se duce d paralelă cu una din laturi (de exemplu: $d \parallel OA$), la distanța egală cu a; se construiește poloida Γ a celeilalte laturi OB în raport cu O și de modul a. $P_1 = d \cap \Gamma$, avem $\overset{\frown}{AOP_1} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AOB}$. Sau: fie $\overset{\frown}{YOt}$ (fig. 71 b); Ot taie cercul circumscris pătratului în A; mediatoarea lui OA taie arcul finit al lui Γ în interiorul cercului înscris pătratului în P_1, iar $\overset{\frown}{AOP_1} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{YOt}$. b) Mai general, folosind curbe poloide succesive, se poate împarte un unghi în $2^n + 1$ unghiuri egale. c) Cînd $O \notin C$, forma lui Γ depinde de a și d (distanța de la O la C); fig. 72.

14 Să se demonstreze: a) Toate curbele algebrice C_n de gradul n, care trec prin $n(n + 3)/2 - 1$ puncte fixe, mai trec și prin alte $(n - 1)(n - 2)/2$ puncte fixe. b) Printre punctele care definesc pe C_n nu pot să se găsească mai

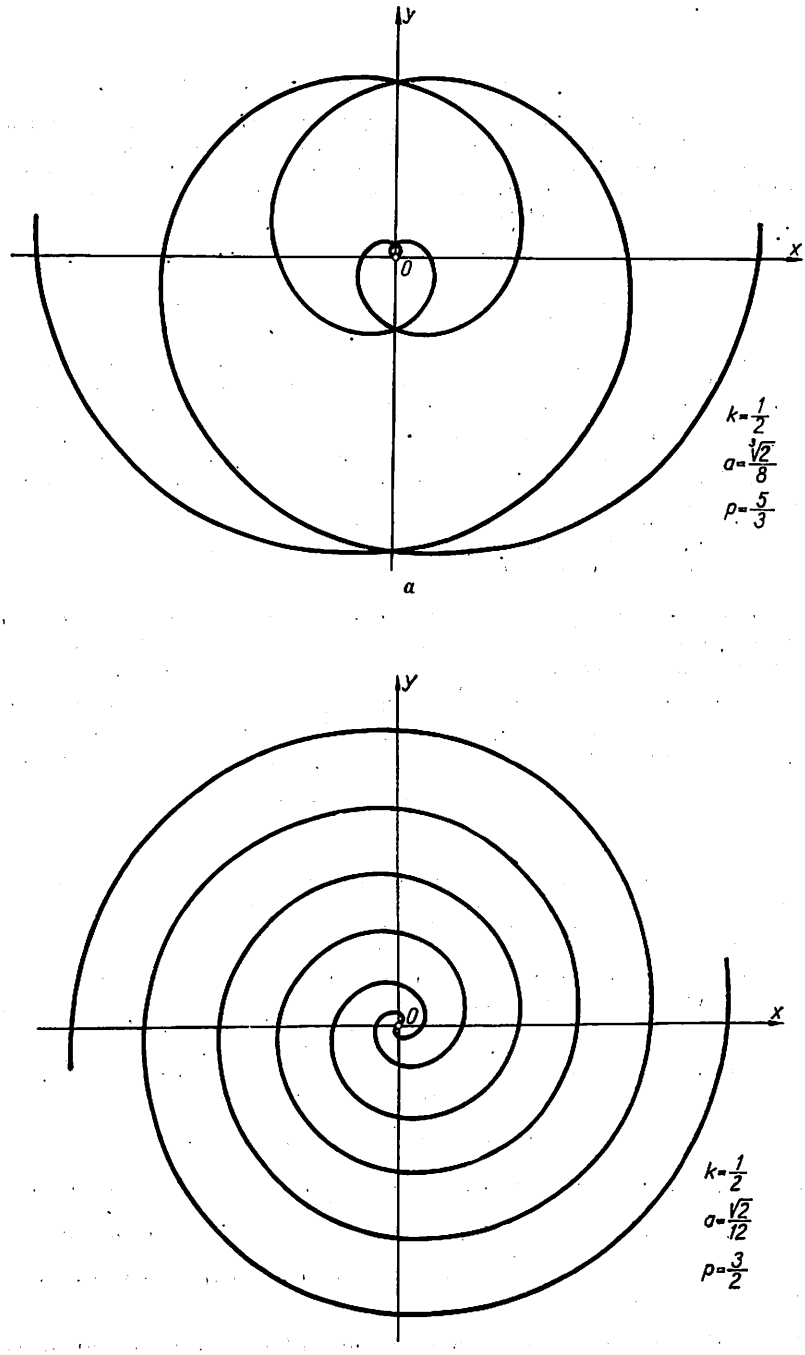
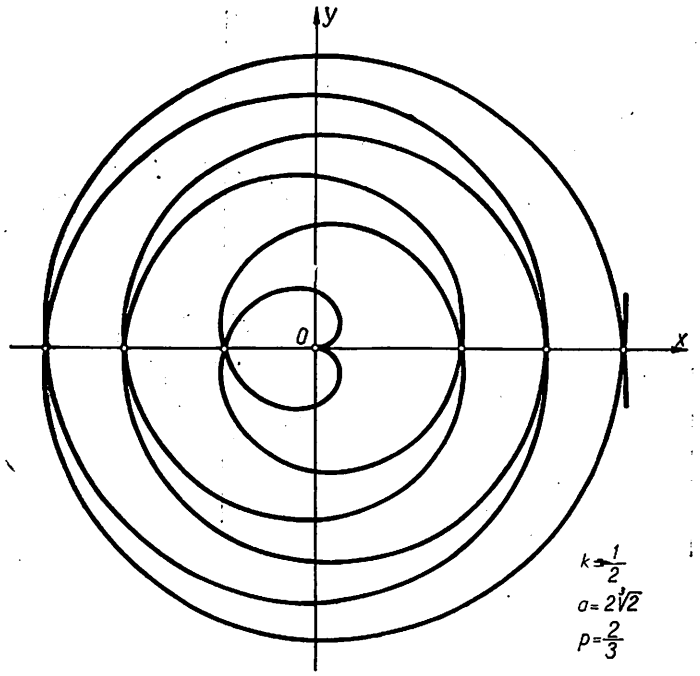
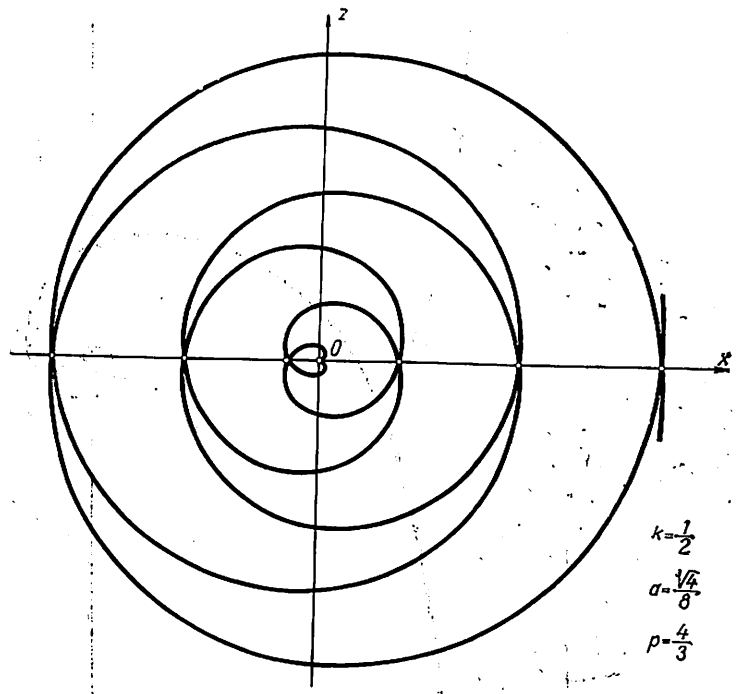

y
x
0
$k=\frac{1}{2}$
$a=\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$
$p=\frac{5}{3}$
a
y
x
0
$k=\frac{1}{2}$
$a=\frac{\sqrt{2}}{12}$
$p=\frac{3}{2}$
b

Fig. 65 *a* — *b*


y
0
x
$k=\frac{1}{2}$
$a=2\sqrt[3]{2}$
$p=\frac{2}{3}$

c_1


z
0
x
$k=\frac{1}{2}$
$a=\frac{\sqrt[3]{4}}{8}$
$p=\frac{4}{3}$

c_2

Fig. 65 *c*

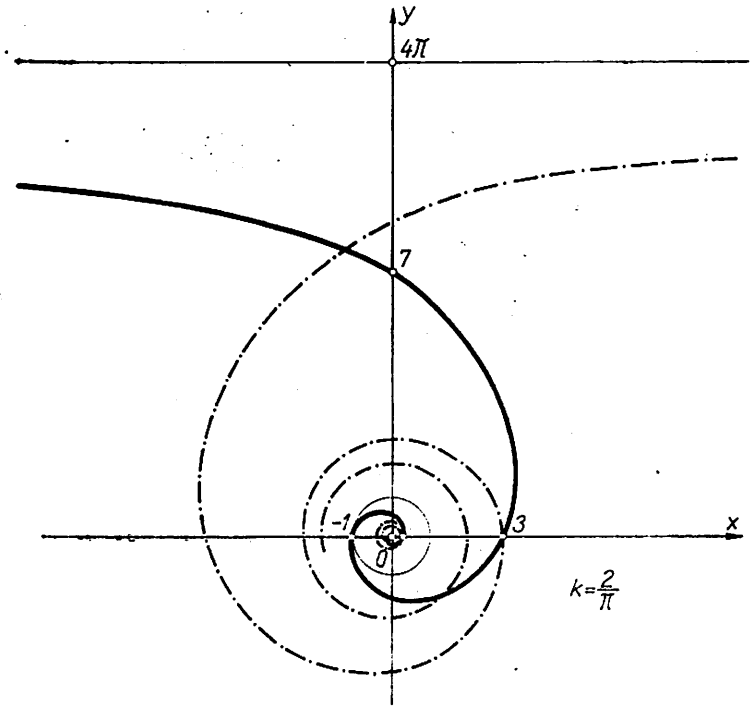

y
4π
7
-1
0
3
x
k=2/π

Fig. 67

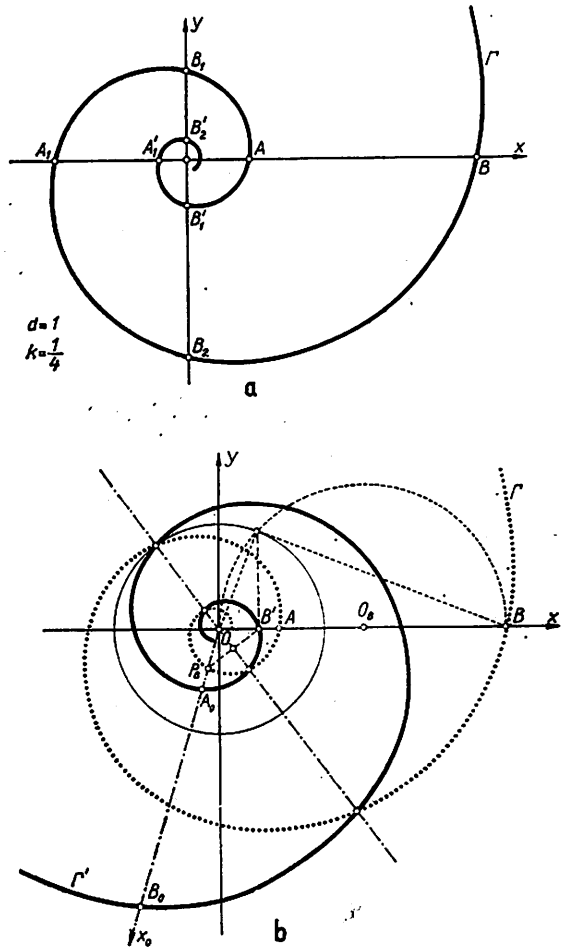

y
Γ
B₁
B'₂
A₁
A'₁
A
x
B
B'₁
d=1
k=1/4
B₂
a
y
Γ
B'
A
O₀
B
x
O
B'₀
A₀
Γ'
B₀
x₀
b

Fig. 66

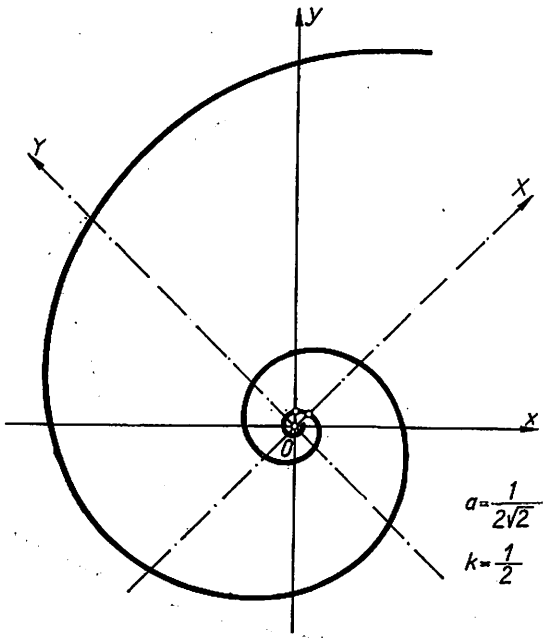


Fig. 68

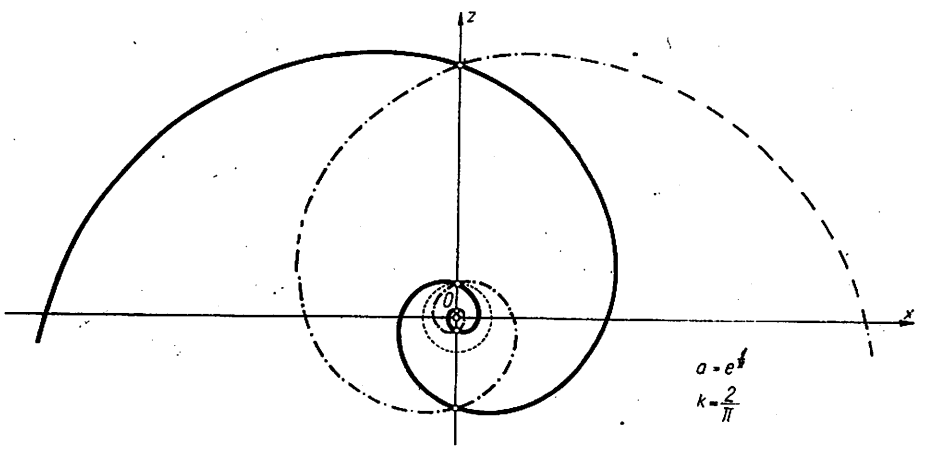


Fig. 69

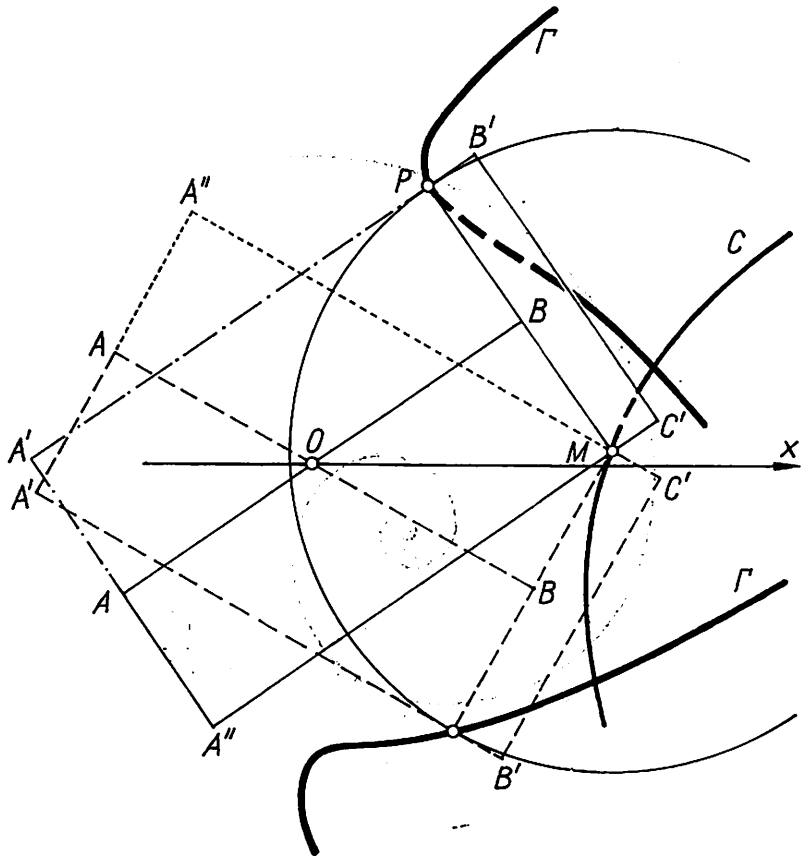

Γ
B'
A''
P
C
B
A
C'
A'
O
M
X
A'
C'
A
B
Γ
A''
B'

Fig. 70

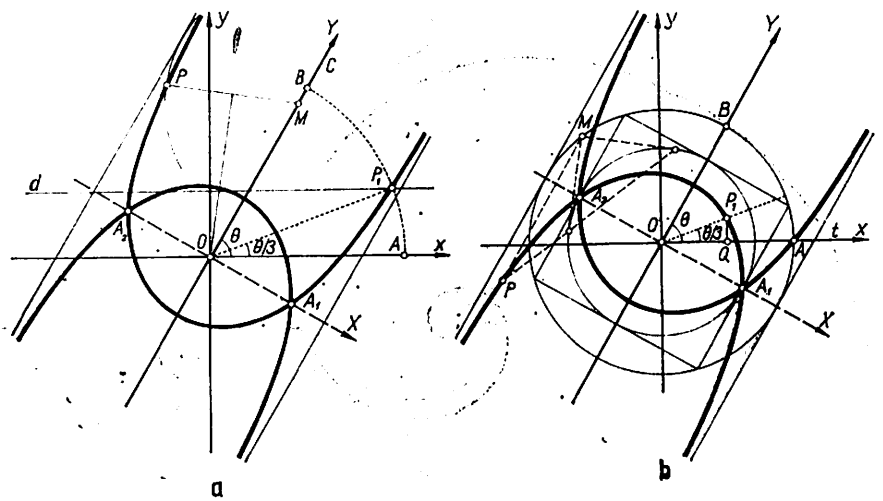

y
Y
C
B
P
M
d
P_1
A_2
O
θ
θ/3
A
X
A_1
X
a
y
Y
M
B
A_2
P_1
O
θ
θ/3
t
X
A
Q
P
A_1
X
b

Fig. 71

mult decît $mn - (m-1)(m-2)/2$ puncte pe o curbă $C_m (m < n)$ fără ca C_n să fie degenerată în C_m şi o altă curbă C_{n-m}.

15 Dacă într-o conică C_2 înscriem un poligon cu $2n$ laturi, cele $n(n-2)$ puncte, unde fiecare latură impară taie laturile pare neadiacente, se găsesc pe o curbă algebrică C_{n-2} de gradul $n-2$.

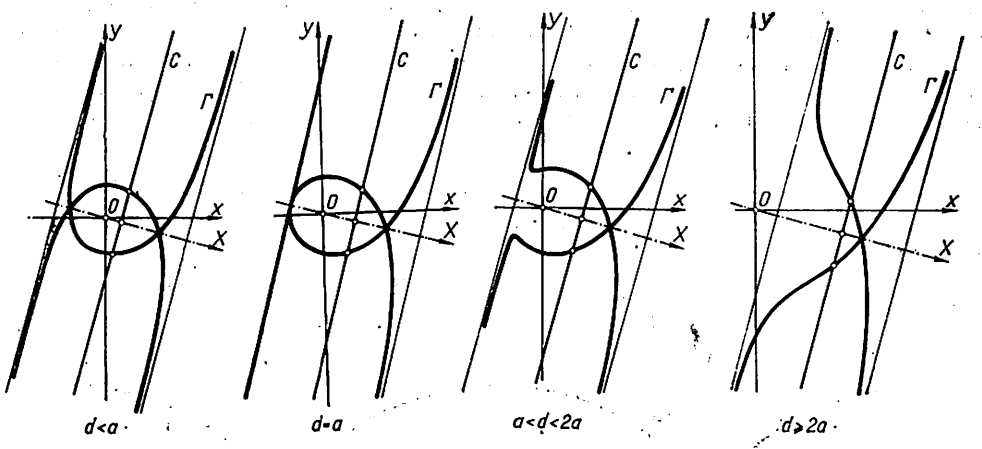


Fig. 72

16 Se consideră figura L formată de o curbă C şi un punct A. Transformatele lui L prin translaţii paralele cu o direcţie fixă d formează o familie L_α cu un parametru. Unei valori determinate a lui α îi corespunde o curbă C_α şi un punct A_α, dreapta BA_α–unde B e punct fix al planului — intersectînd pe C_α în punctele M_α, M'_α,... Să se arate că mulţimea $\{M_\alpha, M'_\alpha, \ldots\}$, asociată familiei L_α, e o curbă de aceeaşi natură (algebrică, transcendentă) ca şi curba dată C. *Apl.* Cînd C e: a) o dreaptă; b) o parabolă avînd ca axă paralela prin A la direcţia d.

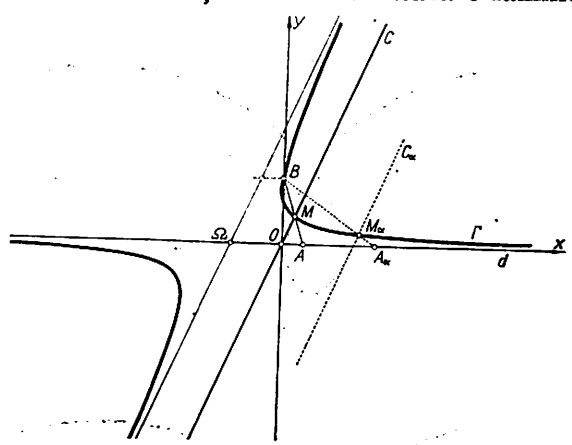


Fig. 73

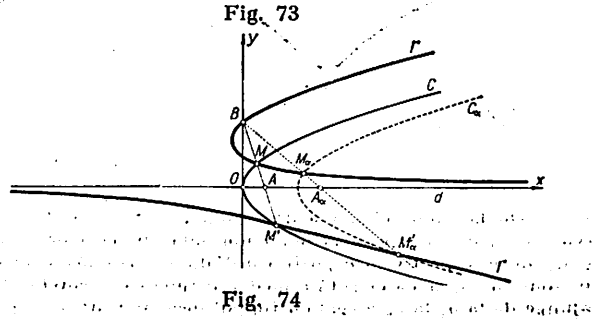


Fig. 74

R. Luînd $Ox \parallel d$, $A \in Ox$ şi $B \in Oy$, fie $A(a, 0)$ şi $B(0, y_0)$, iar C: $F(x, y) = 0$. Cum $A_\alpha(a+\alpha, 0)$ şi C_α: $F(x-\alpha, y) = 0$, Γ are ecuaţia $F(x + a + xy_0/(y - y_0), y) = 0$. *Apl.* a) Fie $C: y = mx$; Γ e *hiperbola* $mxy - y + (ma + y_0)y - may_0 = 0$ de centru $\Omega(-(y_0 + ma)/m, 0)$ şi asimptote: $y = 0$, $y = m(x + a) + y_0$ (fig. 73). b) Fie $C: y^2 = 2px$; Γ e o cubică (ce trece prin B), numită *parabola lui Descartes*: $y^2(y-y_0)/2p = (x + a)(y - y_0) + y_0x$ (fig. 74).

2. TANGENTA ŞI NORMALA LA O CURBĂ

17 Fie un cerc de centru C şi rază a, care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă d. Curba Γ descrisă de un punct P din planul cercului (diferită de aceea descrisă de C, care e o dreaptă) se numeşte *cicloidă normală, alungită sau scurtată*, după cum P se află pe cerc, în exteriorul sau în interiorul lui. Se cere : a) Să se arate că Γ e o curbă transcendentă. b) Să se cerceteze dacă Γ are puncte singulare. c) Să se demonstreze că normala în P la Γ trece prin punctul de contact B al cercului generator cu *baza* d a lui Γ.

R. Fie (fig. 75) : CM raza cercului prin P, $l = CP$, $\theta = \widehat{MCB}$ (unghiul de rostogolire) cu $OB = \widehat{BM} = a\theta$; s-a luat $d = Ox$ şi O în una din poziţiile ocupate de M pe d (poziţie iniţială). Proiectînd linia $OBCP$ pe axe :

$$(45)\qquad x = a\theta - l\sin\theta,\quad y = a - l\cos\theta\,;\quad x = a\ \arccos\left((a-y)/l\right) - \sqrt{l^2-(a-y)^2}\,;$$

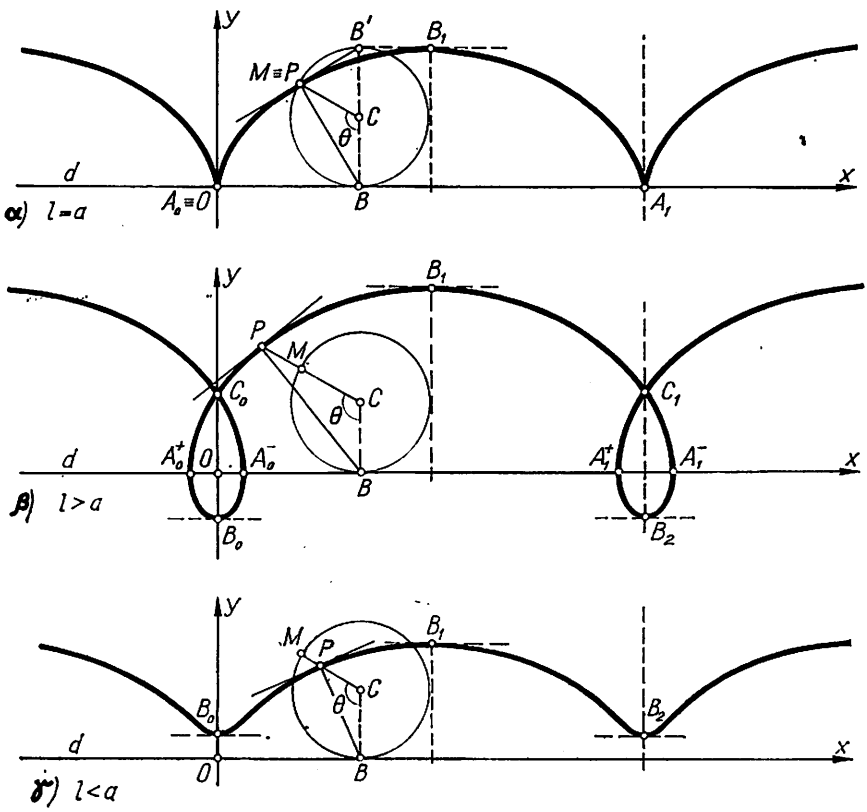


Fig. 75

Γ e normală, alungită sau scurtată după cum $l = a$ ($P = M$), $l > a$ sau $l < a$. *Obs.* Dacă în mişcarea unei particule pe o cicloidă normală cu baza orizontală se consideră dreptele orizontale d_1 şi d_3, duse respectiv prin poziţia iniţială a particulei şi prin punctul de cotă cea mai mică, cum şi orizontala d_2 a cărei cotă e media aritmetică a cotelor lui d_1 şi d_3, timpul necesar pentru a ajunge de la d_1 la d_2 e egal cu timpul necesar pentru a ajunge de la d_2 la d_3 ; deci : *Cicloida nor-*

mală e o curbă mesocronă. β) Transformatele afine ale cicloidei normale: $x = ka(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ se numesc *cicloidele lui Fermat*; ele sînt alungite sau scurtate, după cum $k \gtrless 1$; ele intervin în probleme de geometrie descriptivă. a) Deoarece y are perioada 2π, Γ e formată din o infinitate de arce egale corespunzînd intervalelor $[2k\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in Z$ (mulțimea întregilor); deci translațiile de lungime $2ka\pi$, în direcția Ox, duc unul din aceste arce în celelalte. Așadar: *Cicloida e o curbă transcendentă.* Axe de simetrie: $x = ka\pi$; căci $P_1(\theta)$ și $P_2(2k\pi - \theta)$ iar $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = ka\pi$, $y_1 = y_2$. b) Γ taie pe Ox dacă $\cos\theta = a/l \leqslant 1$. Fie $l = a$; atunci $\Gamma \cap Ox = \{A_k(2ka\pi, 0)\}$. Însă $x'(2k\pi) = y'(2k\pi) = 0$; deci A_k sînt *puncte singulare*; tangenta la Γ în A_k e paralelă cu Ox, căci $m = y'/x' = \sin\theta/(1 - \cos\theta) = \operatorname{ctg}\theta/2$ iar pentru $\theta = 2k\pi$ avem $m = \infty$. $B_h(ha\pi, 2a)$ cu $h = 2p + 1$ (puncte de maxim, căci $y'(h\pi) = 0$) sînt *vîrfuri* ale lui Γ; cînd Γ *e cu un vîrf în origine*:

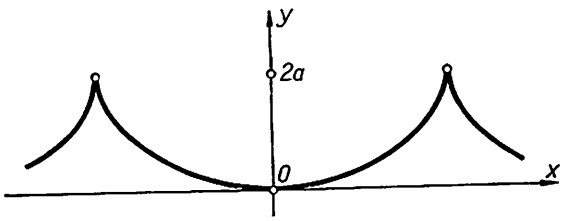


Fig. 76

(46) $$x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta),\ \text{fig. 76}$$

Fie $l > a$; atunci $\Gamma \cap Ox = \{A_k^{\pm}(\pm\theta_0 + 2k\pi, 0)\}$ cu $\theta_0 = \arccos a/l$. Deoarece $x'(\pm\theta_0) = 0$, există (v. teorema lui Rolle) $\theta_1 \in [\theta_0, \pi]$ și $\theta_2 \in [-\pi, \theta_0]$ cu $\theta_2 = -\theta_1$, iar $a\theta_1 - l\sin\theta_1 = 0$, astfel ca $x(\theta_1) = x(\theta_2) = 0$, $y(\theta_1) = y(\theta_2)$; deci $C_k(2k\pi, a - l\cos\theta_1)$ sînt *puncte multiple* (*noduri*). Avem $y' = 0$ dacă $\theta = k\pi$; deci $B_k[ka\pi, a(-1)^k l]$ sînt puncte de maxim (pentru k impar) sau de minim (pentru k par). Dacă $l < a$, Γ nu admite puncte singulare; B_k sînt puncte de extremum. c) Normala cicloidei (45): $(a - l\cos\theta)(x - a\theta) + yl\sin\theta = 0$ taie pe Ox în $B(a\theta, 0)$; de unde construcția tangentei în P la Γ. Cînd Γ e normală: dreapta PB', cu B' opusul diametral lui B, e tangenta în P la curbă.

18 Se numește *curbă ciclică* traiectoria C descrisă de un punct P legat rigid de un cerc mobil Γ care are o mișcare de rostogolire fără alunecare pe un cerc fix γ_0 (de bază); C se zice că e o *epicicloidă* dacă cercurile sînt exterioare unul altuia, e o *pericicloidă* cînd γ_0 e situat în interiorul lui Γ sau e o *hipocicloidă* dacă Γ e interior lui γ_0. Să se arate că: a) Normala în P la C trece prin punctul de contact B al lui Γ cu γ_0. b) O pericicloidă e și epicicloidă și invers, iar o hipocicloidă e hipocicloidă în două moduri. *Apl.* Ecuația $x = (\sqrt{2}\cos t + 1)\cos t$, $y = (\sqrt{2}\cos t - 1)\sin t$ reprezintă o curbă ciclică.

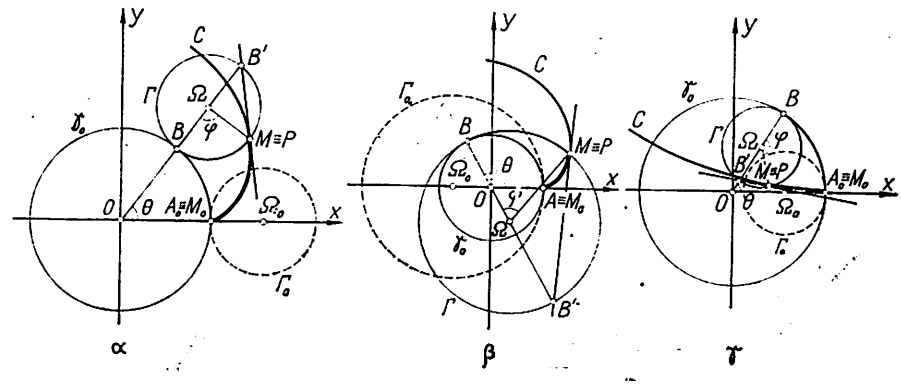
R. Fie (fig. 77): $\gamma_0(0; a)$ și $\Gamma(\Omega; r)$, iar ΩM — raza lui Γ care trece prin P, $\varphi = \widehat{M\Omega B}$ unghiul de rostogolire a lui Γ socotit din o poziție M_0 în care M vine pe γ_0; luînd $Ox = OM_0$, notăm $\theta = \widehat{M_0OB}$ și $l = \Omega_0 A_0 = \Omega P$. Însă $\widehat{M_0B} = \widehat{BM}$, deci $a\theta = r\varphi$. Proiectăm linia $O\Omega P$ pe axe; după cum C e epi-, peri-, sau hipocicloidă, $O\Omega$ și ΩP fac cu Ox unghiurile θ și $\pi + \theta + \varphi$, $\theta + \pi$ și $\theta - \varphi$, sau θ și $2\pi - (\varphi - \theta)$, iar $O\Omega$ e egal cu $a + r$, $r - a$ sau $a - r$. Obținem

(47) $$x = (a \pm r)\cos\theta \mp l\cos\frac{r \pm a}{r}\theta,\quad y = (a \pm r)\sin\theta \mp l\sin\frac{r \pm a}{r}\theta,$$

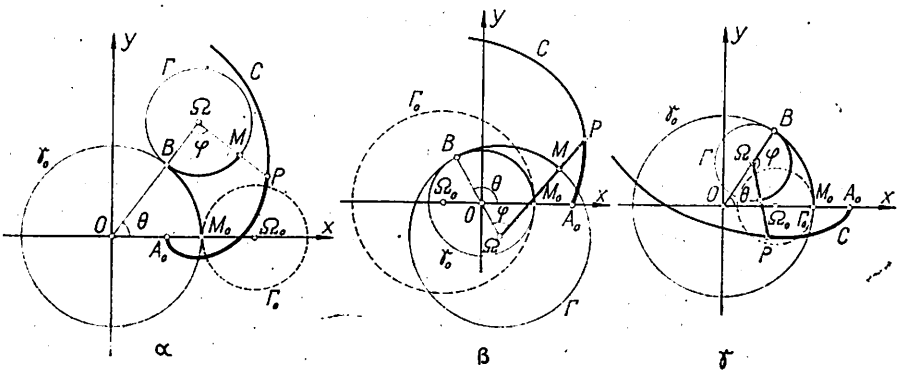
cu semnul superior pentru epicicloidă și semnul inferior pentru peri- sau hipocicloidă. Numărul $h = a/r$ se numește *modulul* lui C; observăm că $\varphi = h\theta$ crește cu 2π cînd θ crește cu $2\pi/h$, raza vectoare $\rho = OP$ revenind la valoarea inițială. Deci C e formată din arce egale $\widehat{A_kA_{k+1}}$, cu $\theta \in [2k\pi, 2(k+1)\pi/h]$, care se deduc unul din altul prin rotații de unghi $2k\pi/h$ în jurul lui $O(k \in Z)$; deci dreptele prin O, de înclinări $\theta = k\pi/h$ (diametri prin A_k și perpendiculari pe A_kA_{k+1}) sînt axe de simetrie, iar ρ variază între $|a \pm r - l|$ și $|a \pm r + l|$ cu extremum pe aceste axe. Condiția necesară și suficientă ca C să se închidă e ca $p = (r \pm a)/r$ să fie rațional, adică: *O curbă ciclică de modul rațional e o curbă algebrică unicursală de gradul* 2 ($m \pm n$). Căci, dacă $h = n/m$ ($m, n \in Z$, prime) iar, $x + iy = X$, $x - iy = Y$, $e^{i\theta} = t$ ($i^2 = -1$), ecuațiile curbei devin

(47′) $$X = t^m(a \pm r \mp lt^{\pm n}),\quad Y = t^{-m}(a \pm r \mp lt^{\pm n}).$$

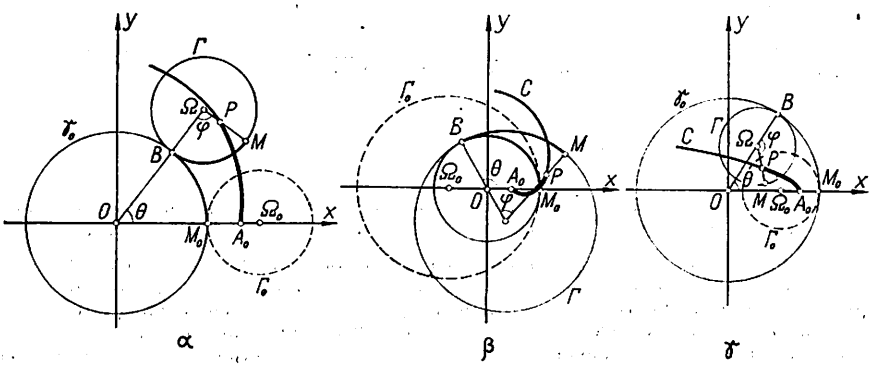
De altfel, luînd $\operatorname{tg}\theta/2m = t$, rezultă expresii raționale (date de formulele lui Moivre) pentru sin și cos din $\theta = m\dfrac{\theta}{m}$ și $(r \pm a)\theta/r = (m \pm n)\theta/m$, încît funcțiile parametrice admit perioada $2m\pi$; deci C se obține pentru $\theta \in [0, 2m\pi]$, fiind constituită din n arce egale (Γ se rostogolește de



a



b



c

Fig., 77

n ori, descriind pe γ_0 de m ori; v. fig. 78 cu $h = 3/2$). Rezultă: *O curbă ciclică de modul irațional e transcendentă*; căci C nu se întoarce niciodată la punctul de plecare, fiind formată dintr-o infinitate de arce egale. Se poate arăta că ea trece oricît de aproape de orice punct cuprins între cercurile de raze $|a \pm r - l|$ și $|a \pm r + l|$, concentrice cu γ_0. Alte generări: α) Traiectoria unui punct care se deplasează cu o viteză unghiulară constantă pe un cerc al cărui centru se mișcă tot cu o viteză unghiulară constantă pe un cerc fix; cercul mobil se numește *epiciclu*. β) Locul vîrfului P al unui paralelogram articulat OA_1A_2P, ale cărui laturi OA_1 și OA_2 se rostogolesc în jurul vîrfului fix O cu viteze unghiulare ω_1, ω_2 al căror raport e constant. a) Simplificăm calculele cu p în (47); deci

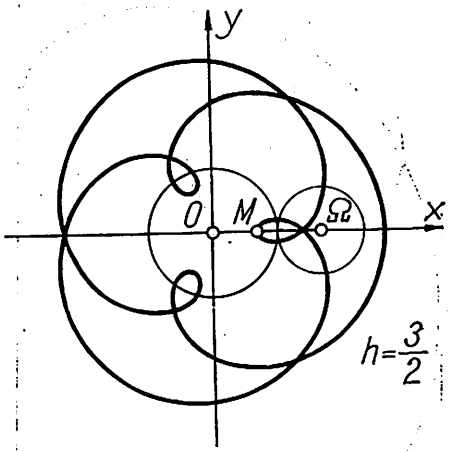


Fig. 78

$$x = \pm (pr\cos\theta - l\cos p\theta),$$

(47‴)

$$y = \pm(pr\sin\theta - l\sin p\theta).$$

Calculele arată că normala în P la C trece prin $B(a\cos\theta,\ a\sin\theta) = \gamma_0 \cap \Gamma$. *Curbă ciclică* se zice *normală, alungită sau scurtată* (în ultimele cazuri, sinonim: *trohoidă*), după cum P se află pe Γ, de aceeași parte față de Γ ca centrul lui γ_0 sau în partea opusă. Dacă C e normală, tangenta în P are panta $y'/x' = \operatorname{tg}((p+1)\theta/2) = \operatorname{tg}(\theta + \pi/2)$. Dacă B' e diametralul opus în Γ al lui B, atunci $\widehat{\Omega B'P} = \varphi/2$; deci unghiul dreptei PB' cu Ox e $\theta + \varphi/2$ sau $\pi + (\theta - \varphi/2)$, încît $m_{PB'} = y'/x'$. De aici construcția tangentei (v. fig. 77 a). *Obs.* $x'^2 + y'^2 = p^2[r^2 + l^2 - 2lr\cos(p-1)\theta] = (a \pm r)^2\left[\left(1 - \frac{l}{r}\cos\frac{a}{r}\theta\right)^2 + \left(\frac{l}{r}\sin\frac{a}{r}\theta\right)^2\right]$. Avem $x' = y' = 0$ numai dacă $1 - \frac{l}{r}\cos\frac{a}{r}\theta = 0$, $\sin\frac{a}{r}\theta = 0$; de unde rezultă $l = a$ și $\theta = 2k\pi/h$, adică: *O curbă ciclică normală are punctele* $A_k \in \gamma_0$ *singulare.* Există curbe ciclice care admit *puncte multiple* sau care sînt *curbe simple.* b) Fie o pericicloidă (47) — cu semn inferior iar, $a < r$. Notînd $l_1 = r - a$, prin $a_1 = l_1a_1/r_1$, $r = l_1(a_1 + r_1)/r_1$, $l = a_1 + r_1$, $\theta = (r_1 + a_1)\theta_1/r_1$ se obține o epicicloidă (47) cu semn superior; modulurile lor satisfac relația $hh_1 + h - h_1 = 0$. Fie o hipocicloidă (47) cu semn inferior și $a > r$. Luînd $l_1 = a - r$, prin $a = l_1a_1/r_1$, $r = l_1(a_1 - r_1/r_1$, $l = a_1 - r_1$, $\theta = (r_1 - a_1)\theta_1/r_1$ se obține tot o hipocicloidă (47) cu semn inferior și $a_1 > r_1$. modulurile celor două generări fiind date prin $hh_1 - (h + h_1) = 0$. Deci: *Sînt două tipuri fundamentale de curbe ciclice, epi- și hipocicloide, de ecuație* ($l = \lambda r$)

$$(47''')\qquad x = \frac{a}{h}[(h+1)\cos\theta \mp \lambda\cos(h \pm 1)\theta],\ y = \frac{a}{h}[(h+1)\sin\theta - \lambda\sin(h \pm 1)\theta],$$

cu semnul superior pentru epicicloidă, cu cel inferior pentru hipocicloidă.

Cazuri remarcabile. α) *Epitrohoida de modul 1 e un melc Pascal*; notăm $p = 2a\lambda$, $l = 2a$ în (47‴) și facem translația $\overline{OA}$ cu $A(p/2, 0)$. *Obs.* Epicicloida de modul 1 (cînd $\lambda = 1$) e o cardioidă. β) *Nefroida* (sinonim: *epicicloida lui Huygens*) e epicicloida de modul 2 (fig. 79)

$$(48)\qquad x = a(3 - 2\cos^2\theta)\cos\theta,\ y = 2a\sin^3\theta;\ 4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27a^4y^2.$$

Pentru $\theta = \pi/8$, tangenta: $x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2a\sin\theta = 0$ e paralelă cu Oy. γ) *Hipotrohoida de modul 2* e *elipsa* $x = a(1+\lambda)\cos\theta/2$, $y = a(1-\lambda)\sin\theta/2$ (fig. 80). *Obs.* γ_1) Hipocicloida de modul 2 e un diametru al lui γ_0; rezultatul e folosit în teoria mecanismelor pentru transformarea unei mișcări circulare în una rectilinie. γ_2) Extremitățile P', P'' ale diametrului în Γ al lui P descriu drepte perpendiculare în O (diametri ai lui γ_0); deci: un punct P al unui segment $P'P''$ de lungime constantă, cu P' și P'' lunecînd pe două drepte fixe (pot fi oblice), descrie o elipsă. Pe această proprietate se bazează *elipsograful.* δ) *Hipocicloida lui Steiner* se obține pentru $h = 3$ (fig. 81):

$$x = \frac{a}{3}(2\cos\theta + \cos2\theta),\ y = \frac{a}{3}(2\sin\theta - \sin2\theta);\ 3(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) +$$

(49)

$$+ 6a^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0;\ x = a(3 - 6t^2 - t^4)/3(1 + t^2)^2,\ y = 8at^3/3(1 + t^2)^2.$$

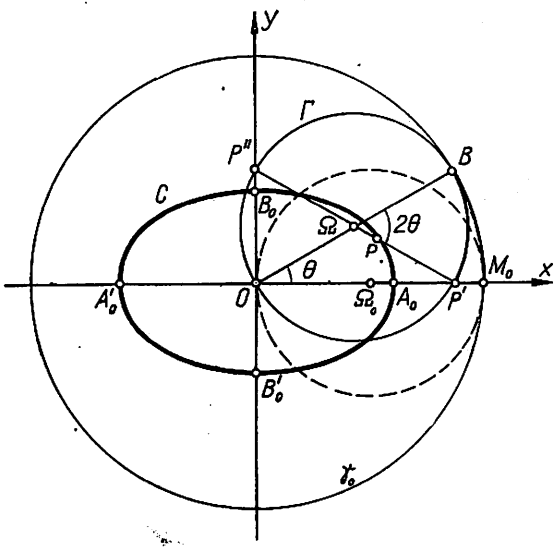


Fig. 80

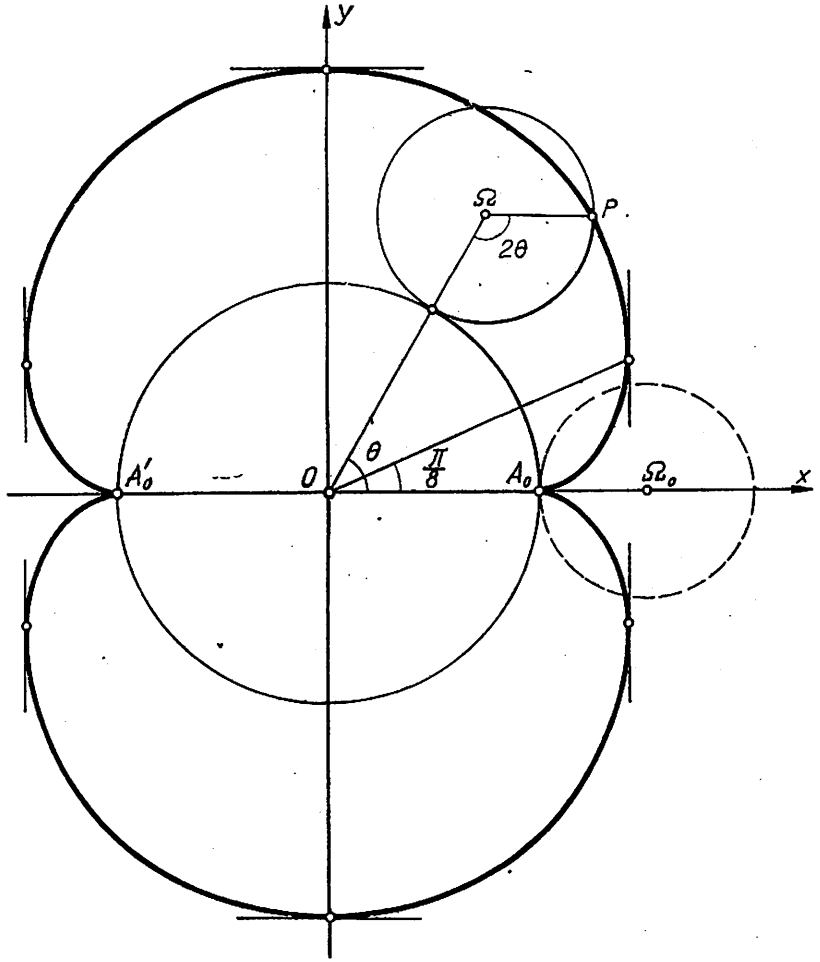


Fig. 79

Curba are trei puncte singulare: A_0 (0), A_1 $(2\pi/3)$ și A_2 $(4\pi/3)$; e formată din 3 arce egale, tangente la un cerc γ concentric cu γ_0 și de rază $r = a/3$, punctele de contact C_0, C_1 și C_2 (cu γ) fiind pe bisectoarele triunghiului $A_0A_1A_2$. ε) *Astroida* e hipocicloida de modul $h = 4$ (fig. 82):

(50) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ sau $(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$.

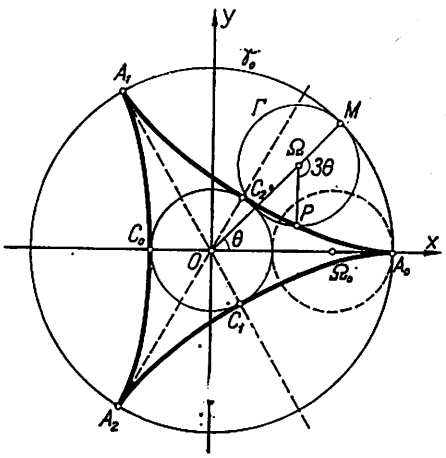


Fig. 81

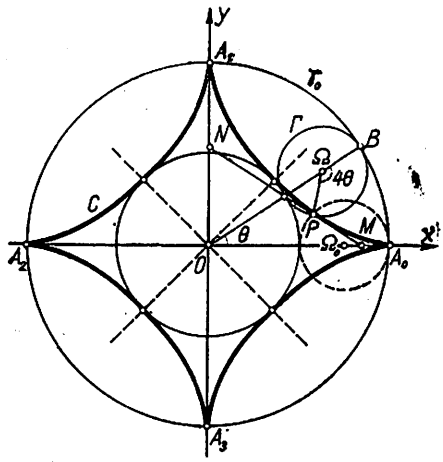


Fig. 82

Are 4 puncte singulare: A $(a, 0)$, A' $(-a, 0)$, B $(0, a)$ și B' $(0, -a)$. *Proprietate caracteristică*: tangenta $x\sin\theta + y\cos\theta - \frac{a}{2}\sin 2\theta = 0$ taie axele în M $(a\cos\theta, 0)$ și $N(0, a\sin\theta)$ astfel încît $MN = a$. Invers: curba C astfel ca porțiunea din tangenta într-un punct al ei, determinată de 2 drepte ortogonale fixe, să fie constantă e o astroidă; căci, luînd dreptele fixe ca axe iar C: $y = y(x)$, atunci tangenta $Y - y = y'(X - x)$ taie axele în $M(x - y/y', 0)$ și $N(0, y - xy')$ iar din $MN = a$ obținem ecuația diferențială Clairaut $y = xy' + ay'/(1 + y'^2)$, avînd soluția singulară $x = -a/(1 + p^2)^{3/2}$, $y = ap^3/(1 + p^2)^{3/2}$.
Apl. C e o hipotrohoidă alungită de modul 3, cu $a = 3/2$, $\lambda = \sqrt{2}$ (fig. 83); centrul cercului de bază în $O'(1/\sqrt{2}, 0)$ și $\theta = -t$. *Obs.* Hipotrohoida de modul 3 e o curbă simplă sau nu (fig. 84), după cum e scurtată $(\lambda < 1)$ sau alungită $(\lambda > 1)$; în ultimul caz, C admite 3 noduri $(\lambda \neq 2)$ sau un punct triplu nodal $(\lambda = 2)$.

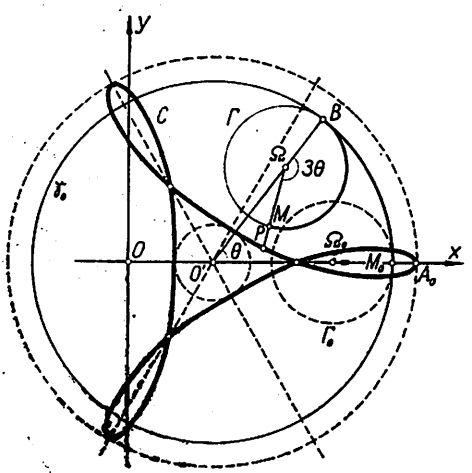
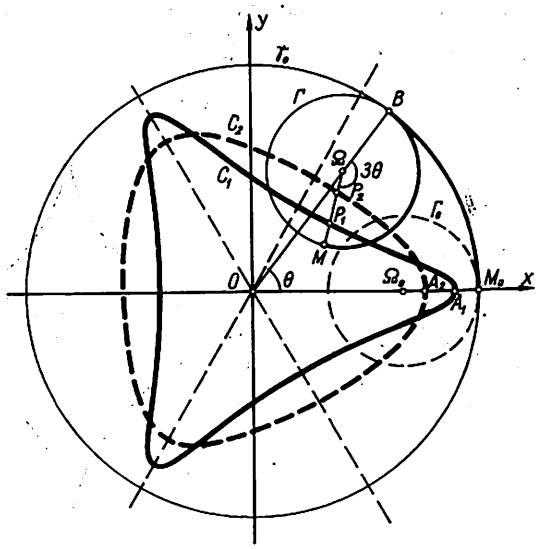


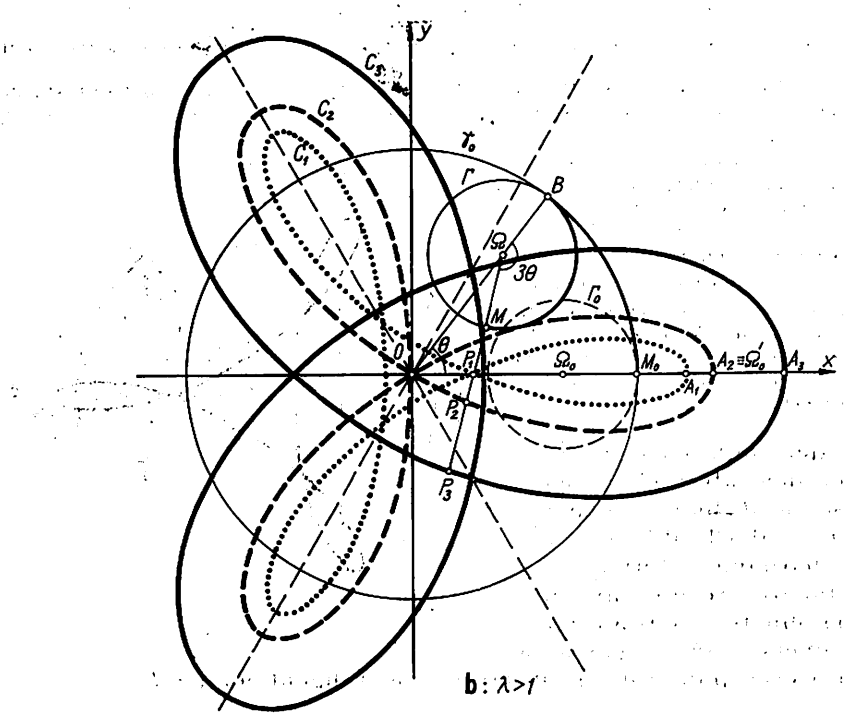
Fig. 83

19 Să se determine curba $C: y = f(x)$ astfel încît abscisele punctelor de intersecție ale lui C cu o paralelă la Ox să fie valorile distincte ale rapoartelor anarmonice formate cu 4 puncte coliniare. Se duc tangente la C în două puncte P și Q ale căror abscise sînt inverse; să se găsească locul Γ al proiecției punctului de intersecție al tangentelor pe PQ.

R. Fie a una din valorile biraportului a 4 puncte coliniare. Problema revine la găsirea lui $f(x)$ astfel ca $f(x) - f(a) = \alpha(x)\,P_6(x, a)$, unde $P_6(x, a) = (x^2 - x + 1)^3 - (a^2 - a + 1)^3\,x^2(x - 1)^2/a^2(a - 1)^2$ e polinomul de gradul 6 admițînd rădăcinile a, $1/a$, $1 - a$, $1/(1 - a)$, $1 - 1/a$,



a : $\lambda<1$



b : $\lambda>1$

Fig. 84

$a/(a-1)$. Deci C: $\alpha y = (x^2 - x + 1)^3/x^2(x-1)^3$ (fig. 85; $\alpha = 5$). Găsim $\alpha y' = (x^2 - x + 1)^2(2x-1)(x+1)(x-2)/x^3(x-1)^3$. Fie $P(a, y_0)$ şi $Q(1/a, y_0)$ cu $\alpha y_0 = (a^2 - a + 1)^3/a^2(a-1)^2$; avem $y'_Q = -a^2 y'_P$. Perpendiculara pe PQ din punctul de intersecţie al tangentelor (la C) în P şi Q, fiind din fasciculul avînd aceste tangente ca drepte de bază, are ecuaţia $(a^2 + 1)x - 2a = 0$; Γ e *sextica unicursală* $x = 2t/(t^2 + 1)$, $y = (t^2 - t + 1)^3/t^2(t-1)^2$. *Obs.* Dreapta $\alpha y = 27/4$ e tritangentă la C în punctele de abscisă -1, $1/2$ şi 2 (valori ce corespund diviziunii armonice a 4 puncte coliniare).

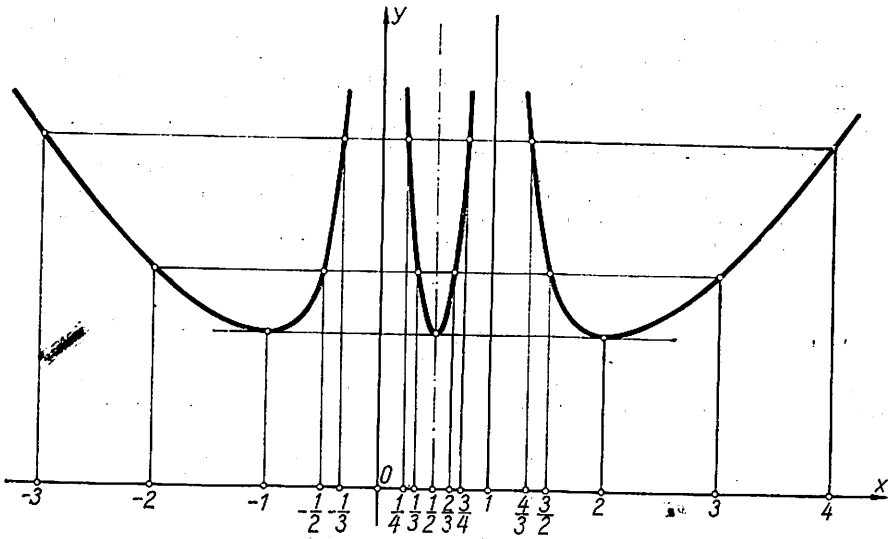


Fig. 85

20 Se numeşte *curbă Salmon* (sinonim: *curbă de direcţie*) o curbă plană care are proprietatea că distanţa de la un punct arbitrar din planul ei la tangenta variabilă a curbei e o funcţie raţională de coordonatele punctului de contact. Să se determine condiţia ca cubica C_3: $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + \lambda = 0$ să fie o curbă de tip Salmon.

21 Se numesc *curbe triunghiulare* curbele pentru care punctul ei curent P şi punctele M_i $(i = 1, 2, 3)$, în care tangenta în P taie laturile unui triunghi dat (numit *triunghi fundamental* asociat curbei), formează un sistem proiectiv invariant; astfel de curbe se spun că sînt *curbe anarmonice* (sinonim: *curbe W* — în terminologia lui F. Klein şi S. Lie) dacă una din laturile triunghiului e dreapta de la infinit. Se cere: a) Să se afle ecuaţia unei curbe triunghiulare. b) În cazul curbelor W, să se arate proprietăţile caracteristice: b_1) Există o relaţie omografică între panta t a tangentei în P şi panta m a razei vectoare OP (O, punct fix); b_2) E transformată în ea însăşi de transformările unui subgrup cu un parametru al grupului proiectiv. *Apl.* a) Să se afle curbele W asociate triunghiului format de origine şi punctele ciclice ale planului. b) Notînd cu $a_i (i = 1, 2, 3)$ lungimile laturilor unui triunghi dat, curba reprezentată de relaţiile $x_1/a_1^\lambda = x_2/a_2^\lambda = x_3/a_3^\lambda$, unde x_i sînt coordonatele baricentrice iar λ e un parametru, e o curbă W, numită *curba potenţială triunghiulară*.

R. a) Fie triunghiul dat de dreptele $d_i(x) = \Sigma_j a_{ij}x_j = 0$ şi, în P, tangenta $t: X_t = x_t + \rho\, dx_t$. Cum $d_2 \cap t = M_1(\rho_1 = -d_2(x)/d_2(dx))$, $d_1 \cap t = M_2(\rho_2 = -d_1(x)/d_1(dx))$ şi $d_3 \cap t = M_3(\rho_3 = -d_3(x)/d_3(dx))$. Din $(M_1M_2M_3P) = (\rho_1\rho_2\rho_3\, 0) = k$:

$$(51) \qquad k\frac{d_1(dx)}{d_1(x)} - \frac{d_2(dx)}{d_2(x)} + (1-k)\frac{d_3(dx)}{d_3(x)} = 0, \text{ deci } d_1^{a_1}d_2^{a_2}d_3^{a_3} = c \ (a_1 + a_2 + a_3 = 0),$$

unde $k = -a_1/a_2$. *Obs.* a$_1$) a_i pot fi numere reale sau complexe (după cum triunghiul fundamental e real sau nu), iar c e o constantă arbitrară. a$_2$) Tangenta în P și dreptele PA_i, determinate de vîrfurile $A_i = d_j \cap d_k (i \neq j \neq k)$ ale triunghiului fundamental formează de asemenea un sistem proiectiv invariant (proprietate duală). a$_3$) Curbele triunghiulare sînt curbe integrale ale unei ecuații diferențiale de tip Jacobi $|dx_i\ x_i\ d_i| = 0$. b) Luînd triunghiul dat ca triunghi fundamental pentru un reper proiectiv, atunci ecuația unei curbe anarmonice e

(51 a) $$x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} = c \quad (a_1 + a_2 + a_3 = 0).$$

Obs. Punctele de contact ale tangentelor la o curbă W, care conțin un punct dat P_0, sînt situate pe o conică, pe care se găsește și P_0. b$_1$) Fie $d_3 = 0$ dreapta de la infinit și $A_3 \equiv 0$; deci $M_3\ (\rho_3 = \infty) = P_\infty \in t$. Din $(M_1M_2P\ \infty P) = 1/(M_1M_2P) = k$, rezultă $(M_1M_2P) = 1/k = h$; deci: *Tangenta la o curbă W taie laturile triunghiului fundamental care trec prin origine în puncte astfel încît raportul lor simplu e constant.* În fasciculul de drepte cu centru A_3, avem $OP_\infty \| t$; dacă $m_i (i = 1, 2)$ e panta razei OM_i, condiția $(M_1M_2P_\infty P) = (m_1m_2 \infty 0) = k$ definește în fasciculul considerat omografia $(1-k)\,mt + (m_2 k - m_1)\,t + (m_1 k - m_2)\,m + (1-k)\,m_1m_2 = 0$. Numind *direcții asimptotice ale curbei W* direcțiile care coincid cu conjugatele lor (direcțiile unite ale omografiei), razele asimptotice sînt laturile OM_i ale triunghiului fundamental. Fie $W : y = y(x)$; deci $t = y'$ și $m = y/x$. Din omografia $amt + bt + cm + d = 0$ $(ad - bc \neq 0)$, deducem

(51′) $$W : ayy' + bxy' + cy + dx = 0 \quad (ad - bc \neq 0).$$

Direcțiile asimptotice m_i sînt rădăcinile ecuației $a\xi^2 + (b + c)\xi + d = 0$; după cum $\Delta = (b+c)^2 - 4ad \gtrless 0$, *razele asimptotice OM_i sînt reale distincte, imaginar conjugate sau confundate.* Deci: *Triunghiul fundamental asociat curbei W de ecuație (51′) e constituit din razele asimptotice și dreapta de la infinit.* Ecuația (51′) e de tip Lagrange; cu $ay' + c \neq 0$ (omografie nedegenerată):

(51′ a) $$\ln x = \int \frac{(ad - bc)}{(ap + c)ap^2 + (b + c)\,p + d}\,dp, \quad y = -\frac{(bp + d)x}{ap + c} \quad (p = y').$$

Obs. Integrala din (51′a) depinde de natura direcțiilor asimptotice (după cum $\Delta \gtrless 0$). Va fi integrată folosind formele canonice ale omografiei. Fie *punctele limită* (sinonim: *punctele de fugă*): $F\ (t = -c/a)$ și $F'(m = -b/a)$; cu originea lui t și m în ele, avem $c = b = 0$, încît

(51′α) $$ayy' + dx = 0, \text{ adică } dx^2 + ay^2 = C \text{ (conice cu centrul în } O).$$

Razele asimptotice (de pantă $m_i = \pm\sqrt{-d/a}$) sînt reale distincte sau imaginare, după cum p (*puterea omografiei*) $= -d/a \gtrless 0$. *Obs.* La o conică cu centru, produsul pantelor tangentei în P și a razei vectoare a lui P (relativă la centrul conicei) e constant. Dacă F și F' sînt la infinit, cînd $a = 0$, direcțiile asimptotice sînt date de ecuația $(b + c)\xi + d = 0$; deci una din razele asimptotice e Oy $(m_2 = \infty)$. Dacă $m_1 \neq m_2$, cînd $b + c \neq 0$ iar $m_1 = -d/(b + c)$, putem lua cealaltă rază ca $Ox (m_1 = 0$, adică $d = 0)$; razele asimptotice și dreapta de la infinit determină triunghiul fundamental, deci

(51′β) $$bxy' + cy - 0, \text{ adică } {}^* \quad x^c - y^b = C \text{ (curbe binome — v. probl. 129).}$$

Obs. Raportul diferențelor pantelor tangentelor și a razelor vectoare în 2 punte e constant.; căci, din $by_i' + cy_i/x_i + d = 0$, prin scădere, avem $b\,(y_1' - y_2') + c(y_1/x_1 - y_2/x_2) = 0$. Cum $(t\ m\ \infty\ 0) = m/t = -b/c$ (*invariantul absolut* al omografiei), rezultă: *raportul anarmonic al razelor asimptotice și a două raze corespondente e constant.* Dacă cealaltă rază asimptotă e tot Oy $(m_1 = m_2 = \infty)$, cînd $b + c = 0$, atunci ecuația (51′) devine

(51′γ) $$b(xy' - y) + dx = 0, \text{ adică } y = Cx - \frac{d}{b}\,x \ln x.$$

Obs. Omografia are forma $t = m - d/b$, adică: *raza corespondentă unei raze date se obține din cea dată printr-o rotație de unghi constant.*

---

* Cînd $b + c \neq 0$, ecuația diferențială $bxy' + cy + dx = 0$ admite soluția $y = Cx^{-c/b} - dx/(b + c)$; prin $X = x$, $Y = y + dx/(b + c)$ se reduce la (51′β).

b_2) Grupul proiectiv cu un parametru a cărei traiectorie e o curbă W dată e definit de

(51 b) $$x_1' = x_1/\lambda,\ x_2' = \lambda^\alpha x_2,\ x_3' = x_3 \qquad (\alpha = a_1/a_2).$$

Luînd $\lambda = 1 + a$ (schimbare de parametru astfel ca transformarea identică să se obțină anulînd noul parametru), în coordonate omogene:

$$x' = x/(1+a) = (1 - a + a^2 + \dots)x = x - ax + \dots = x + \xi_1^1 a^1 + \dots$$
$$y' = (1+a)^\alpha y = (1 + \alpha a + \dots)y = y + \alpha a y + \dots = y + \xi_1^2 a^1 + \dots \qquad (a^1 = a);$$

deci operatorul infinitezimal al grupului e $Xf = \xi_1^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_1^2 \frac{\partial f}{\partial y} = -x\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y}$. Ecuația diferențială a grupului: $\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{\alpha y}$ admite integrala $xy^\alpha = C$. *Obs.* Transformările proiective $\rho x_1' = \alpha_1 x_1$, $\rho x_2' = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, $\rho x_3' = \alpha_2 x_3$ transformă vîrfurile A_1, A_2 ale triunghiului fundamental în ele însele. Aplicînd această transformare unui punct P și iterînd-o de t ori, mulțimea punctelor echivalente cu P aparține *curbei W de specia a doua* de ecuație.

(51 c) $$x_1/x_3 = v\, e^{\mu x_2/x_3}\ ;$$

ea conține vîrfurile A_1, A_2, care sînt puncte de oprire, și e tangentă dreptei A_1A_2. *Apl.* a) $m_1 = 1$ și $m_2 = -i$ ($i^2 = -1$) sînt rădăcinile ecuației $a\xi^2 + (b+c)\xi + d = 0$ dacă $a = d$, $b + c = 0$; notînd $\lambda = b/a$, $\alpha = C\sqrt{1+\lambda^2}$, arc tg$p = \theta$:

$yy' - xy' + y + x = 0$, deci $x^2 + y^2 = C$ (*cerc*) sau $\rho = \alpha e^{\lambda\theta}$ (*spirală logaritmică*), după cum $\lambda = 0$ sau $\lambda \neq 0$. b) Obținem

(51 d) $$x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} = 1 \quad \text{cu} \quad c_1 = \ln\frac{a_2}{a_3},\ c_2 = \ln\frac{a_3}{a_1},\ c_3 = \ln\frac{a_1}{a_2} (c_1 + c_2 + c_3 = 0).$$

Curba conține puncte remarcabile asociate triunghiului fundamental; de exemplu: punctul de concurență al medianelor ($\lambda = 0$), centrul cercului înscris ($\lambda = 1$), punctul lui Lemoine ($\lambda = 2$) și cele două vîrfuri ale triunghiului care sînt opuse, respectiv, celei mai mari și celei mai mici dintre laturi.

22 Printr-un punct fix A se duce o secantă variabilă care taie o dreaptă dată d (ce nu conține pe A) în punctul B; curba C care trece prin A și a cărei tangentă în punctul ei curent P e perpendiculară pe AB, ordonata lui P fiind egală cu lungimea lui AB, se numește *lănțișor*. Se cere: a) Să se afle ecuația lui C. b) Fie M punctul de intersecție al paralelei prin P la d cu perpendiculara prin A la d; să se arate că tangenta în P la C e paralelă cu una din tangentele duse din M la cercul care trece prin A și de centru O, unde O e intersecția lui d cu perpendiculara prin A la d.

R. a) Fie (fig. 86): $A(0, a)$, $B(b, 0)$ și C: $y = y(x)$; deci $ay' - b = 0$, $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, adică $ay' - \sqrt{y^2 - a^2} = 0$ cu soluția $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a} + k\right)$, unde k e o constantă de integrare. Deci *lănțișorul de vîrf A* are ecuația

(52) $$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Construcția tangentei în P la C: din A se duce un arc de cerc cu raza egală cu ordonata lui P, care arc taie pe Ox în B; tangenta e perpendiculara din P pe AB. b) Cercul Γ: $x^2 + y^2 = a^2$. Dreapta prin M: $Y - a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} = mX$ e tangentă la Γ dacă $m = \pm\mathrm{sh}\frac{x}{a}$. Tangenta în P are panta $y' = \mathrm{sh}\frac{x}{a}$. Sau: tangentele la Γ de pantă y_P' taie pe Oy în $M(0, y_P)$, $M'(0, -y_P)$.

23 Fie un cerc mobil Γ (de rază variabilă) tangent în O lui Ox; se ia pe Γ un arc $\widehat{OP}$ de lungime constantă a. Să se arate: a) Locul C al lui P e o curbă transcendentă, numită *cohleoidă*. b) Tangenta în P la C trece prin simetricul A' față de OP, al lui $A = C \cap Ox$ (diferit de O). c) Punctele lui C în care tangenta e paralelă cu Ox se află pe cercul Γ_0 de centru A și de rază a.

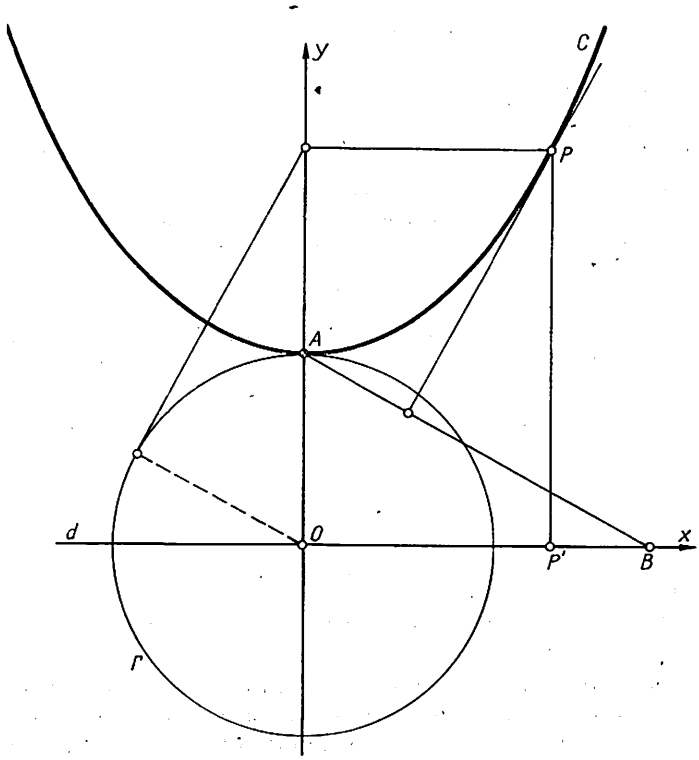


Fig. 86

R. a) Fie (fig. 87): $\Omega(0, \lambda)$ centrul lui Γ, iar $\widehat{OP} = \lambda\varphi = a$ și $A(a, 0)$; însă $\varphi = 2\theta$, deci $\lambda = a/2\theta$, iar $OP = 2\lambda \cos(\pi/2 - \theta)$, încît C are ecuația polară

$$\rho = a\,\frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{53}$$

b) Luînd ecuația (3) pentru C, tangenta în $P(\rho, \theta)$: $(2\theta x - a \sin 2\theta)/(2\theta \cos\theta - \sin 2\theta) = (\theta y - a\sin^2\theta)/(\theta \sin 2\theta - \sin^2\theta)$ conține pe $A'(a, 2\theta) = (a\cos^2\theta, a \sin 2\theta)$. *Obs.* b_1) O dreaptă prin O taie pe C într-o mulțime infinită de puncte, ale căror tangente trec prin A'. b_2) $A' \in$ cerc $\gamma(0; a)$; reciproc: punctele de contact ale tangentelor la C din $A' \in \gamma$ sînt pe bisectoarea lui $\widehat{A'OA}$ și sînt centrele de greutate ale arcelor AA' de pe γ. Deci: Locul centrelor de greutate ale arcelor unui cerc care au o origine comună într-un punct fix al cercului e o cohleiodă. c) $y' = 0$, deci $2\theta - \operatorname{tg}\theta = 0$; punctul de contact $(a \sin 2\theta/2\theta, a \sin^2\theta/\theta)$ e pe Γ_0.

24 Să se determine curbele pentru care unul din segmentele *tangentă* PT, *normală* PN, *subtangentă* $P'T$ sau *subnormală* $P'N$ are lungimea constantă (fig. 88).

R. a) $PT^2 = y^2(1 + y'^2)/y'^2 = a^2$. Cum $y' = \operatorname{tg}\theta$, deci $dx = \operatorname{ctg}\theta\, dy$, ecuația devine $y = \pm a \sin\theta$; de unde $dy = \pm a\cos\theta\, d\theta$, încît $dx = \pm a \operatorname{ctg}\theta \cos\theta\, d\theta = \pm a\,(1/\sin\theta - \sin\theta)d\theta$. Obținem (fig. 89) *tractricea* (sinonim: *tractoarea*):

(54) $$x = \pm a\left(\cos\theta + \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + C,\ y = \pm a\sin\theta;\ x = \pm a\left(\ln\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right) + C.$$

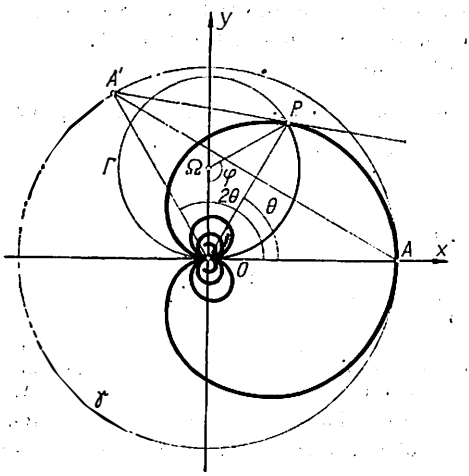


Fig. 87

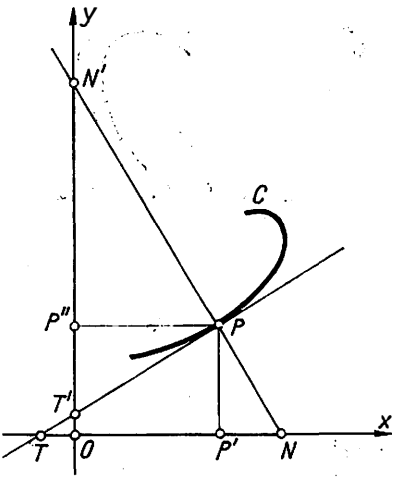


Fig. 88

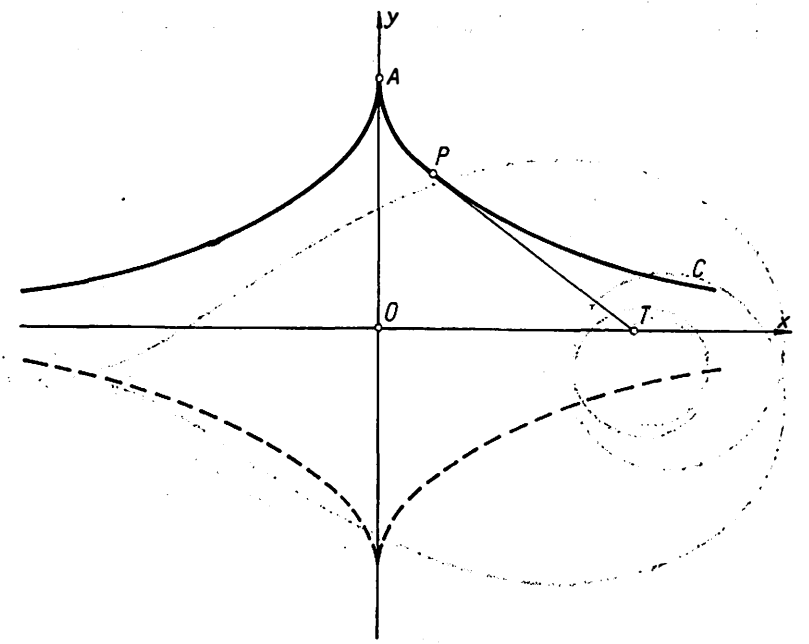


Fig. 89

b) $PN = \pm y\sqrt{1 + y'^2} = R$; integrînd, găsim *cercul* $x - C = \mp\sqrt{R^2 - y^2}$. c) $P'T = -y/y' = -1/a$; obținem *curbele exponențiale* $y = Ce^{ax}$. *Obs.* $T'P''$ (subtangenta relativă la Oy) $= xy' = a$ conduce la *curbele logaritmice* $y = a \ln Cx$; reciproca e adevărată. d) $P'N = yy' = p$; soluția e *parabola* $y^2 + 2p(x + C)$. Deci: *subnormala unei parabole, relativă la axa ei, e egală cu parametrul p.*

25 Fie T şi N punctele în care tangenta şi normala în P la curba (4) taie perpendiculara în polul O pe raza vectoare OP. Să se calculeze lungimile *tangentei polare* PT, *normalei polare* PN, *subtangentei polare* OT şi *subnormalei polare* ON. *Apl.* a) Să se calculeze subnormala polară a melcului Pascal (18). b) Să se arate că produsul dintre tangenta polară şi subnormala polară la lemniscata (21) e constant. c) Să se găsească curbele care au segmentul PT, PN, OT sau ON constant.

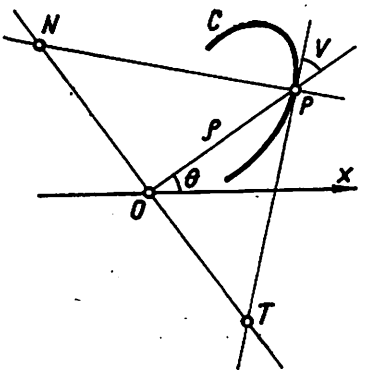


Fig. 90

R. Din triunghiul dreptunghic POT şi PON (fig.90):

$$OT = OP\,\mathrm{tg}V,\quad ON = OP\,\mathrm{ctg}\,V,\quad \mathrm{tg}V = \frac{\rho}{\rho'} \text{ şi}$$

$$PT = \frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2},\quad PN =$$

(55)

$$= \sqrt{\rho^2+\rho'^2},\quad OT = \rho^2/\rho'^2,\quad ON = \rho'.$$

Apl. a) $ON = -p\sin\theta$ (egală cu coarda cercului de bază dusă prin pol şi perpendiculară pe raza vectoare); proprietate în construirea normalei. b) $PT\cdot ON = 2a^2$. c) $PT = a$ se scrie $\pm\sqrt{a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho/\rho^2 = \mathrm{d}\theta$. Punînd $\pm\sqrt{a^2-\rho^2}/\rho^2 = \mp\,(-\sqrt{a^2-\rho^2}/\rho - \rho/\rho\sqrt{a^2-\rho^2}+\rho/a\sqrt{1-\rho^2/a^2})$, obţinem *tractricea polară* (sinonim: *tractoarea polară*) de ecuaţie (fig. 91)

(56) $$\theta = \mp\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{a^2-\rho^2} - \arccos\frac{\rho}{a}\right) \text{ sau } \theta = \mp\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{a^2-\rho^2} - \arcsin\frac{\rho}{a}\right);\quad \begin{cases}\rho = a\cos t\\ \theta = \mathrm{tg}t - t\end{cases}.$$

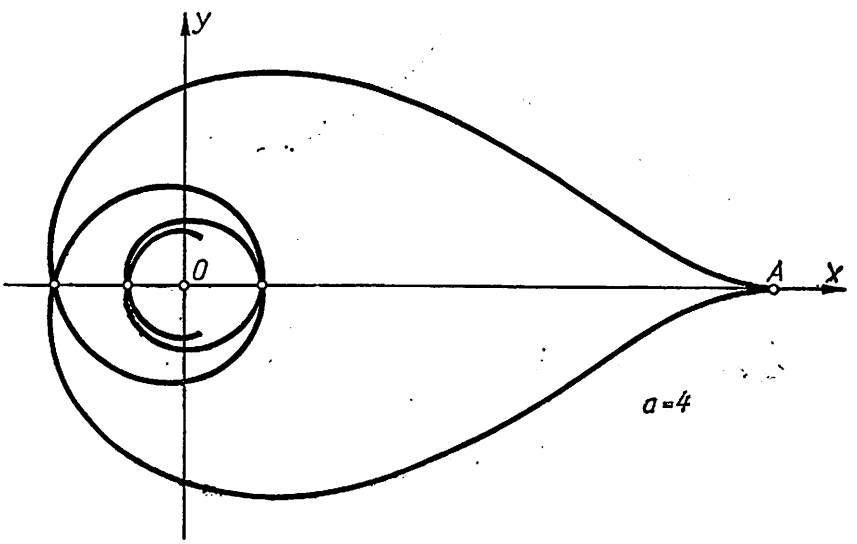


Fig. 91

Curba e simetrică în raport cu axa polară; $A\,(a, 0)$ e un punct singular (punct cuspidal). Din $PN = a$, găsim $\mathrm{d}\rho/\sqrt{a^2-\rho^2} = \mathrm{d}\theta$ sau $\theta - \theta_0 = \arcsin\frac{\rho}{a} = -\arccos\frac{\rho}{a}$; adică un *cerc* de diametru a, trecînd prin 0; $\rho = a\sin(\theta-\theta_0)$ sau $\rho = a\cos(\theta-\theta_0)$. Din $OT = -a$, deducem *spirala*

hiperbolică $\theta - \theta_0 = a/\rho$; prin rotație θ_0 în jurul lui O, se ajunge la (39). Pe perpendiculara prin O pe OP, în sens negativ, se ia $OT = a$; PT e tangenta în P la spirală. Din $ON = a$ obținem *spirala Arhimede* $\rho = a(\theta - \theta_0)$ sau $\rho = a\omega$ $(\theta - \theta_0 = \omega)$, rotind pe Ox cu θ_0 în jurul lui O). Construcția normalei în P: pe perpendiculara prin O pe OP luăm $ON = a$; PN e normala.

26 Fie O un punct fix pe o dreaptă dată d. Perpendiculara prin punctul P al unei curbe C pe d taie paralele prin O la tangenta și normala în P la C respectiv în P_1 și P_2; cînd P descrie pe C, se numește *curba tangentelor* locul Γ_1 al punctului P_1 și *curba normalelor* mulțimea Γ_2 a punctelor P_2. Să se arate că, asociind lui $\bar{C}: y = f(x)$ curba $C: y = -\int dx/f'(x)$, în raport cu O și Ox, curba tangentelor Γ_1 a lui C coincide cu curba normalelor $\bar{\Gamma}_2$ a lui $\bar{C}$, iar curba normalelor Γ_2 a lui C e identică cu curba tangentelor $\bar{\Gamma}_1$ a lui $\bar{C}$; curbele C și $\bar{C}$ se zice că sînt *curbe (plane) conjugate*.

R. Cu $d \equiv Ox$, după cum $C: y = f(x)$ sau $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, găsim

(57) $\Gamma_1: y = xf'(x)$, $\Gamma_2: y = -x/f'(x)$ sau $\Gamma_1: X = x$, $Y = xy'/x'$, $\Gamma_2: X = x$, $Y = -xx'/y'$.

27 Se cere: a) Fiind date două curbe în coordonate polare, să se afle condiția ca ele să se taie ortogonal; aplicație cînd $C_i: \rho_i = a_i e^{b_i\theta}$ $(i = 1, 2)$. b) Să se determine curbele care taie razele vectoare din polul O sub un unghi constant; în acest caz, punctele de contact ale tangentelor dintr-un punct dat P_0 se află pe un cerc ce trece prin polul O și prin punctul P_0.

28. Fie concoida ordinară a curbei $\rho = f(\theta)$ în raport cu polul O și intervalul l. În ce caz normalele prin punctele corespondente P și M (de același unghi polar) și perpendiculara în O pe PM sînt concurente?

R. În cazul concoidelor Nicomede. Căci, fie $C: \rho = f(\theta) \pm l$; în P $(\rho = f + l, \theta) \in C$ avem $\operatorname{tg} V = (f + l)/f'$. Din triunghiurile dreptunghice MOQ și POQ (fig. 92) rezultă $OQ = f\operatorname{tg}\theta$ și $OQ = (f + l)\operatorname{tg}\alpha$, deci $\operatorname{tg}\alpha = f\operatorname{tg}\theta/(f + l)$. Dacă $V + \alpha = \pi/2$, obținem (ca și pentru $P'(\rho_1 = f - l, \theta)$) ecuația diferențială $f' = f\operatorname{tg}\theta$, deci $f(\theta) = a/\cos\theta$.

29 Să se găsească *curba isoptică* Γ asociată unei curbe C, adică locul vîrfurilor tuturor unghiurilor care au aceeași măsură θ și ale căror laturi sînt tangente la C. Dacă $\theta = \pi/2$, Γ se numește *curbă ortoptică* a lui C. *Apl.* a) Să se afle curba isoptică a unei conice. b) Să se determine curba ortoptică a cubicei $y = x^3$. c) Cazul unei cicloide normale.

R. Tangenta (în P la C), făcînd unghiul ω cu Ox (fig. 93), are ecuația

(58) $y\cos\omega - x\sin\omega = f(\omega)$ cu $f(\omega)$ determinată de ecuația lui C.

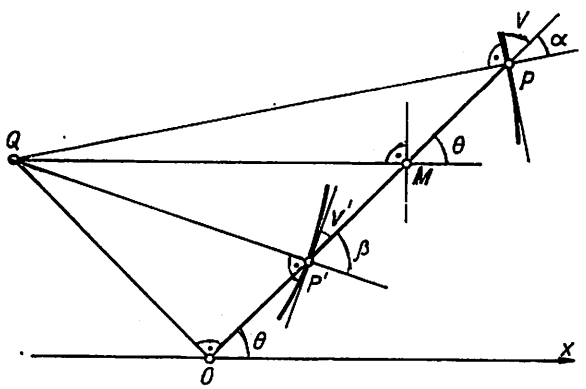


Fig. 92

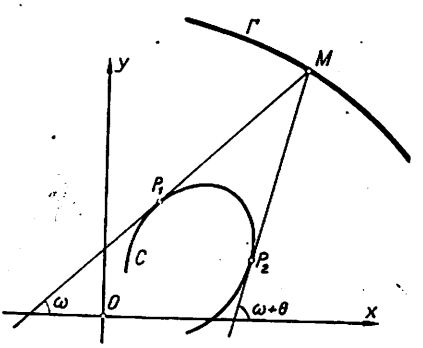


Fig. 93

Deci ecuațiile curbei isoptice Γ sînt

(59) $x\sin\theta = f(\omega)\cos(\omega+\theta) - f(\omega+\theta)\cos\omega$, $y\sin\theta = f(\omega)\sin(\omega+\theta) - f(\omega+\theta)\sin\omega$.

Sau, pentru o curbă algebrică C_n de ecuație tangențială $F(u, v) = 0$ (obținută din condiția că dreapta $ux + vy + 1 = 0$ e tangentă lui C_n). Ecuația pantelor tangentelor din $M(X, Y)$ la C_n: $F(m/(Y - mX), -1/(Y - mX)) = \Phi_n(m) = 0$ se obține introducînd coordonatele plückeriene ale dreptei prin M: $u = m/(Y - mX)$, $v = -1/(Y - mX)$ în $F(u, v) = 0$. Prin eliminarea lui m_1 și m_2 din sistemul

(60) $$\sum_{i=1}^{n} m_i = -a_1/a_0, \ldots, \prod_{i=1}^{n} m_i = (-1)^n a_n/a_0, \operatorname{tg}\theta = (m_2 - m_1)/(1 + m_1m_2),$$

se obține Γ. *Obs.* Avem $(m_2 - m_1)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2$. *Apl.* a) *Conica cu centru*

(61) $$x^2/a^2 + \varepsilon y^2/b^2 - 1 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1); \quad a^2u^2 + \varepsilon b^2v^2 - 1 = 0.$$

Deci $\Phi_2(m) = (a^2 - X^2)m^2 + 2XYm + \varepsilon b^2 - Y^2 = 0$. Din (60), revenind la coordonatele curente și notînd $A = a^2$, $B = \varepsilon b^2$, găsim că Γ e spirica lui Perseus (19''). Ortoptica e cercul lui Monge: $x^2 + y^2 = A + B$. *Conica fără centru*

(62) $$y^2 = 2px; \quad pv^2 - 2u = 0.$$

Isoptica: hiperbola $4(y^2 - 2px)\operatorname{ctg}^2\theta = (2x + p)^2$; ortoptica: directoarea $2x + p = 0$. b) Dreapta (58) e tangentă cubicei dacă $f^2(\omega) = 4\sin^3\omega/27\cos\omega$; atunci $f^2(\omega + \pi/2) = -4\cos^3\omega/27\sin\omega$. Găsim $x^2 + y^2 = -\frac{8}{27}\operatorname{ctg}\omega$; eliminînd produsul $f(\omega)\,f(\omega + \pi/2)$ din xy și y^2, obținem $xy - y^2\operatorname{ctg}2\omega = -2/27$. Deci

$$\Gamma: 27^2(x^2 + y^2)y^2 + 8(27xy + 2) = 0.$$

Sau: $F(u, v) = 4u^3 + 27v = 0$; $\Phi_3(m) = 4m^3 - 27X^2m^2 + 54XYm - 27Y^2 = 0$. Din $m_1m_2m_3 = 27Y^2/4$ și $m_1m_2 + 1 = 0$ rezultă $m_3 = -27Y^2/4$; deci $\Gamma: \Phi_3(m_3) = 0$. c) Fie C: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; ortoptica $\Gamma_1: x = a\left(\pi/2 + t - \frac{\pi}{2}\cos t\right)$, $y = 2 + \frac{\pi}{2}\sin t$. Scriind $C: x = a(t - \sin t)$, $y = a\cos t$, fie $P_t(t_t)$ punctele de contact ale lui C cu laturile unghiului θ ($t = 1, 2$). Tangenta în P_t (la C): $x\cos(t_t/2) - y\sin(t_t/2) + a(2\sin(t_t/2) - t_t\cos(t_t/2)) = 0$ face cu Ox unghiul $(\pi - t_t)/2$ iar $\theta = (t_2 - t_1)/2$. Notînd $\omega = (t_1 + t_2)/2$, deducem $t_1 = \omega - \theta$, $t_2 = \omega + \theta$. Rezolvînd ecuația tangentelor în x și y, găsim isoptica $\Gamma_2: x\sin\theta = a(\omega\sin\theta - \theta\sin\omega)$, $y\cos\theta = a(2\cos\theta - \theta\cos\theta - \theta\cos\omega)$; împărțind cu $\sin\theta$ și făcînd o translație de axe, găsim $\Gamma_2: x = a(\omega - \theta\sin\omega/\sin\theta)$, $y = a(1 - \theta\cos\omega/\sin\theta)$, numită *cicloida (alungită) a lui Delaguire*.

30 Fie două puncte fixe O și Ω. Cînd punctul M descrie o curbă C, locul Γ al punctelor P și P' de intersecție a secantei $M\Omega$ cu cercul $\gamma(M; OM)$ se numește *strofoidala curbei C în raport cu polul O și punctul Ω*; dreapta $d = O\Omega$ e *baza* strofoidalei, iar mărimea $l = O\Omega$ e *modulul* ei. Dacă Ω e punctul de la infinit al bazei d ($l \to \infty$), obținem *strofoidala specială* a lui C. Să se arate: a) Strofoidala unei drepte trecînd prin polul O, numită *strofoidă*, are un punct multiplu; să se găsească tangentele în acest punct. b) Strofoidala specială a unei drepte e o hiperbolă.

R. Fie (fig. 94): $\Omega(l, 0)$ și $C: x = f(t)$, $y = g(t)$; deci $OM = \sqrt{f^2 + g^2}$ și $\Omega M: (x - l)/(f - l) = (y - g)/g$. Însă $MP = MP' = OM$; deci *strofoidala* (strofoidala *specială*) e

(63) $$x = f \pm \frac{(f - l)\sqrt{f^2 + g^2}}{\sqrt{(f - l)^2 + g^2}}, \quad y = g \pm \frac{g\sqrt{f^2 + g^2}}{\sqrt{(f - l)^2 + g^2}} \quad (x = f \pm \sqrt{f^2 + g^2}, \; y = g).$$

Cînd $f(t) = l/2$: $\Omega \in \Gamma$, cînd $g(t) = 0$: $O \in \Gamma$, $A_1(2f, 0) \in \Gamma$. a) C e dreapta (24) cu $x_0 = y_0 = 0$. Din ecuația dreptei ΩM: $t = -ly/((x - l)\sin\alpha - y\cos\alpha)$; din (63_1), găsim că *strofoida e cubica circulară*

(64) $(x^2 + y^2)(x\sin\alpha - y\cos\alpha) - l(x^2\sin\alpha - 2xy\cos\alpha - y^2\sin\alpha) = 0$; $\rho = \dfrac{\sin(2\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)}$,

numită *strofoida oblică* dacă $\alpha \neq \pi/2$ (fig. 95) sau *strofoida dreaptă* cînd $\alpha = \pi/2$ (fig. 96). Căci, în triunghiurile OPM și $O\Omega M$: $OP/\sin 2(\alpha - \theta) = OM/\sin(\alpha - \theta)$ și $O\Omega/\sin 2(\alpha - \theta) = OM/\sin(\alpha - 2\theta)$. Obținem parametrizarea

$$(64') \qquad x = \frac{l(\sin\alpha - 2t\cos\alpha - t^2\sin\alpha)}{(1+t^2)(\sin\alpha - t\cos\alpha)},\quad y = \frac{lt(\sin\alpha - 2t\cos\alpha - t^2\sin\alpha)}{(1+t^2)(\sin\alpha - t\cos\alpha)}.$$

Pentru $t = (-\cos\alpha \pm 1)/\sin\alpha$, se obține $x = y = 0$; deci O *e un nod*; tangentele în O la Γ: $x^2\sin\alpha - 2xy\cos\alpha - y^2\sin\alpha = 0$ sînt ortogonale, fiind OB și OD, cu B și D punctele unde paralela δ prin Ω la C taie cercul $\gamma_0(\Omega; l)$. Luînd polul O și perpendiculara pe C ca axă, *strofoida oblică* are ecuația

$$(64'') \qquad \rho = \sin(\alpha + 2\theta_1)/\cos\theta_1;\ x(x^2+y^2) - l[(x^2-y^2)\sin\alpha + 2xy\cos\alpha] = 0,$$

cu $\theta_1 = \theta + \pi/2 - \alpha$. Alte generări: a_1) Printr-un punct fix A și prin vîrful O al unui unghi drept XOY trec cercuri variabile care taie laturile unghiului în R și S. Locul proiecției P_1 a lui O pe RS e o strofoidă (dreaptă sau oblică, după cum A e sau nu e pe bisectoarea unghiului drept); cu laturile unghiului ca Ox și Oy iar $A(a, b)$, avem

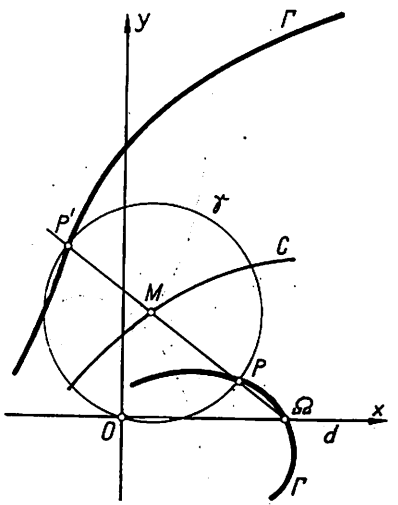


Fig. 94

$$(65) \qquad (x^2+y^2)(bx+ay) = (a^2+b^2)xy;$$
$$x = \frac{(a^2+b^2)t}{(1+t^2)(b+at)},\quad y = \frac{(a^2+b^2)t^2}{(1+t^2)(b+at)},$$

fiind o strofoidă dreaptă cînd $a = b$. Tangentele în nodul O sînt axele. Cercul de diametru OA se zice cerc de bază al strofoidei. Luînd bisectoarele unghiului drept ca axe Ox și Oy, ecuația strofoidei e

$$(65') \qquad 2(ax - by)(x^2+y^2) = (a^2+b^2)(x^2-y^2);\ \text{cînd } b = 0,\ \text{strofoida e dreaptă.}$$

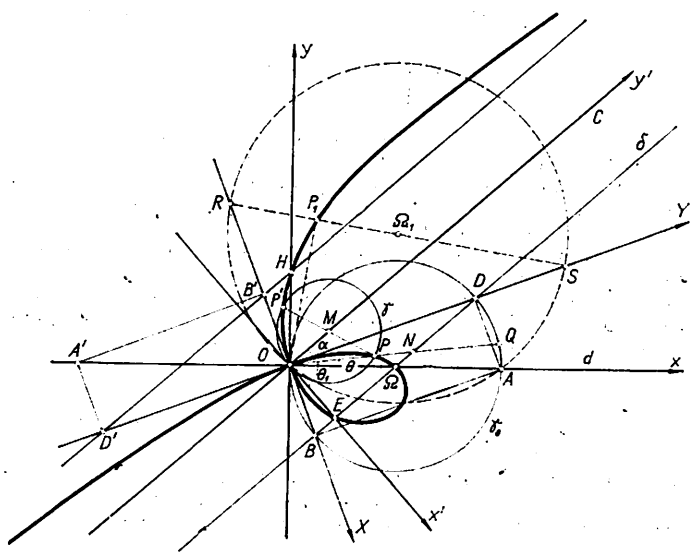


Fig. 95

a_2) Fie un cerc fix $\gamma_0(\Omega; l)$, un punct fix O pe γ_0 și o dreaptă fixă δ prin Ω. Pe OQ, cu Q descriind pe γ_0, se ia P astfel ca $OP = NQ$, unde $N = \delta \cap OQ$. Locul lui P e o strofoidă (dreaptă sau oblică, după cum e sau nu e perpendiculară pe $O\Omega$). *Obs. Strofoida dreaptă* e dată de

$$(66) \qquad \rho = \frac{l\cos 2\theta}{\cos\theta};\ x^2(x-l) + y^2(x+l) = 0,\quad x = \frac{l(1-t^2)}{1+t^2},\ y = \frac{lt(1-t^2)}{1+t^2},$$

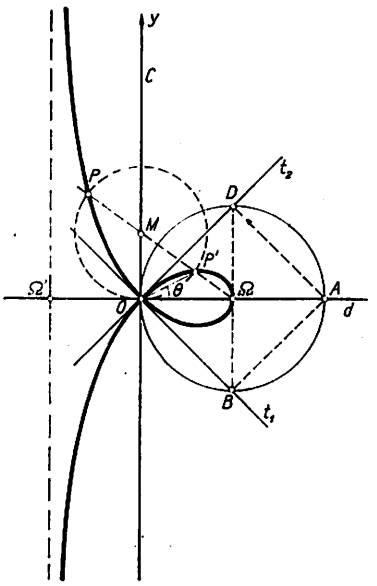


Fig. 96

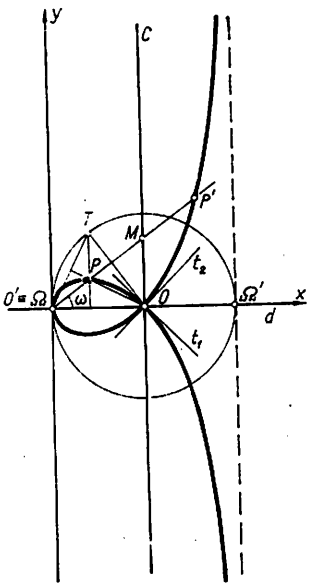


Fig. 97

cînd $d = Ox$ și $C = Oy$; ea e formată din 2 ramuri date de ecuația (fig. 97)

$$(66') \quad \rho = l(1 + \varepsilon \sin\omega)/\cos\omega \text{ sau } \rho = l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\frac{\omega}{2}\right);\ (x^2+y^2)(x-2l) + l^2x = 0 (\varepsilon = \pm 1).$$

P și P', date de (66') cu $\varepsilon = \pm 1$ și corespunzînd aceluiași ω, se numesc *puncte conjugate*; atunci $\Omega T + \Omega T' = 2l$, $1/\Omega N + 1/\Omega N' = 2/l$, cu ΩT, $\Omega T'$ și $\Omega N, \Omega N'$ subtangentele și subnormalele polare relative la P, P'. Strofoida dreaptă se obține și astfel: a'_1) Locul ortocentrului triunghiului $O\Omega T$, cu T (punct curent) $\in \gamma_1(O; l)$ · a'_2) F și F' fiind simetrice față de o dreaptă C, locul proiecției lui F' pe perpendiculara în M pe FM, unde M e intersecția lui C cu o dreaptă prin F; nodul e în F' iar vîrful în mijlocul lui FF'. a'_3) Locul punctelor de contact al tangentelor duse dintr-un punct fix O al unei drepte d la un cerc de rază dată care se rostogolește (fără alunecare) pe d.

Fie un fascicul de cercuri γ. O dreaptă d, trecînd prin A (fix) de pe linia centrelor a lui γ, e tangentă la două cercuri γ_1 și γ_2 din γ. Punctele de contact $M_i = d \cap \gamma_i$ ($i = 1, 2$) descriu o cubică circulară, numită *panstrofoidă*. Raportînd γ la linia centrelor și axa radicală, avem $A(a, 0)$; cu $b = BC/2$, B și C fiind punctele în care Oy taie pe γ:

$$\Gamma: x(x^2+y^2) + a(x^2-y^2) + b^2(x+a) = 0 \quad \text{(fig. 98)}.$$

După cum γ e un fascicul eliptic sau hiperbolic, b e real sau imaginar ($b \neq 0$); atunci se zice că Γ e *prima* sau *a doua panstrofoidă*. Cînd γ e un fascicul parabolic, deci $b = 0$, Γ e o *strofoidă dreaptă*.
b) Strofoidala specială a dreptei (24) e hiperbola echilateră (fig. 99a)

$$x^2 \sin\alpha - 2xy\cos\alpha - y^2\sin\alpha - 2(x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha)x = 0.$$

Obs. Dacă $C \perp d$, fie $d = Ox$ şi $C : x = a$; obţinem cubica circulară (fig. 99b)

$$(x - l)\,[(x^2 + y^2)x - (2a + l)x^2 - (2a - l)y^2 + 2alx] = 0.$$

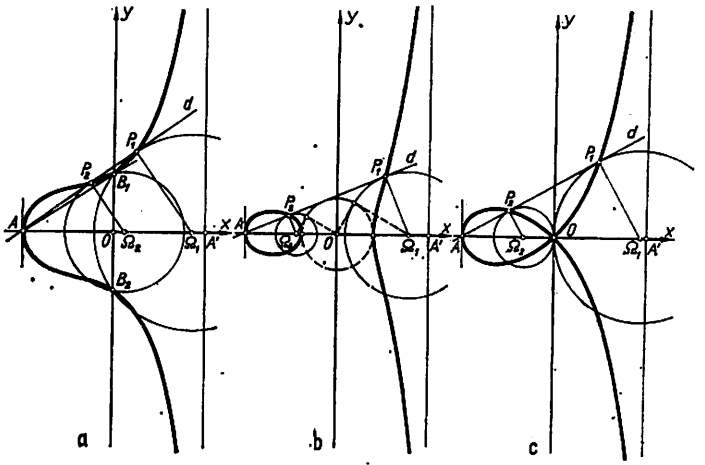


Fig. 98

31 Fie OAB un triunghi dreptunghic ($\widehat{OAB} = 90°$), M un punct mobil pe cateta OA şi P proiecţia lui O pe perpendiculara d în M pe MB. Locul lui P e o cubică circulară, numită *ofiuridă*. Să se arate că are un punct multiplu şi să se găsească tangentele în acest punct.

R. Fie (fig. 100) : $A\,(0, -a)$, $B\,(b, -a)$, $M\,(0, t)$; ofiurida are ecuaţia

$$(67) \qquad x = -\frac{bt\,(a + t)}{(a + t)^2 + b^2},\quad y = \frac{t(a + t)^2}{(a + t)^2 + b^2};\quad x\,(x^2 + y^2) + y\,(ax + by) = 0.$$

Pentru $t' = 0$ şi $t'' = -a$ obţinem $x = y = 0$; deci O *e un nod*, cu tangentele Ox şi ipotenuza OB. Dacă $A = O\,(a = 0)$, obţinem cisoida lui Diocles.

32 Să se afle ecuaţia *podarei unei curbe C în raport cu un punct (fix) Ω* (sinonim : *podara de punct Ω a lui C*), adică ecuaţia locului Γ_1 al piciorului perpendicularei din Ω pe tangenta în P la C, cînd P descrie pe C. *Aplicaţie* : podara unei conice.

R. Fie (fig. 101) $C : x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$ şi $\Omega\,(a, b)$. Podara are ecuaţia

$$(68) \qquad X = x - \frac{x'[x'(x - a) + y'\,(y - b)]}{x'^2 + y'^2},\quad Y = y - \frac{y'\,[x'\,(x - a) + y'\,(y - b)]}{x'^2 + y'^2}$$

Cînd $\Omega = 0$, din (68) obţinem

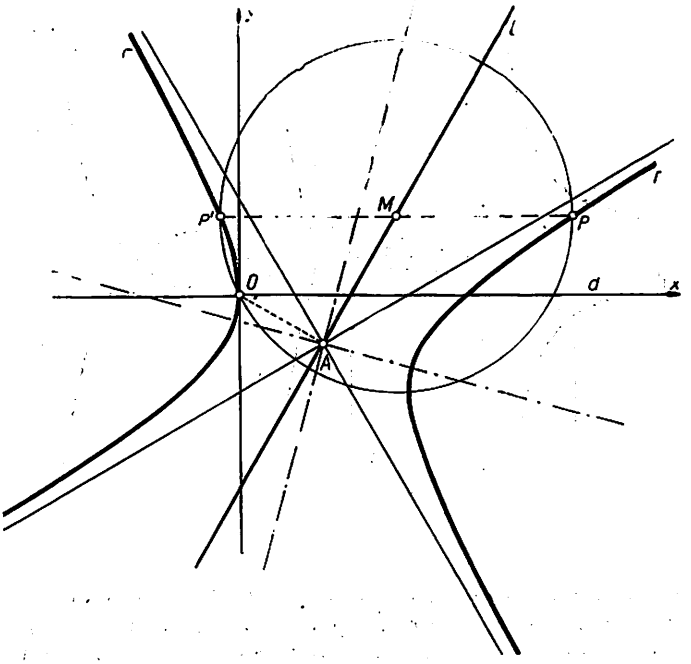
$$(68') \qquad X = x^2\,(y/x)'\,y'/(x'^2 + y'^2),\quad Y = -x^2\,(y/x)'x'/(x'^2 + y'^2).$$

Atunci, pentru $C : \rho = \rho(\theta)$ rezultă (căci C admite parametrizarea (3))

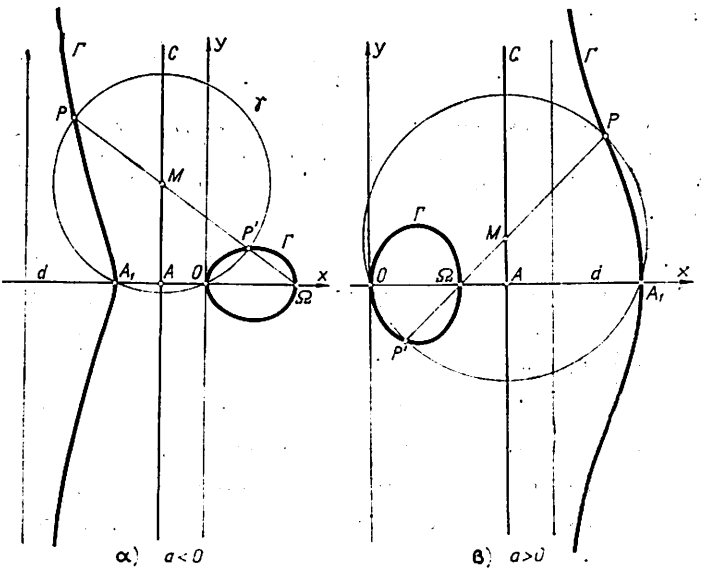
$$(68'') \qquad X = (\rho \sin \theta)'/(1 + (\rho'/\rho)^2),\quad Y = -\,(\rho \cos \theta)'/(1 + (\rho'/\rho)^2).$$

Lui $P(\rho, \theta) \in C$ îi corespunde $P_1(\rho_1, \theta_1) \in \Gamma_1$, situat pe cercul γ de diametru OP; avem (fig. 101 b)

$$(68''') \qquad \theta_1 = V - \pi/2 + \theta,\ \rho_1 = \rho \sin V = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},\ V_1 = V,\ \frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$



a



b

Fig. 99

Tangenta în P_1 la γ e tangenta în P_1 la Γ_1; normala în P_1 la Γ_1 trece prin mijlocul M al lui OP. Dacă $C: F(x, y)=0$, fie d perpendiculara în $P_1(X, Y) \in R^2$ pe ΩP_1; deci eliminăm pe x, y din $P(x, y) \in C$, $P \in d$ și d e paralelă cu tangenta în P la C, adică din sistemul

$$(68^{IV}) \quad F(x, y) = 0, \ (X - x)(X - a) + (Y - y)(Y - b) = 0, \ F_x/(X - a) = F_y/(Y - b).$$

În raport cu un același pol Ω, se poate defini *podara* Γ_p *de ordinul p a curbei* C ca fiind podara podarei Γ_{p-1} de ordinul $p-1$ a lui C; cînd $\Omega = 0$, avem

$$(68^{V}) \quad \theta_p = p(V - \pi/2) + \theta, \ \rho_p = \rho \sin^p V, \ V_p = V.$$

Apl. Fie (61). Din (68_3^{IV}): $x = \lambda a^2 (X - \alpha)$, $y = \varepsilon\lambda b^2 (Y - \beta)$; cu (68_2^{V}) determinăm pe λ, încît (renotînd tot cu x, y) podara are ecuația

$$\Gamma: [x(x - \alpha) + y(y - \beta)]^2 = \tag{69}$$
$$= a^2(x - \alpha)^2 + \varepsilon b^2 (y - \beta)^2.$$

Cazuri (fig. 102a,b): $\Omega (c_1 = \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}, 0)$ e un focar, $\Gamma: [(x - c_1)^2 + y^2](x^2 + y^2 - a^2) = 0$ (cercul principal); $\Omega \equiv O$ (centrul conicei), Γ e lemniscata Booth (19′) cu $k = c^4$, $c = c_1/2$, $h = (a^2 + \varepsilon b^2)/2$, care trece prin centrul și vîrfurile conicei; $\Omega(a, 0)$ e un vîrf (real) al lui C, atunci $\Gamma: (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x - a)^2 + \varepsilon b^2 y^2$ sau (după translația $\overline{O\Omega}$) $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2 x^2 + \varepsilon b^2 y^2$. Cînd C e cerc ($a = b$, $\varepsilon = 1$), obținem o cardioidă.

Fie (62). Din $(68_{1.3}^{V})$ deducem $x = p(Y - \beta^2)/2 (X - \alpha)^2$, $y = -p(Y - \beta)/(X - \alpha)$; deci

$$\Gamma: x(x - \alpha)^2 + y(x - \alpha)(y - \beta) + \tag{70}$$
$$+ p(y - \beta)^2/2 = 0.$$

Cazuri (fig. 102c): $\Omega (p/2, 0)$ e focar, $\Gamma: [(x - p/2)^2 + y^2]x = 0$ e tangenta în vîrf; cînd $\Omega (0, \beta)$ e pe tangenta în vîrf, Γ e ofiurida (67) cu $a = \beta$, $b = p/2$ și nodul în Ω, fiind cisoida (27) cu* $a = -p/4$ dacă $\beta = 0$ (Ω e vîrf al parabolei); $\Omega (-p/2, 0) = \delta$ (directoare) $\cap Ox$, $\Gamma: 4(x + p)(x^2 + y^2) + p^2 x = 0$ e o strofoidă**; cînd $\Omega \in \delta$, Γ e o strofoidă oblică.

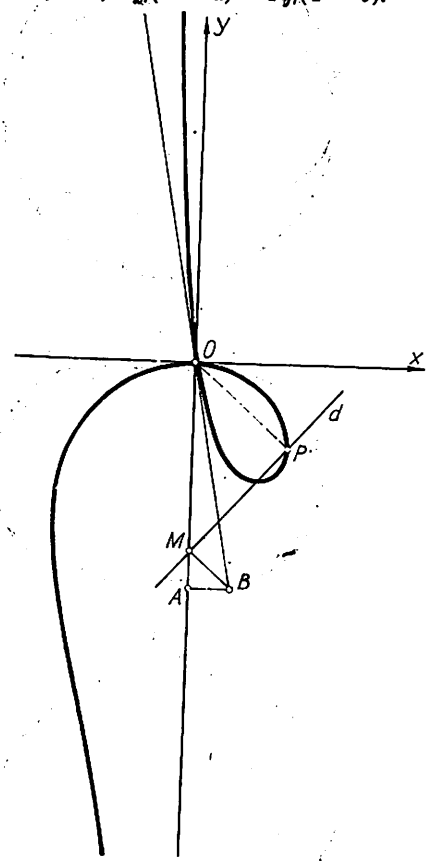


Fig. 100

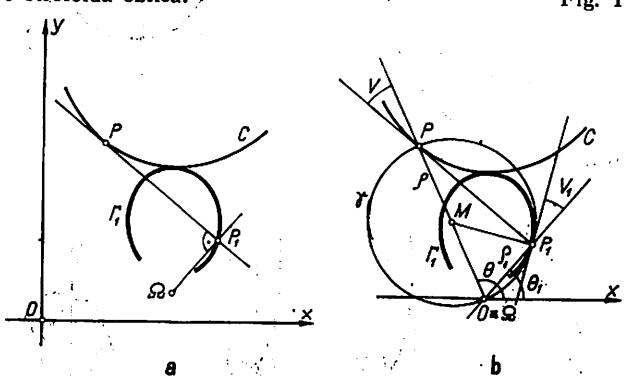


Fig. 101

* O e punct singular, iar directoarea parabolei e asimptotă.

** Prin translația $x = X - p/2$, $y = Y$ (ducînd Oy peste directoare), găsim (66) cu $l = p/2$. Tangentele în Ω la Γ sînt cele din Ω la parabolă.

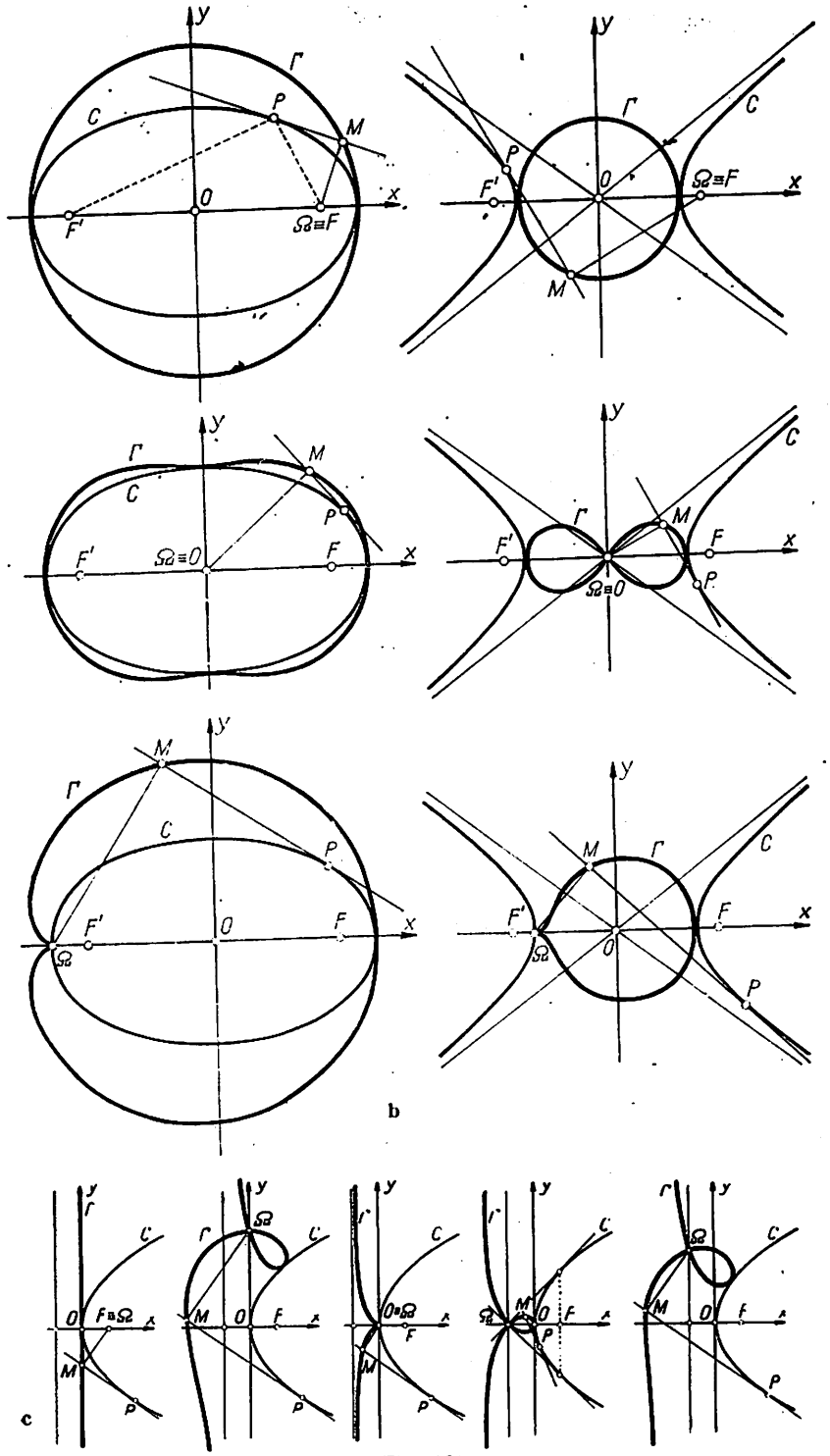


Fig. 102

33 Fie M un punct al unei curbe C, M' proiecția lui M pe o dreaptă fixă d și P proiecția lui M' pe tangenta în M la C (fig. 103); locul Γ al lui P, cînd M descrie pe C, se numește *podara curbei C în raport cu dreapta d* (sinonim: *podara de dreaptă d a lui C*). Se cere: a) Podara de dreaptă Ox a lui C; aplicație: lănțișorul (52). b) Curbele podare ortogonale.

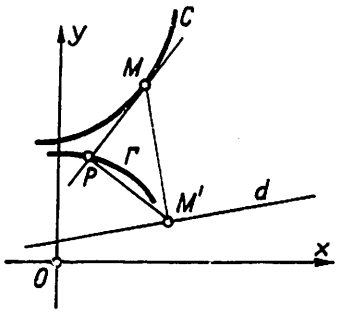


Fig. 103

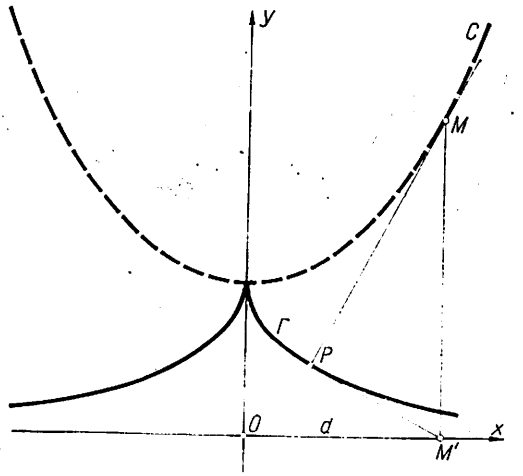


Fig. 104

R. a) Fie $C: x = f(t), y = g(t)$; $\Gamma: x = f - gf'g'/(f'^2 + g'^2)$, $y = gf'^2/(f'^2 + g'^2)$. *Apl.* Γ: $x = t - a\,\mathrm{th}\,\frac{t}{a}$, $y = a/\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}$, adică *tractricea* (54). b) Fie $C: y = y(x)$. Tangentele în $M(x, y)$ la C și în $P(X, Y)$ la Γ sînt ortogonale dacă $X' + y'Y' = 0$; obținem ecuația diferențială $yy'' = y'^2 + 1$. Luînd $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$, se obține $dy/y - p\,dp/(1 + p^2)$ cu soluția generală $p^2 + 1 = C^2y^2$; de unde ecuația diferențială $dy/\sqrt{C^2y^2 - 1} = dx$ cu soluția generală $y = (C_1e^{Cx} + 1/C_1e^{Cx})/2C$. *Obs.* Pentru $C = 1/a$, $C_1 = 1$ obținem lănțișorul (52); deci: *Lănțișorul și tractricea sînt curbe ortogonale* (fig. 104). ▫

34 Dacă A_i și B_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt intersecțiile unei cubice Γ cu dreptele a și b, atunci dreptele $d = A_1B_1$, $e = A_2B_2$ și $f = A_3B_3$ taie pe Γ respectiv în C_1, C_2, C_3, care sînt pe aceeași dreaptă c. *Apl.* Tangentele în 3 puncte coliniare de pe Γ retaie pe Γ în 3 puncte coliniare.

35 Să se afle *clasa* unei curbe unicursale, adică numărul de tangente care se pot duce printr-un punct exterior la o curbă. *Apl.* a) Să se arate că punctele de contact ale tangentelor duse dintr-un punct P_0 la o lemniscată se găsesc pe o conică. b) Dintr-un punct P se pot duce trei tangente la hipocicloida lui Steiner.

R. O dreaptă d:

$$ax + by + c = 0;\ \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0;\ \rho = -c/(a\cos\theta + b\sin\theta) \tag{71}$$

intersectează în n puncte o curbă unicursală C_n de gradul n:

$$x = f_1(t)/f_3(t),\ y = f_2(t)/f_3(t),\ f_i(t) \text{ — polinom de grad } n\ (i = 1, 2, 3). \tag{72}$$

d va fi tangentă la C_n dacă rădăcina t e dublă, cînd avem

$$af_1(t) + bf_2(t)] + cf_3(t) = 0,\ af_1'(t) + bf_2'(t) + cf_3'(t) = 0. \tag{73}$$

Din $P(x, y)$ se duc $m \leqslant 2(n-1)$ tangente la C_n; căci ele sînt date de

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{74}$$

Obs. a) Maximum e atins cînd C_n nu are puncte de întoarcere; atunci

$$m = 2(n-1) - k \quad (k - \text{numărul punctelor de întoarcere}). \tag{75}$$

Căci, dacă $P \in C_n$, două din aceste tangente sînt confundate cu tangenta în P la C_n; deci, din P se pot duce $m-2$ alte tangente la C_n (cu puncte de contact distincte de P). b) (71_2) și (74) coincid dacă

$$(f_2 f_3' - f_2' f_3)/\xi_1 = (f_1 f_3' - f_1' f_3)/\xi_2 = (f_1 f_2' - f_1' f_2)/\xi_3; \tag{74'}$$

de unde, eliminînd pe t, se obține *ecuația tangențială* a lui C_n:

$$\Phi_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 \text{ de gradul } m \leqslant 2(n-1). \tag{76}$$

Apl. a) După (74): $f(t) = x_0 t^6 - 3y_0 t^4 + at^3 - 3x_0 t^2 + y_0 = 0$. Conica

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{77}$$

taie pe C_4 în 8 puncte de parametru t date de ecuația $\varphi(t) = a_{11}f_1^2(t) + \ldots + a_{33}f_3^2(t) = 0$ (de grad 8). Determinînd pe $a_{11}, \ldots, a_{33}$ astfel ca $\varphi(t)$ să fie divizibil prin $f(t)$, găsim conica

$$(y_0^2 - 3x_0^2)x^2 - 4(2x_0y_0 - a^2)xy + (x_0^2 - 3y_0^2)y^2 + 2a^2y_0x + 2a^2x_0y + 4a^2x_0y_0 = 0.$$

b) Fie (49), tangenta: $x \sin\frac{t}{2} + y\cos\frac{t}{2} - \frac{a}{3}\sin\frac{3t}{2} = 0$, ecuația tangențială

$$\Phi_3 = \xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{a}{3}(3\xi_1\xi_2^2 - \xi_1^3) = 0 \text{ de grad 3.}$$

Curba (49) e de clasă 3; are 3 puncte de întoarcere. *Obs.* Ecuația $\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$ cu $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ polinom omogen de grad 2 e ecuația tangențială ale unei hipocicloide Steiner.

3. COMPORTAREA CURBEI ÎN VECINĂTATEA UNUI PUNCT ORDINAR

36 Fie $P_0(t_0)$ un punct ordinar al unei curbe $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, iar

$$\frac{y_0'}{x_0'} = \frac{y_0''}{x_0''} = \cdots = \frac{y_0^{(n-1)}}{x_0^{(n-1)}} \neq \frac{y_0^{(n)}}{x_0^{(n)}} \text{ cu } x_0 = x(t_0), \ldots, y_0^{(n)} = y^{(n)}(t_0). \tag{78}$$

Se cere: a) Să se arate că P_0 fiind un *punct cu tangentă nestaționară* $(n = 2)$, C e convexă sau concavă după cum $\eta''(t_0) \gtrless 0$, unde

$$\eta^{(\alpha)}(t) = (x_0' y^{(\alpha)}(t) - y_0' x^{(\alpha)}(t))/x_0' \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{78'}$$

Fie P_0 un *punct cu tangentă staționară de ordin* $m = n - 1$ $(n > 2)$, cînd*

$$\eta''(t_0) = 0, \text{ adică } x_0''/x_0' = y_0''/y_0'; \tag{78''}$$

* După unii autori ([7], p. 315), în condițiile (78) cu $n > 2$, se zice că P_0 e un *punct de inflexiune de specia* $\sigma = n - 2$.

pentru P_0 un *punct de ondulație* ($m = 2p - 1$), C e convexă sau concavă după cum $\eta^{(2p)}(t_0) \gtrless 0$, iar pentru P_0 un *punct de inflexiune* ($m = 2p$), C e convexă (concavă) la stînga lui P_0 și concavă (convexă) de cealaltă parte dacă $\eta^{(2p+1)}(t_0) < 0 (\eta^{(2p+1)}(t_0) > 0)$. b) Ce se poate spune despre P_0 în cazul cînd $y_0' = 0$? *Apl.* a) Curba $C: x = t^2 + at + 1, y = t^3 + t + 1$ (a-const.) are întotdeauna două punte reale de inflexiune. b) Să se găsească punctele de inflexiune ale curbei $C: 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8y = 0$. c) Să se studieze concavitatea curbei C: c_1) $x = \frac{3a}{8}(t^2-1)^2$, $y = at^3$; c_2) $x = \frac{t^2}{t^2-1}$, $y = \frac{t^3}{2(t^2-1)}$; c_3) $y = c\ e^{-ax^2}$ ($a, c > 0$; *curba lui Gauss*).

R. a) Fie $P(t = t_0 + h)$ în o vecinătate $V(P_0)$ a lui P_0 în care C e simplă și regulată de clasă C^n; atunci, avem

$$x(t) = x_0 + \frac{h}{1!}x_0' + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_0 + \theta h),\ y(t) = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0 + \theta h).$$

Tangenta în P_0 la C, neparalelă cu Oy ($x_0' \neq 0$) e $y - y_0 = y_0'(x - x_0)/x_0'$; e tăiată de paralela prin P la Oy în T (fig. 105); deci

$$T\left[x(t),\ y_0 + y_0'(x(t) - x_0)/x_0'\right], \text{ încît } \eta(t) = TP = \frac{h^n}{n!}\eta^{(n)}(t_0 + \theta h).$$

Pentru $t = t_0$ ($h = 0$), $\eta(t_0) = 0$; cum $\eta'(t_0) = 0$, sîntem în unul din cazurile:

I) dacă $n = 2p$, $\eta(t)$ are un extremum în P_0; atunci, în $V(P_0)$, $\eta(t) \gtrless 0$, după cum $\eta(t)$ e minim sau maxim în P_0, C fiind convexă sau concavă. Deci P_0 e un *punct cu tangentă nestaționară* ($p = 1$) sau un *punct de ondulație de ordin* $m = 2p - 1 \geqslant 3$ ($p \geqslant 2$).

II) dacă $n = 2p + 1$, $\eta(t)$ are un semn cînd $h < 0$ și semn contrar cînd $h > 0$, $\eta^{(2p+1)}(t_0 + \theta h)$ păstrînd același semn pentru orice h. Deci P_0 e un *punct de inflexiune de ordin* $m = 2p \geqslant 2$ ($p \geqslant 1$). *Obs.* a_1) Rădăcinile ecuației (78″) dau punctele cu tangență staționară. a_2) Dacă tangenta în P_0 la C e paralelă cu Oy, deci $y_0' \neq 0$, $x_0^{\alpha} = 0$ ($1 \leqslant \alpha < n$), $x_0^{(n)} \neq 0$, considerăm paralela PT

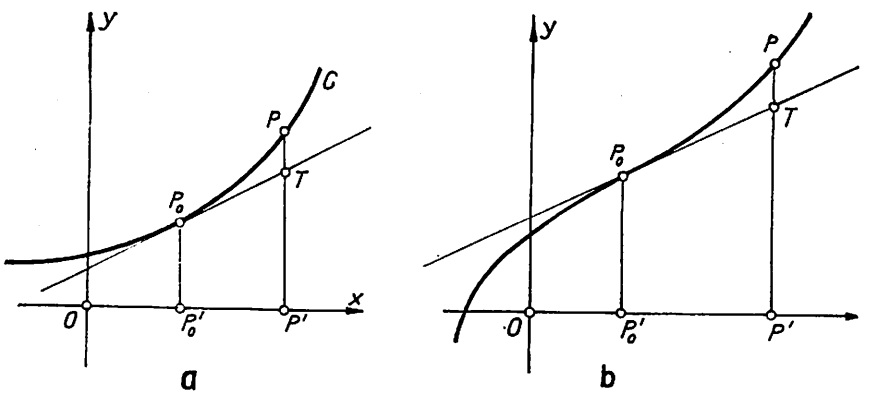


Fig. 105

la Ox, iar $\eta(t) = TP = x_P - x_T$. Sau schimbăm axele Ox și Oy între ele. a_3) Condițiile (78) arată că dreptele $(x - x_0)/x_0^{(\alpha)} = (y - y_0)/y_0^{(\alpha)}$ ($\alpha = 2, \ldots, n-1$) coincid cu tangenta în P_0 la C; adică $\bar{r}_0^{(\alpha)} \overset{\alpha=n}{=} \lambda \bar{r}_0'$. b) Dacă $y_0' = 0$, tangenta în P_0 la C e paralelă cu Ox, condițiile (78) devenind

(78‴) $$x_0' \neq 0,\ y_0^{(\alpha)} = 0\ (1 \leqslant \alpha < n),\ y_0^{(n)} \neq 0, \text{ iar } \eta(t) = TP = \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_0 + \theta h).$$

Deci: P_0 e un *punct de extrem al lui C*, dacă $n = 2p$ (fiind *punct de minim* cînd C e convexă: $\eta(t)>0$ sau un *punct de maxim* cînd C e concavă: $\eta(t)<0$), fie un *punct de inflexiune al lui C*, dacă $n = 2p + 1$ (fig. 106). *Obs.* Punctele de extrem sau de inflexiune corespund rădăcinilor ecuației

(79) $$y'(t) = 0,$$

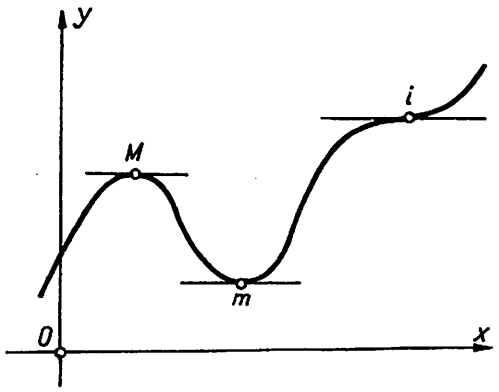


Fig. 106

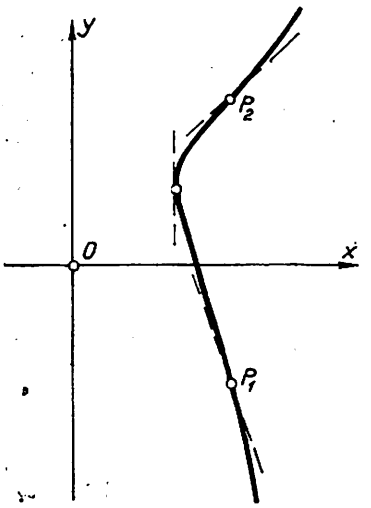


Fig. 107

iar cele cu tangentă staționară (de ondulație, de inflexiune) ecuației

(79') $$y''(t) = 0.$$

Pentru C: $y = y(x)$, regăsim rezultatele din ([40], p. 27); se ia C: $x = t$, $y = y(t)$. *Apl.* a) Pentru (78''): $3t^2 + 3at - 1 = 0$, $\Delta = 9a^2 + 12>0$, $\eta'''(t_i) = 6 \neq 0$; deci $P_i(t_i)$ sînt puncte de inflexiune, C fiind concavă la stînga lui P_i (fig. 107, cu $a = 2/3$). b) $A(-1, 1)$, O și $B(1, -1)$ (fig. 108). c) Concavitatea în raport cu Oy (respectiv, cu Ox) se face cu ajutorul funcției

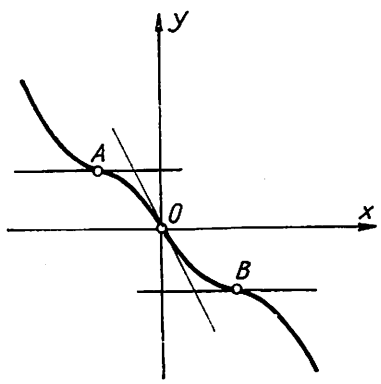


Fig. 108

$$\eta''(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{x'(t)}$$

(80)

$$(\nu''(t) = \frac{x''(t)\,y'(t) - x'(t)\,y''(t)}{y'(t)}).$$

c_1) $\eta'' = 3at(t^2 + 1)/(t^2 - 1)>0$ cu $t \in (-\infty,-1)\cup(0, 1)$: C e convexă; $\eta'' < 0$ cînd $t \in (-1, 0)\cup(1, +\infty)$: C e concavă; $\eta'' = 0$ pentru $t = 0$: $P(0) = (3a/8, 0)$ e singular, căci $x'(0) = y'(0) = 0$. Pentru $t = \pm 1$, avem $x'(\pm 1) = 0$, $y'(\pm 1) \neq 0$; tangentele în $A'(-1) = (0, -a)$ și $A(1) = (0, a)$ sînt paralele cu Oy. $\nu'' = 3a(t^2 + 1)/2 > 0$: concavitatea lui C e spre Ox (fig. 109). c_2) $\eta'' = 3t/2-(t^2 - 1)$, $\nu'' = 6/(t^2 - 3)(t^2 - 1)$. $\eta''>0$ cu $t \in (-1, 0)\cup(1, +\infty)$: C e convexă; $\eta'' <0$ pentru $t \in (-\infty, -1)\cup(0, 1)$: C e concavă; $\eta'' = 0$ cînd $t=0$; $P(0) = 0$ e singular. $\nu''>0$ pentru $t \in (-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1, 1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$: concavitatea spre Ox; $\nu'' < 0$ cu $t \in (-\sqrt{3},-1 \cup (1, \sqrt{3})$: concavitatea spre Ox'; pentru $t = \pm\sqrt{3}$, avem $x'(\pm\sqrt{3}) \neq 0$, $y'(\pm\sqrt{3}) = 0$: tangentele în $A'(-\sqrt{3}) = (3/2, -3\sqrt{3}/4)$ și $A(\sqrt{3}) = (3/2, 3\sqrt{3}/4)$ sînt paralele cu Ox (fig. 110). c_3) Puncte de inflexiune: $I_{1,2}(\pm 1/\sqrt{2a}, c/\sqrt{e})$; punct de maxim: $A(0, c)$. Concavitatea spre Oy cînd $x \in (-\infty, -1/\sqrt{2a})\cup(1/\sqrt{2a}, +\infty)$ și spre Oy' cînd $x \in (-1/\sqrt{2a}, 1/\sqrt{2a})$. *Obs.* Pentru $a = h^2$ și $c = h/\sqrt{\pi}$, curba exprimă *legea lui Gauss* de probabilitate a erorilor într-o serie de măsurători ale unei mărimi: probabilitatea ca eroarea să fie cuprinsă între $-x$ și x e egală cu aria haşurată în fig. 111; h se numește *modulul de precizie* al seriei de măsurători.

37 Fiind dată o curbă $C : F(x, y) = 0$, se cere : a) Să se afle concavitatea lui C în vecinătatea unui punct ordinar P_0 al lui C. *Apl.* : $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$. b) Să se arate că punctele de inflexiune ale lui C se găsesc printre punctele de intersecție ale lui C cu curba

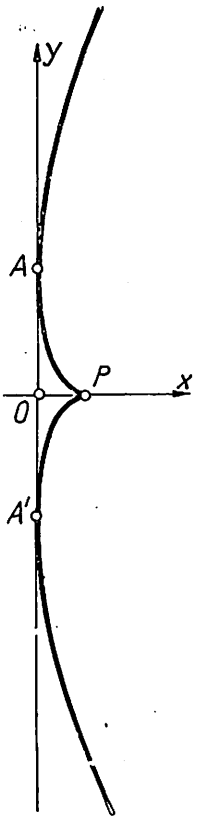


Fig. 109

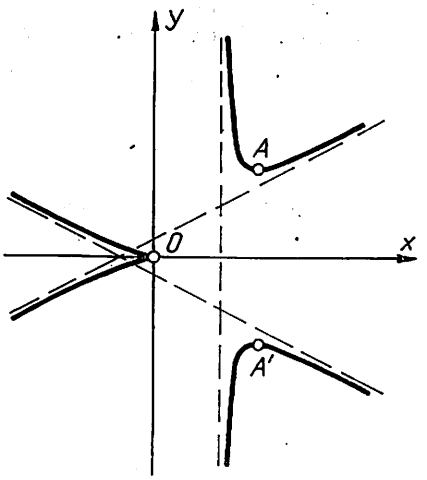


Fig. 110

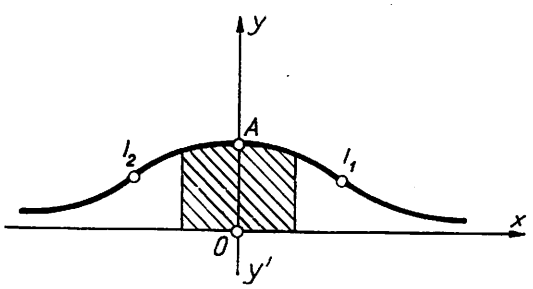


Fig. 111

$$(81) \quad -\Delta = \begin{vmatrix} F_{x^2} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{y^2} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } H = |F_{x_i x_j}| = 0 (i, j = 1, 2, 3)$$

cînd $C \equiv C_n$ e o curbă algebrică de grad n ; curba $H = 0$, numită *hessiana* lui C_n, e de gradul $3(n-2)$ *Apl.* : $2x^3 - 3x^2y + y^3 + 3xy - 2x = 0$. c) Numărul i al punctelor de inflexiune ale lui C_n e dat de formula

$$(82) \qquad i \leqslant 3n(n-2).$$

Apl. c_1) $x^3 + y^3 - 3axy - 8a^3 = 0$; c_2) $x^4 - y^4 + xy = 0$.

R. a) Din $F_x + y'F_y = 0$, $F_{x^2} + y'F_{xy} + y''F_y + y'(F_{xy} + y'F_{y^2}) = 0$ și (80) :

$$(83) \qquad y''(x) = -\frac{\Delta}{F_y^3}\left(x''(y) = -\frac{\Delta}{F_x^3}\right) \text{ sau } y''(x) = \frac{H}{F_y^3}\left(x''(y) = \frac{H}{F_x^3}\right) \text{ cu } x_3 = 1,$$

C fiind convexă sau concavă după cum $y''(x) \gtrless 0$ (respectiv, față de Ox : $x''(y) \gtrless 0$). *Obs.* Transformăm pe Δ în H astfel : din coloana 3—a, înmulțită cu $n-1$, scădem prima și a 2-a coloană înmulțite respectiv cu x_1 și x_2 și ținem seama de identitățile Euler* : $x_i F_{x_i} = nF$, $x_i F_{x_j x_i} = (n-1)F_{x_j}$; procedăm la fel cu linia a 3-a ; făcînd $x_3 = 1$, obținem $-(n-1)^2\Delta = H$. *Apl.* C e simetrică față de axe și bisectoarele lor ; deci e suficient să studiem concavitatea ei în $A(a, 0)$ și $B(a, a)$. $\Delta = -8[x^2(2x^2 - a^2)^2 (6y^2 - a^2) + y^2(2y^2 - a^2)^2 (6x^2 - a^2)]$; $x''_A = 1/a > 0$: concavitatea spre Ox, $y''_B = -10/a < 0$: concavă (v. fig. 43). b) *Punctele de inflexiune* sînt caracterizate prin

$$F = 0,\ \Delta = 0 \text{ (sau } F = 0,\ H = 0),\ F_x^2 + F_y^2 \neq 0 \text{ în } P(x, y) \in C. \tag{84}$$

Coordonatele *punctelor multiple* ale lui C sînt date de

$$F = 0,\ F_x = 0,\ F_y = 0. \tag{85}$$

Curba $\Delta = 0$ *(respectiv, hessiana* $H = 0$*) taie pe* C *în punctele de inflexiune și în punctele multiple ale lui* C. *Obs.* Dacă C are un punct de inflexiune la infinit, tangenta în acel punct e o *asimptotă* a lui C. *Apl.* $A(1, 0)$ și O (fig. 112). c) $F = 0$ și $H = 0$ se taie în $3n(n-2)$

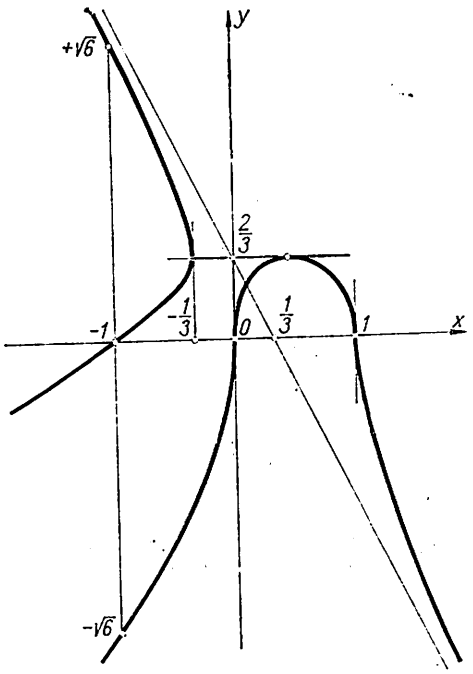


Fig. 112

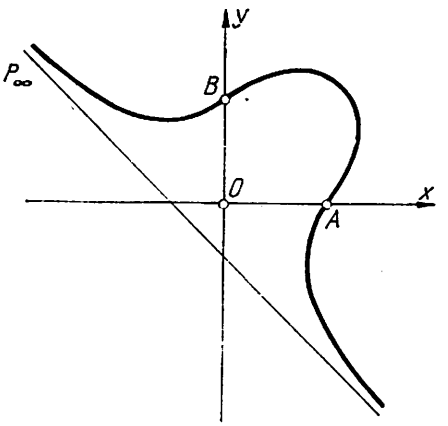


Fig. 113

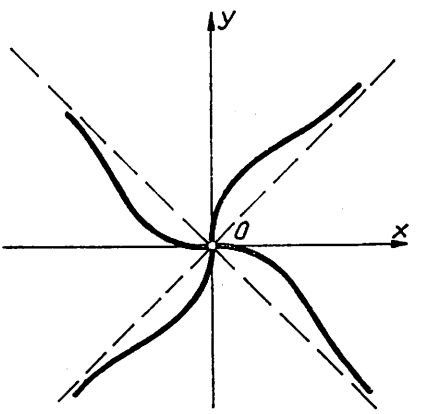


Fig. 114

* Se adoptă convenția : într-un monom, un indice care se repetă arată că se sumează după acel indice. De exemplu : $x_i F_{x_i} = \sum_{i=1}^{3} x_i F_{x_i}$.

puncte, maximum în (82) fiind atins cînd C_n nu are puncte multiple. *Obs.* Cînd $C \equiv C_n$, curba $\Delta = 0$ e de grad $3n - 4$ (mai mare decît al lui $H = 0$). *Apl.* c_1) $H : x_1^3 + x_2^3 + 33ax_1x_2x_3 - 8a^3x_3^3 = 0$. Din $H - F = 0 : x_1x_2x_3 = 0$. Fiecare dreaptă $x_i = 0$ taie pe C_n în 3 puncte de inflexiune, din care două sînt imaginare; cele reale sînt $A(2a, 0)$, $B(0, 2a)$ și $P_\infty(1, -1, 0)$ (fig. 113). c_2) $H : 144x_1^3x_2^3 + 12(x_1^4 - x_2^4)x_3^2 - x_1x_2x_3^4 = 0$. O e punct multiplu. $y = mx$ taie pe C_4 și H într-un punct comun dacă m e rădăcină a ecuației $13m^9 - 170m^5 + 13m = 0$; deci $m = 0$, $m = \pm\sqrt{\pm\sqrt{13}}$, $m = \pm 1/\sqrt{\pm\sqrt{13}}$. C e simetrică față de O și are 18 puncte de inflexiune, din care 2 în O iar alte 4 sînt reale (fig. 114).

38 Fie C o conică (nedegenerată) cu centrul într-un punct fix Ω; se consideră un vîrf real O și tangenta τ în vîrful B, opus lui O. Dacă $M \in C$, OM taie pe τ în Q; locul lui P, intersecția paralelelor prin M și Q la axele lui C, cînd M descrie pe C, e o curbă Γ numită *versieră generală*. Să se afle punctele de inflexiune ale curbei Γ.

R. Cu $OB \equiv Oy$, $C : \varepsilon x^2/\alpha^2 + (y - \beta)^2/\beta^2 - 1 = 0$ ($\varepsilon = \pm 1$); Γ e cubica unicursală (fig. 115): $x = 2\alpha t$, $y = 2\beta/(1 + \varepsilon t^2)$ sau $(\varepsilon x^2 + 4\alpha^2)y - 8\alpha^2\beta = 0$. $H : \varepsilon x_1^2x_2 + 4\alpha^2x_2x_3^2 - 6\varepsilon\beta x_1^2x_3 = 0$ și Γ se taie în 9 puncte, soluțiile lui $\Gamma = 0$, $\Gamma - H = 0 : X_\infty(1, 0, 0)$ — tangenta în O la C e asimptotă a lui Γ, $Y_\infty(0, 1, 0)$ — punct multiplu (luat de 6 ori) și $I_i(\pm\sqrt{3}/3) = (\pm 2\alpha/\sqrt{3}\varepsilon, 3\beta/2)$ — puncte de inflexiune ($i = 1, 2$). *Obs.* a) I_i se obțin și din $y'' = 0$; cînd $\varepsilon = 1$, corespund lui $\theta_1 = \pi/3$ și $\theta_2 = 2\pi/3$, cu $\theta = \widehat{OM, Ox}$. b) Dacă C e un cerc ($\alpha = \beta = a$), Γ se numește *versieră* (sinonim: *bucla Mariei Agnesi*): $x^2y = 4a^2(2a - y)$ (fig. 115 c). c) Dacă $\beta = 2\alpha = a$, Γ se numește *pseudoversieră*: $x^2y = a^2(2a - y)$; altă generare (fig. 116): fie AA' și OB doi diametri ortogonali într-un cerc $C(\Omega; a)$; dacă $M \in C$, OM taie pe AA' în M_0; e locul lui P, intersecția paralelelor prin M și M_0 la AA' și OB. Transformata pseudoversierei prin afinitatea $X = 2x$, $Y = y$ e versiera.

39 Să se afle concavitatea curbei (4). *Apl.* a) Concavitatea unei spirale. b) Să se clasifice melcul Pascal după punctele de inflexiune și al trecerii lui prin pol. c) Punctele de inflexiune ale curbei (41).

R. Fie (fig. 117); din triunghiul OM_0T, avem $OM_0/\sin(V - \alpha) = OT/\sin(\pi - V)$, $\operatorname{tg} V = \rho_0/\rho_0'$, încît $OT = \rho_0/[1 - (\alpha\rho_0'/\rho_0 + \alpha^2/2! - \alpha^3\rho_0'/3!\,\rho_0 + \ldots)] = \rho_0 + \alpha\rho_0' + \alpha^2(\rho_0^2 + 2\rho_0')/2!\,\rho_0 + \alpha^3(5\rho_0^2\rho_0' + 6\rho_0'^3)/3!\,\rho_0^2 + \ldots$, deoarece $\sin\alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \ldots$, $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2! + \ldots$ Cum $\rho = \rho_0 + \alpha\rho_0' + \alpha^2\rho_0''/2! + \ldots$ și notînd

$$(88)\qquad h'' = -\Lambda/\rho,\quad h''' = -\Lambda^*/\rho^2 \text{ cu } \Lambda = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'',\quad \Lambda^* = 5\rho^2\rho' + 6\rho'^3 - \rho^2\rho''',$$

obținem $h = TM = OM - OT = \alpha^2h_0''/2! + \alpha^3h_0'''/3! + \ldots$ Deci: *în M ($\rho \neq 0$ și nu e punct de inflexiune), C își întoarce concavitatea spre pol sau în direcția opusă, după cum $\Lambda \gtrless 0$; cînd M e un punct de inflexiune, unghiul său polar θ verifică ecuația*

$$(88')\qquad \Lambda = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0.$$

Obs. Dacă $h'' = \ldots = h^{(n-1)} = 0$, $h^{(n)} \neq 0$, M e un punct singular, cînd în reprezentarea (3) avem $x'(\theta) = y'(\theta) = 0$, respectiv un punct cu tangentă staționară.

Luînd OM_0 ca nouă axă polară OX, $M(r, \alpha)$ e dat de $r(\alpha) = \rho(\theta_0 + \alpha)$. Față de OXY, $C : X = r(\alpha)\cos\alpha$, $Y = r(\alpha)\sin\alpha$, căreia îi aplicăm în $M_0(\alpha = 0)$ criteriul din problema 36; concavitatea ei față de pol (de OX) e dată de

$$(88'')\qquad \nu''(0) = (X''Y' - X'Y'')/Y'|_0 = h_0'',\quad \nu'''(0) = (X'''Y' - X'Y''')/Y'|_0 = h_0'''.$$

Cînd $M_0 = 0$ ($\rho_0 = 0$), deoarece $\rho_0' \neq 0$ (arcul e regulat), folosim formula

$$(88''')\qquad \eta''(0) = (X'Y'' - X''Y')/X'|_0 = 2\rho_0';$$

deci: *Curba, avînd în O tangenta OX ce face unghiul θ_0 cu axa polară Ox, își întoarce concavitatea în direcția care face unghiul $\theta_0 + \pi/2$ cu Ox sau în direcția opusă, după cum $\rho_0' \gtrless 0$.* *Apl.* a) Fie (36): $\Lambda = a^2(\theta^2 + 2) > 0$ — concavitatea spre pol; în pol ($\theta = 0$): $\rho_0' = a$ — concavitatea spre Oy (v. fig. 58). Pentru (37): $\Lambda = a^2(4\theta + 3)/4 > 0$ cînd $\theta \geqslant 0$ — concavitatea spre O. În pol

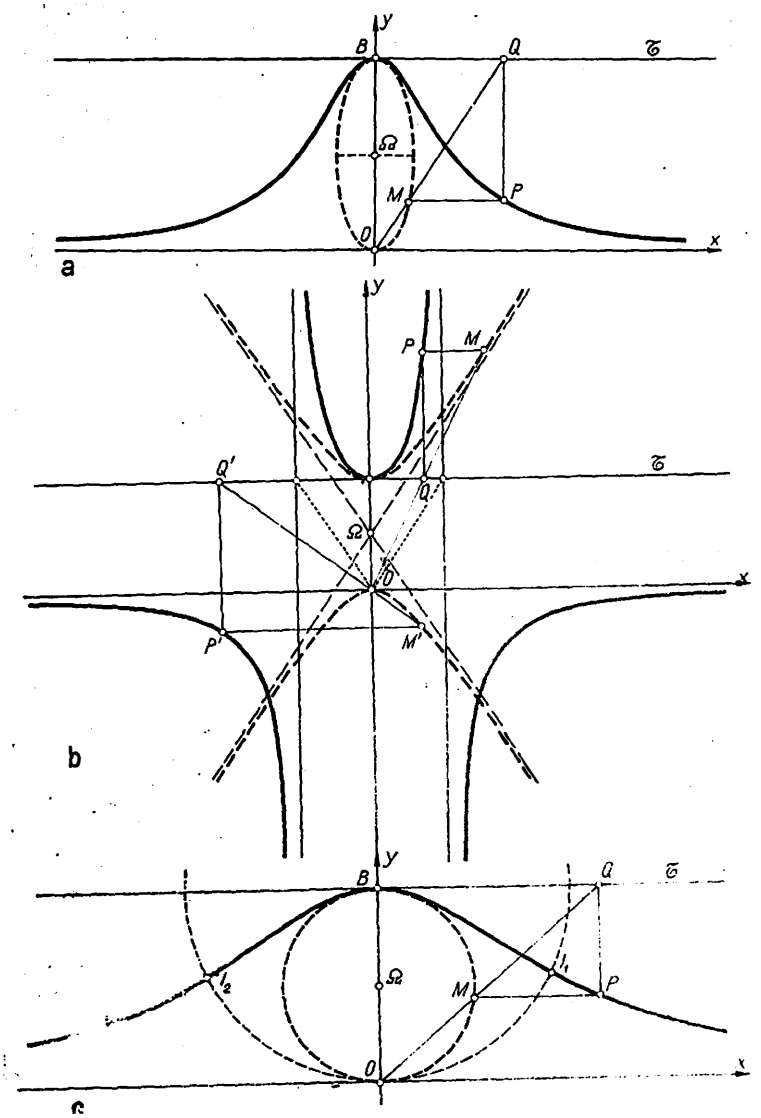


Fig. 115

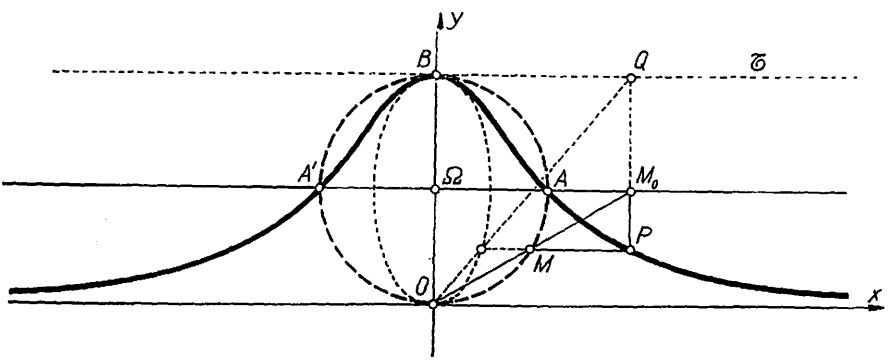


Fig. 116

$(\theta = 0)$: $\rho_0' = \pm\infty$ (reprezentarea nu e regulată în 0); elucidăm cazul luînd $x = t\cos t^2$, $y = t\sin t^2$: $\eta'' = 0$, $\eta''' = 6 - O$ e punct de inflexiune (v. fig. 59). Pentru (39) şi (44): $\Lambda = a^2/\theta^2 > 0$, respectiv $\Lambda = a^2(1 + k^2)\,e^{2k\theta} > 0$: concavitatea spre pol. b) Fie (18): $\Lambda = 2p^2 + l^2 + 3pl\cos\theta$. $\Lambda = 0$ are două soluţii θ_1 şi $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ între 0 şi 2π dacă $2p^2 + l^2 < 3\,lp$, implicînd $p < l < 2p$; atunci $\Lambda > 0$ cu $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$: concavitatea spre 0 şi $\Lambda < 0$ cu

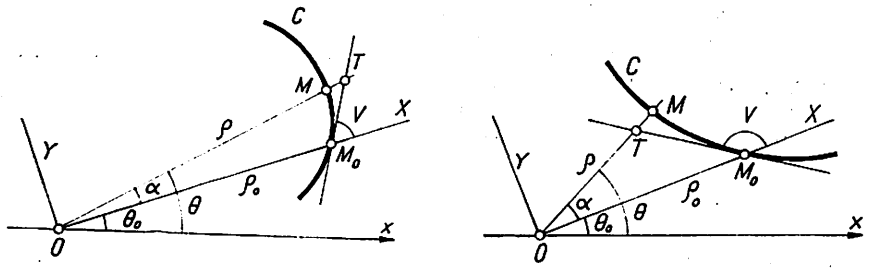


Fig. 117

$\theta \in (\theta_1, \theta_2)$: concavitatea în direcţia opusă lui O, $I_i(\rho_i, \theta_i)$ — puncte de inflexiune ($i = 1, 2$; $\theta_1 = \arccos(-(2p^2 + l^2)/3pl)$; v. fig. 45 β). $\Lambda = 0$ are soluţia $\theta = \pi$ dacă $l = p$ sau $l = 2p$. Pentru $l = p$, $O(0, \pi)$ e punct singular; căci, cu (3), $x'(\pi) = y'(\pi) = 0$ (v. fig. 45 γ). Pentru $l = 2p$, $A'(p, \pi)$ e punct de ondulaţie; căci $h'''(\pi) = 0$, $h^{IV}(\pi) = -6p$ (v. fig. 45 α). $\Lambda = 0$ n-are soluţie în θ dacă $l > 2p$ sau $l < p$, cînd $\Lambda > 0$ pentru orice $\theta \in [0, 2\pi]$: concavitatea spre O (v. fig. 45 α şi δ). C trece prin O, dacă $p\cos\theta + l = 0$, cu două soluţii cînd $l < p$ ($\theta_1 = \arccos(-l/p)$) şi una singură cînd $l = p$ ($\theta = \pi$). c) Un punct de inflexiune corespunzător lui $\rho = a\sqrt{2}$.

40 Dacă o dreaptă taie o cubică în 2 puncte de inflexiune, atunci şi al treilea punct de intersecţie e de inflexiune.

41 Fiind dată o cubică unicursală Γ, să se afle: a) condiţia ca punctele $P_i(t_i) \in \Gamma$ să fie coliniare ($i = 1, 2, 3$); b) valorile lui t corespunzătoare punctului multiplu al lui Γ; c) relaţia dintre t şi t' cînd $P'(t')$ e punctul unde tangenta în $P(t) \in \Gamma$ retaie pe Γ; d) valorile lui t corespunzătoare punctelor de inflexiune ale lui Γ. *Apl.* Γ e cisoida oblică (26) sau strofoida dreaptă (66).

R. a) Γ, de ecuaţii (72) cu $f_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$, e tăiată de (71) dacă $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$. Cu $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $\sigma_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$, $\sigma_3 = t_1t_2t_3$, avem $\sigma_1 = -(ab_1 + bb_2 + cb_3)/\sigma$, $\sigma_2 = (ac_1 + bc_2 + cc_3)/\sigma$, $\sigma_3 = -(ad_1 + bd_2 + cd_3)/\sigma$ şi $\sigma = aa_1 + ba_2 + ca_3$; de unde, eliminînd a, b, c, obţinem relaţia cerută. Sau: sistemul $\sigma_i = \ldots, \sigma = \ldots$ (în a, b, c, σ) e compatibil dacă

$$(89)\qquad \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ -1 & \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau } E(t_i) \equiv D\sigma_3 - C\sigma_2 + B\sigma_1 - A = 0.$$

Obs. Ca 6 puncte $P_\alpha(t_\alpha) \in \Gamma$ să fie pe conica (77), procedăm la fel: cu (72) în (77) obţinem o ecuaţie de grad şase în t iar $\sigma_1 = -\alpha_1/\alpha_0, \ldots, \sigma_6 = \alpha_6/\alpha_0$; eliminînd pe $a_{11}, \ldots, a_{33}$, găsim condiţia cerută (liniară în $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$). b) $P_1 \equiv P_2$ (cu $t_1 \neq t_2$) e punct dublu, dreapta P_1P_2 fiind nedeterminată; deci ecuaţia (89) în t_3 e identic verificată, ceea ce dă $Dt_1t_2 - C(t_1 + t_2) + B = 0$, $Ct_1t_2 - B(t_1 + t_2) + A = 0$, adică t_1 şi t_2 date de ecuaţia

$$(89')\qquad \begin{vmatrix} t^2 & t & 1 \\ A & B & C \\ B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

c) PP' e tangenta în P la Γ dacă $t_1 = t_2 = t$ şi $t_3 = t'$, adică

$$(89'')\qquad Dt^2t' - C(2tt' + t^2) + B(2t + t') - A = 0.$$

d) Într-un punct de inflexiune $t_1 = t_2 = t_3 = t$; din (89) deducem

$$(89''')\qquad Dt^3 - 3Ct^2 + 3Bt - A = 0.$$

Apl. a) *Pentru (26)*, (89) devine $E(t_i) = 2a\sigma_3 + l\sigma_2 = 0$; sau: din $|x_i\ y_i\ 1| = 0$, obținem $2a|t_i^2\ t_i^3\ t_i| + l|t_i^2\ t_i^3\ 1| = 0$; sau încă: dreapta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ taie cisoida dacă $2a(l\beta + \gamma)t^3 + l(2a\alpha + \gamma)t^2 + 2a\gamma t + l\gamma = 0$, o relație independentă de α, β, γ exprimînd condiția ca $P_i(t_i)$ să fie coliniare. Ecuația (89'): $t^2 = 0$; O e punct singular: $x'(0) = y'(0) = 0$. După (89''), $Q_i(t_i' = t_i/2(at_i + l))$ iar $E(t_i') = \lambda E(t_i)$ cu $\lambda = b^3/4\,\Pi_i\ (at_i + l)$. După (89'''), $I(t = -3l/2a)$ e punct de inflexiune. *Obs.* Cînd $l \to \infty$, obținem cisoida lui Diocles. b) *Fie (69)*. Ecuația (89): $E(t_i) = \sigma_2 + 1 = 0$. Ecuația (89'): $t^2 - 1 = 0$; O e punct nodal: $x(\pm 1) = y(\pm 1) = 0$. Sau: există t' și t'' cu proprietățile (1); din $y(t') = y(t'')$: $t' = -t''$, din $x(t') = x(t'')$: $t'' = \pm 1$. Tangentele în P_i retaie pe Γ în $Q_i(t_i' = -(t_i^2 + 1)/2t_i)$ iar $E(t_i') = (\sigma_1 + \sigma_3)E(t_i)$. Ecuația (89'''): $3t^2 + 1 = 0$; deci $Y_\infty(t = \infty) = (0, 1, 0)$ e punct de inflexiune, tangenta: $x + l = 0$ fiind asimptotă. *Obs.* Intersecția strofoidei (66_3) cu cercul]

(90) $$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

e dată de ecuația $l^2t^4 - 2\beta lt^3 + (-2l^2 - 2\alpha l + \gamma)t^2 + 2\alpha lt + l^2 + 2\alpha l + \gamma = 0$. O relație între rădăcini independentă de α, β, γ e $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$: $(t_1 + t_2)(t_3t_4 + 1) + (t_3 + t_4)(t_1t_2 + 1) = 0$, reprezentînd condiția ca patru puncte să fie conciclice (cercul și strofoida se mai taie în punctele ciclice).

4. COMPORTAREA CURBEI ÎN VECINĂTATEA UNUI PUNCT SINGULAR

42 Să se afle *punctele singulare* ale curbei C: a) $y = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$, $x \in [0, \infty)$; b) $y = E(x)$, unde $E(x)$ reprezintă partea întreagă a lui x;

c) $$y = \begin{cases} x & \text{dacă } x < 1 \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \\ 1/x & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \text{ definită pe } R;$$

d) $$y = \begin{cases} a \sin \frac{1}{x} \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{pentru } x = 0 \end{cases} \text{ definită pe } R;$$

e) $$y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}, x \in R - \{-1, 1\} \\ 0 \quad , x = \pm 1 \end{cases};$$

f) $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ e rațional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ e irațional} \end{cases} \text{ definită pe } R;$$

g) $y(1 + e^{1/x}) = 2x$; h) $y = \begin{cases} ax \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$; i) $y = \begin{cases} ax^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$;

j) $$y = \begin{cases} x \text{ dacă } x \text{ e rațional} \\ -x \text{ dacă } x \text{ e irațional} \end{cases} \text{ definită pe } R;$$

k) $f(x) = |x|$; l) $y = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$; m) $y = e^{2\sqrt{x-x}}$;

n) $y = \begin{cases} xe^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definită pe R;

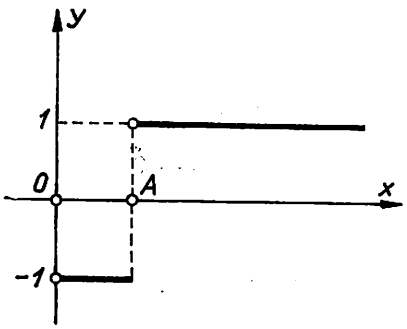


Fig. 118

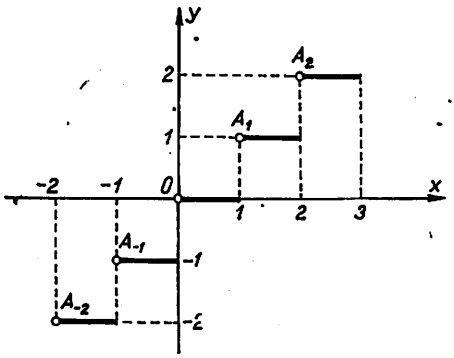


Fig. 119

o) $y = f(x)$, unde $f(x): R \to R$

e o funcție periodică de perioadă π astfel ca $f(x) = x - \sin x + \cos x - 1$ pe $[0, \infty)$; p) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$; q) $y = x^{\sqrt{1+x}}$; r) $y = \begin{cases} 10/(1 + e^{1/x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

s) $y = x \ln x$.

R. a) $y = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \\ +1 & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$; deci $y(1-0) = -1$, $y(1) = 0$, $y(1+0) = 1$ iar $y(1) = (y(1-0) + y(1+0))/2$; $A(1, 0) \in C$ e *punct de discontinuitate de prima speță obișnuit* (fig. 118). b) C are o infinitate de puncte de discontinuitate de prima speță: $A_k(k, k)$, $k \in Z$; ele nu sînt obișnuite, căci $\lim\limits_{x \to k-0} E(x) = k - 1$, $\lim\limits_{x \to k+0} E(x) = k = E(k)$ iar $E(k) \neq (E(k-0) + E(k+0))/2$. C se numește *curba în scară* (sinonim: *curba în trepte*) (fig. 119). c) $y(1-0) = y(1+0) = 1$, $y(1) = 0$; deci $A(1, 0) \in C$ e punct de discontinuitate de prima speță (fig. 120). d) O e *punct de discontinuitate de a doua speță* (fig. 121); căci $y(x)$ nu are limite laterale în O; fie $x_n = 2\varepsilon/n\pi$ ($\varepsilon = \pm 1$); avem $x_n \to 0$ (cu $x_n \gtrless 0$ după cum $\varepsilon = \pm 1$) iar $y(x_n) = a\varepsilon \sin \frac{1}{2} n\pi$ și definește șirul (y_n): $\varepsilon a, 0, -\varepsilon a, 0, \varepsilon a, 0, \ldots$ care nu are limită. C se numește *sinusoida discontinuă în origine*. e) $A(1, 0)$ și $A'(-1, 0)$ sînt puncte de discontinuitate de prima speță obișnuite (fig. 122). f) Orice punct al lui C e punct de discontinuitate de a doua speță; căci $f(x)$ — numită *funcția lui Dirichlet* — nu are limite laterale în nici un punct: fie x_0 (oarecare) $\in R$; există șiruri (x_n) de numere raționale și șiruri (y_n) de numere iraționale astfel ca $x_n \to x_0$ ($x_n \gtrless 0$) și $y_n \to x_0$ ($y_n \gtrless 0$) încît $f(x_n) \to 1$ și $f(y_n) \to 0$. C e o *curbă discontinuă*. g) C e o *curbă continuă*: $C \in C^0(R)$, căci $y(0-0) = y(0+0) = y(0) = 0$; O e un *punct unghiular* (sinonim: *punct angulos*), căci $y'_s(0) = 2$ și $y'_d(0) = 0$ (fig. 123). h) $C \in C^0(R)$, dar *nu are tangentă în* O; căci, în O, $y(x)$ e continuă: $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0 = y(0)$, dar nu are

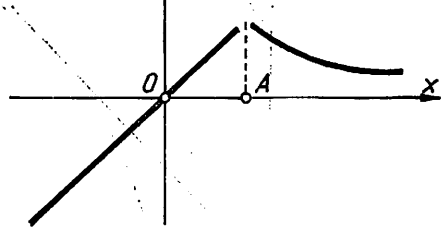


Fig. 120

derivate laterale : $(y(x) - y(0))/(x - 0) = a \sin \frac{1}{x}$ e o funcție ce nu are derivate laterale în O (fig. 124). i) $C \in C^0(R)$, dar *cu tangentă discontinuă în* O : $y'(x) = \begin{cases} a\left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ e o

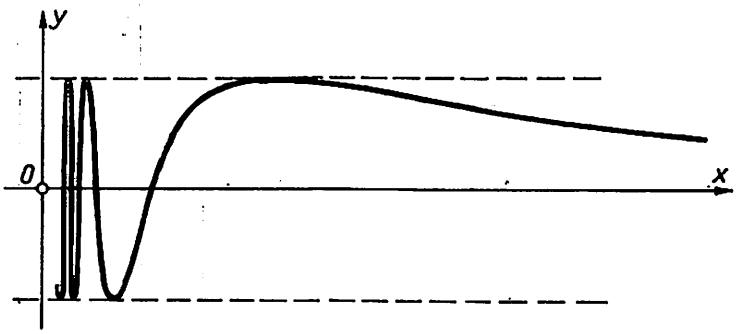


Fig. 121

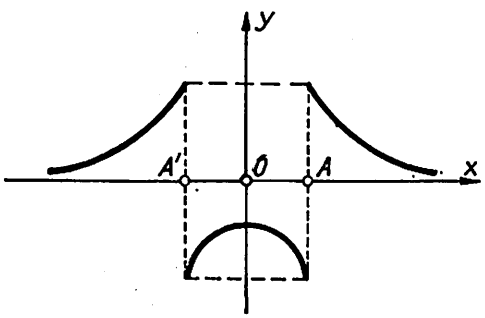


Fig. 122

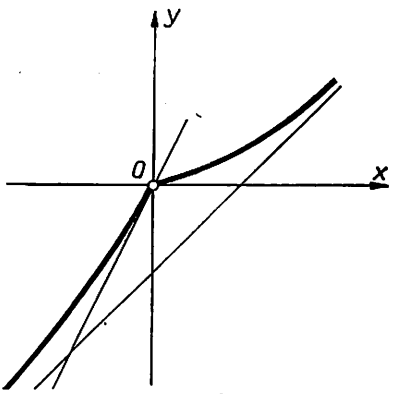


Fig. 123

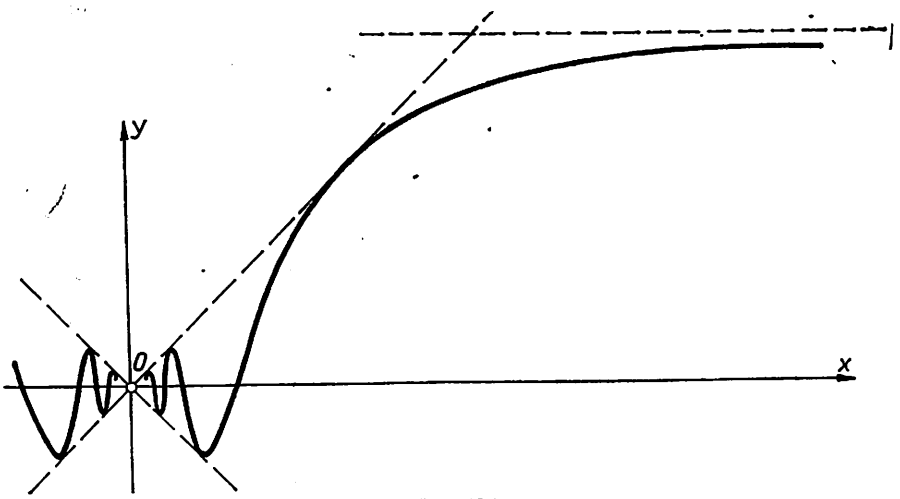


Fig. 124

funcție având în O o discontinuitate de speța a doua (fig. 125). j) Orice punct de abscisă $x_0 \neq 0$ e punct de discontinuitate de a doua speță; căci $y(x)$ e continuă în $x = 0$: $\lim_{x\to 0} y(x) = 0 = y(0)$ și, într-o vecinătate a lui $x_0 \neq 0$, nu există $\lim_{x\to 0} y(x)$. k) O e un punct unghiular; căci $f'_d(0) = 1$ și $f'_s(0) = -1$ (fig. 126). l) $A(0, 1) \in C$ e un punct de discontinuitate de a doua speță (fig. 127). m) $x \in [0, +\infty)$; $A(0, 1) \in C$ e un *punct de oprire* (fig. 128). n) O e punct de discontinuitate de a doua speță

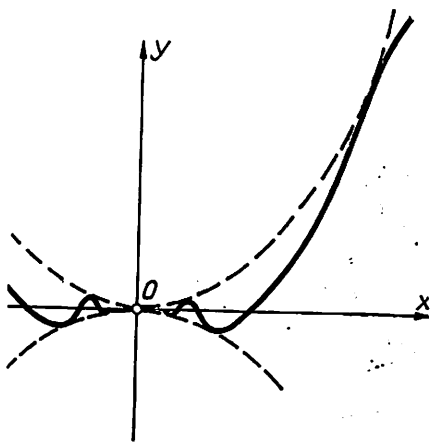


Fig. 125

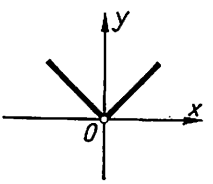


Fig. 126

(fig. 129). o) O infinitate de puncte de discontinuitate de prima speță: A_k $(k\pi, 0)$, $k \in Z$ (fig. 130). p) Scriem $y = e^{x \ln(1-1/x)}$; deci $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. A (1, 0) și $B(0, 1)$ sînt puncte de oprire (fig. 131). q) $A(-1, 1) \in C$ e *punct izolat* (fig. 132). r) O e punct de discontinuitate de prima speță (fig. 133). s) O e punct de oprire (fig. 134).

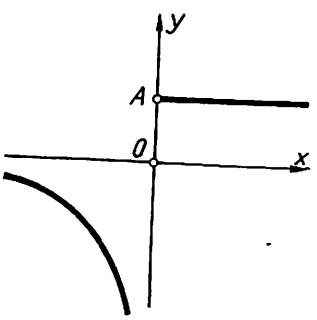


Fig. 127

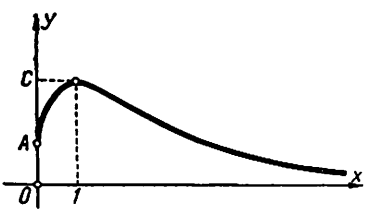


Fig. 128

43 Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct dublu al curbei $C: F(x, y) = 0$. Dacă $x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a_0$, $y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b_0$ e o deplasare a planului R^2, atunci $P'_0(X_0, Y_0)$ e punct dublu al curbei $\Phi(X, Y) \equiv F[x(X, Y), y(X, Y)] = 0$.

44 Să se afle *punctele multiple* ale curbei C: a) $y^3(x^2 + b)^3 - a^3(x - c) = 0$; b) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$; c) $x^2(a - x) - y^2(a + x)^2 = 0$; d) $x^4 + y^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0$; e) $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$; f) $x^2y^2 - x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$; g) $y = \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$; h) $y = 2b + \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{(x + b)(3b - x)}$; i) $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$; j) $x^5 - xy(x^2 + y^2) + y^3 = 0$; k) $y^n = b(a - x)^p x^m$ cu $m, n, p \in N$, fără divizori comuni; l) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$;

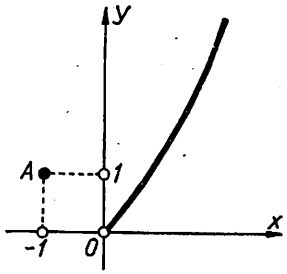


Fig. 132

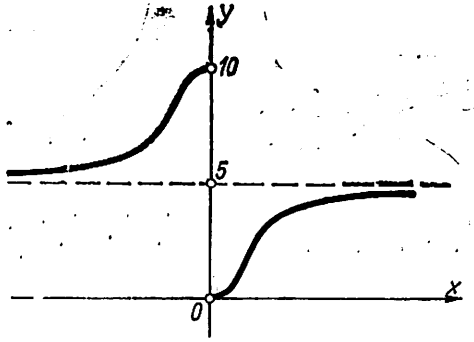


Fig. 133

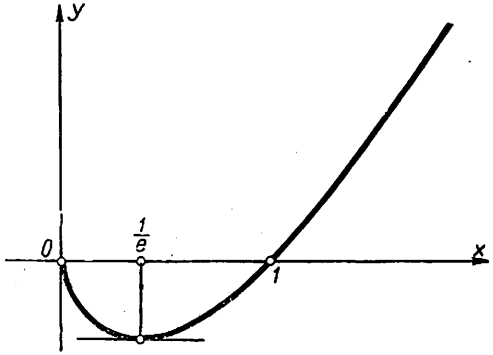


Fig. 134

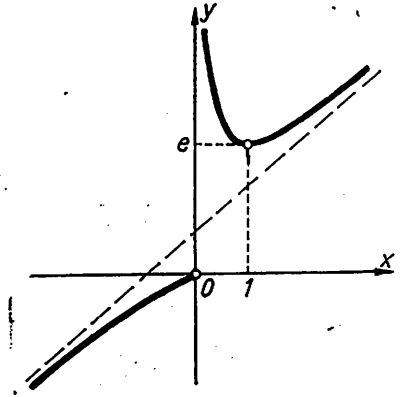


Fig. 129

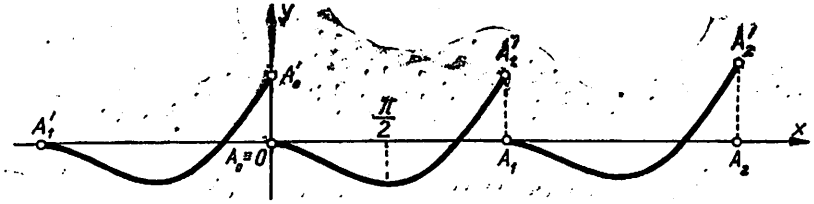


Fig. 130

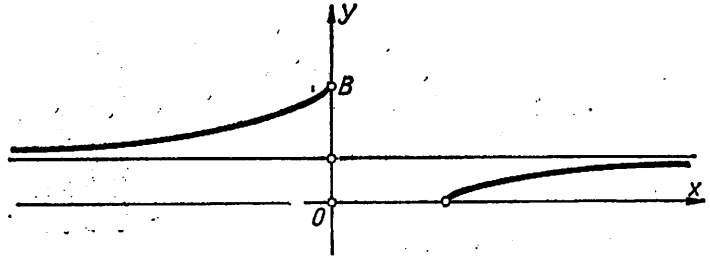


Fig. 131

m) $x^5 + y^5 = xy^2$; n) $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$; o) $x^4 - (ax^2 - by^2)y = 0$; p) $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$; q) $3x^4 - 6x^2y^2 + 3y^4 - 12ax^2y + 4ay^3 = 0$; r) $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$.

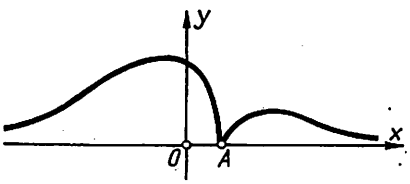


Fig. 135

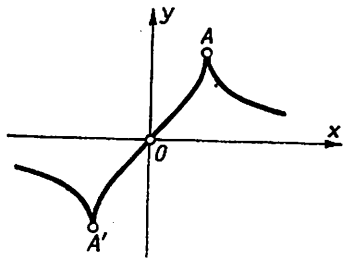


Fig. 136

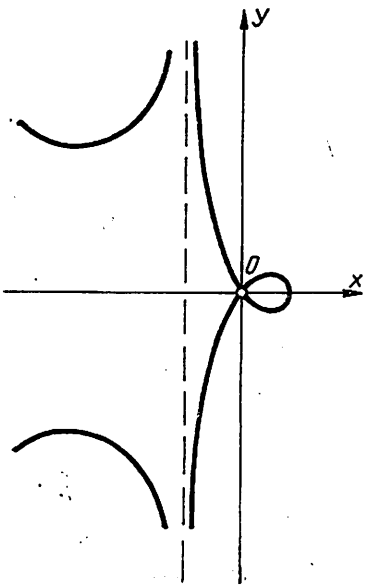


Fig. 137

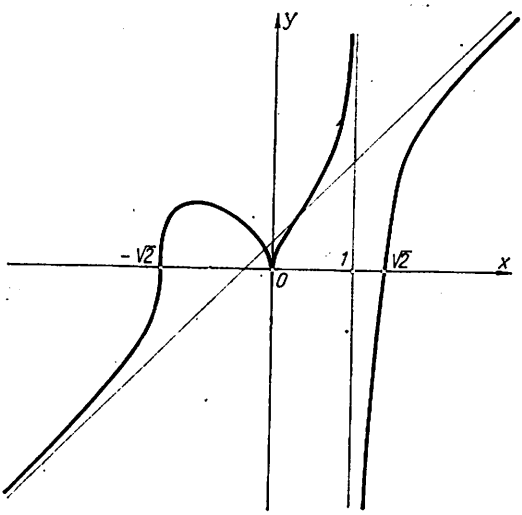


Fig. 138

R. a) $A(c, 0)$ e punct de întoarcere de prima speță (fig. 135). b) $A(1, 2\sqrt[3]{2})$ și $A'(-1, -2\sqrt[3]{2})$ sînt puncte de întoarcere de prima speță (fig. 136). c) O e un nod (fig. 137). d) O e punct triplu cu tangente distincte: $y=0$, $2x \pm \sqrt{3}y=0$ (v. fig. 30). e) O e punct de întoarcere de prima speță (fig. 138). f) $A(2, 0)$ e un nod (fig. 139). g) $A(0, a)$ și $A'(0, -a)$ sînt puncte de întoarcere de prima speță (fig. 140). h) $A(0, b(2+\sqrt{3}))$ și $A'(0, b(2-\sqrt{3}))$ sînt puncte de întoarcere de prima speță (fig. 141). i) $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ și $B(0, -a)$ sînt noduri (fig. 142). j) O e punct triplu (fig. 143). k) Curbe algebrice de grad $\max(n, m+p)$, numite perlele lui *Sluse*; O e punct multiplu de ordin $\min(m, n)$ iar $A(a, 0)$ e punct multiplu de ordin minim (n, p). *Obs.* a) Pentru $m=3$, $n=2$, $p=1$, $b=1/a^2$ (fig. 144), perla admite generarea: Fie M un punct al segmentului OA și L un punct exterior segmentului, pe aceeași dreaptă pentru care $ML = a$. Perpendiculara în M pe axă taie cercul de diametru OA în punctele N, N'. Paralela din O la LN, LN' taie ordonata considerată în punctele P, P' care descriu perla. b) Sînt cazuri particulare de curbe $y = bx^\alpha (a-x)^\beta$ cu $\alpha, \beta \in R_+ \cdot$ l) O e punct cuadruplu (fig. 145). m) O e punct triplu (fig. 146). n) O e punct de întoarcere de prima speță (fig. 147). o) O e punct triplu (fig. 148). p) O e punct triplu (fig. 149). q) O e punct triplu, cu tangentele $y=0$ și $y=\pm x\sqrt{3}$ fig. 150). r) O e punct triplu (fig. 151); parabola $y = x^2 + \frac{2}{3}x$ e asimptotică lui C.

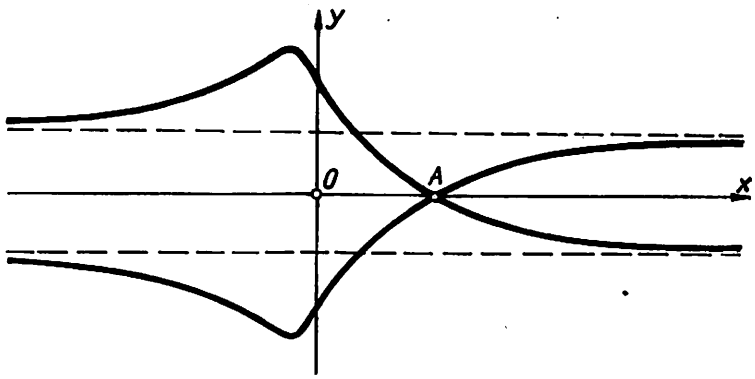


Fig. 139

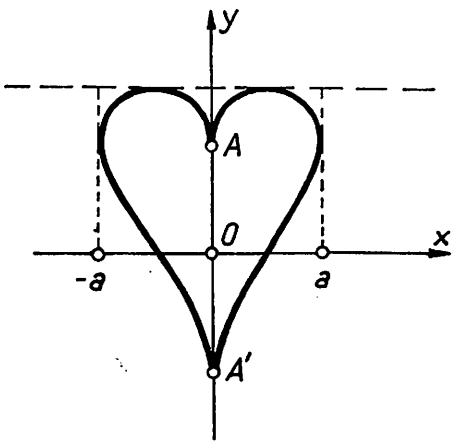


Fig. 140

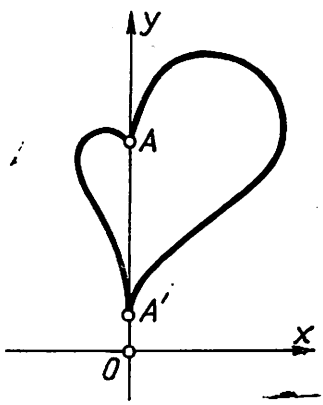


Fig. 141

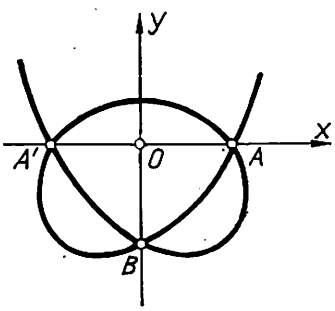


Fig. 142

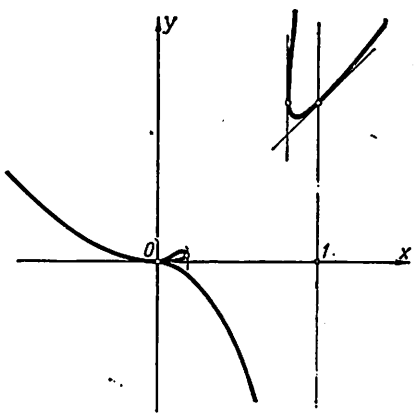


Fig. 143

45 Fie AB și CD doi diametri perpendiculari în cercul $\Gamma(O; r)$, M un punct mobil pe Γ iar N mijlocul coardei DM. Intersecția P a lui AM și CN descrie o cubică circulară C, cu un punct izolat în O.

R. $AB \equiv Ox$, $C: (x^2 + y^2)(3x - y) = 2r(2x^2 - xy + y^2) = 0$, $\Delta_0 = 28r^2 > 0$ (fig. 152).

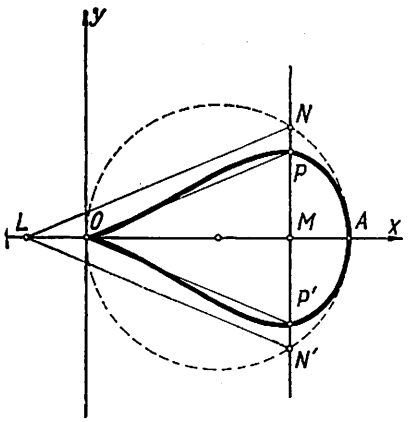


Fig. 144

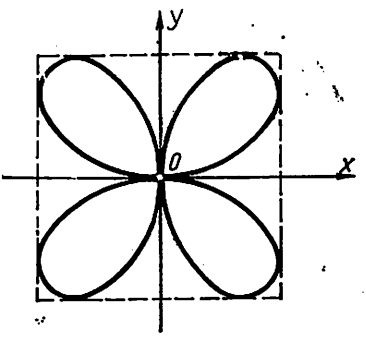


Fig. 145

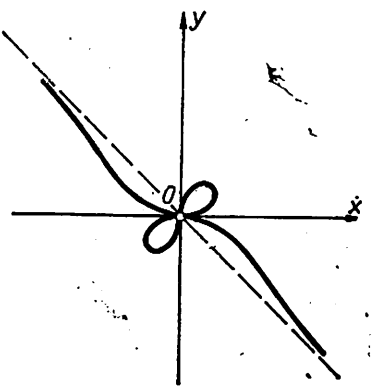


Fig. 146

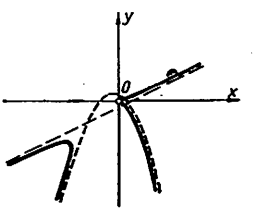


Fig. 147

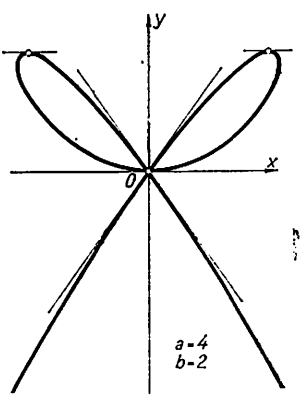


Fig. 148

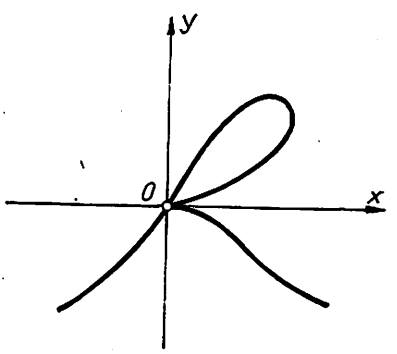


Fig. 149

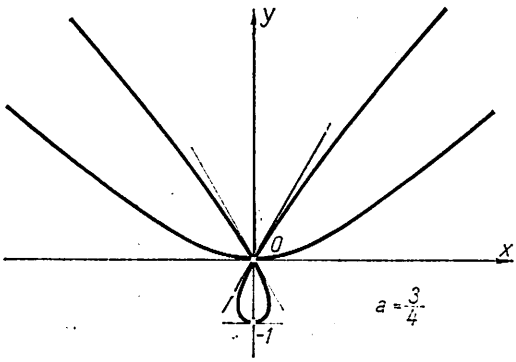


Fig. 150

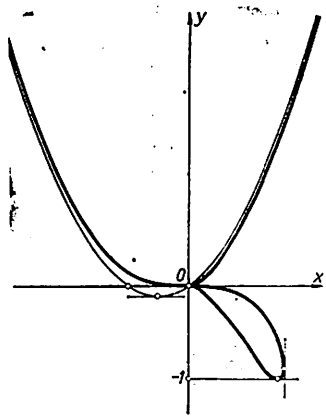


Fig. 151

46 Podara unei curbe algebrice de clasă m în raport cu punctul Ω îl are pe Ω ca punct multiplu de ordin m. *Apl.* : podara unei conice raportată la un vîrf şi o axă, faţă de originea axelor (vîrful conicei).

R. Ducem m tangente prin Ω şi, pentru fiecare din ele, Ω aparţine podarei. *Apl.* Conicele raportate la un vîrf şi o axă au ecuaţia

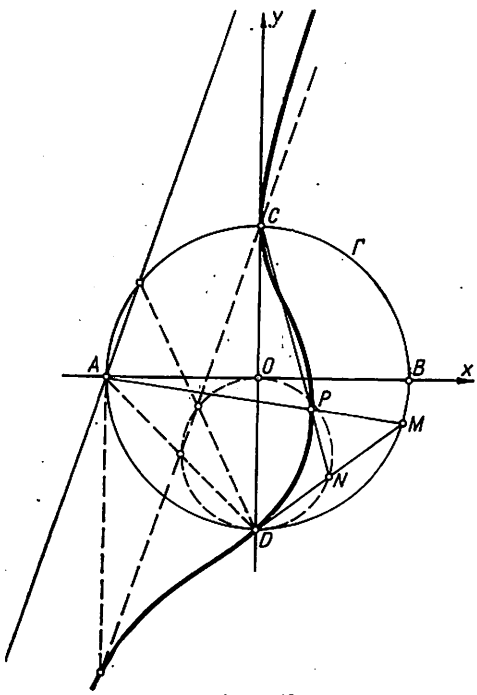


Fig. 152

$$(91)\qquad \begin{aligned} x &= 2p/(t^2 - q),\\ y^2 &= 2px + qx^2;\\ y &= 2pt/(t^2 - q). \end{aligned}$$

Podara Γ : $q(x^2 + y^2)^2 + 2p(x^2 + y^2)x + p^2y^2 = 0$, cu punct de întoarcere în O. Pentru $q = 0$ (parabolă), Γ e o cisoidă; pentru $q = -1$ (cerc), Γ e cardioida (18″).

47 Să se afle punctele multiple ale locului geometric de intersecţie al razei vectoare OP, P fiind punctul curent al cisoidei (26), cu polara lui P în raport cu cercul de bază C al cisoidei.

48 Se cer punctele singulare ale curbei Γ generată de punctele de contact ale tangentelor paralele cu o direcţie dată la o parabolă C de parametru constant, cînd C se roteşte în jurul focarului F.

R. F fiind fix, se ia polul în F şi Ox paralelă cu direcţia dată;

$$(92)\qquad C : \rho = p/(1 - \cos(\theta - \alpha)).$$

Ordonata $y = \rho \sin\theta$ a punctului de contact are un extremum : $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$; deci

$$(92')\qquad \cos\theta = \cos\alpha.$$

Din (92′) : $\alpha = 2k\pi \pm \theta$ (cazul cu + nu convine); introdus în (92), găsim

(93) $\Gamma : \rho = p/2 \sin^2 \theta$; $4y^4 = p^2 (x^2 + y^2)$; $x = p(1 - t^4)/8t^2$, $y = p(1 + t^2)/4t$.

O e un punct izolat; Γ e simetrică față de axe și O (fig. 153).

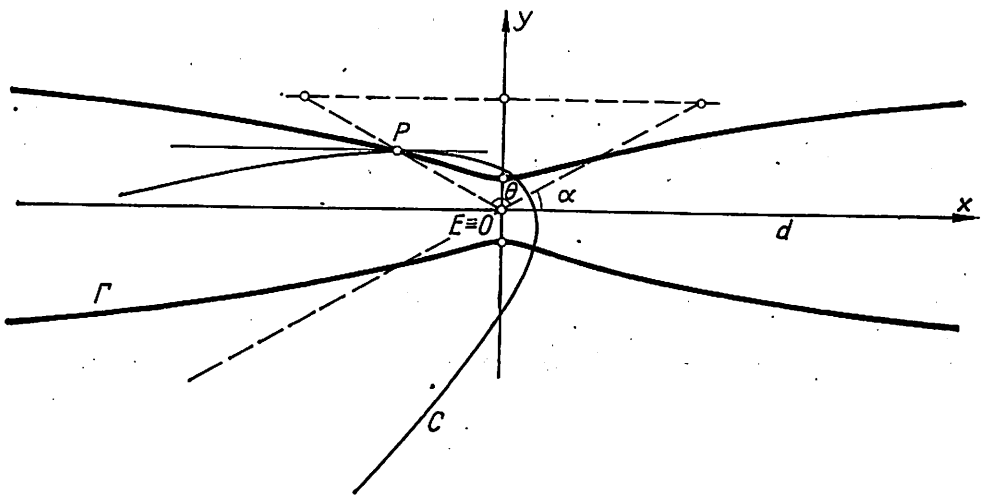


Fig. 153

49 Să se afle punctele singulare ale locului C al transformatelor punctelor conicei Γ printr-o inversiune de pol Ω și modul k.

50 Fie un cerc $C(\Omega; 2r)$ iar O mijlocul razei ΩA $(A \in C)$; o dreaptă variabilă prin A taie pe C în N și o dreaptă dată $d \perp \Omega A$ în N_1. Locul Γ al intersecției lui ON_1 cu paralela prin N la d se numește *foliul lui Descartes*. Să se afle punctele multiple ale curbei.

R. Fie (fig. 154) $d : x - b = 0$; foliul lui Descartes e cubica

(94) $$\Gamma : (b + r)^2 (x - 3r) x^2 + b^2 (x + r) y^2 = 0,$$

având un nod în O, cu tangentele $3(b + r)^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$. Γ e simetrică față de Ox și conține pe A' $(3r, 0)$, opusul lui A pe C; admite asimptota $x + r = 0$ (tangenta în A la C). Tangentele în nodul O sînt ortogonale dacă $\left(\frac{r + b}{b}\right)^2 = \frac{1}{3}$; atunci Γ se numește *foliul ortogonal* (fig. 155), de ecuație

(95) $(x - 3r) x^2 + 3(x + r) y^2 = 0$; respectiv $X^3 + Y^3 - 3aX = 0$,

$$X = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad Y = \frac{3at^2}{1 + t^3} \left(a = \frac{r\sqrt{2}}{2}\right),$$

cînd Γ e raportată la tangentele OX, OY în O. Pentru una din aceste două valori ale lui r/b, d e exterioară lui C, situată în semiplan diferit cu C față de tangenta în A și astfel ca triunghiul dreptunghic ABB' de catete egale cu AB, $OB = BB'$ să aibă unghiul opus lui BB' egal cu $\pi/3$. Curba are un singur punct de inflexiune real la infinit. *Obs.* Sînt două poziții ale lui d, una din ele d' fiind între O și A, care conduc la aceeași curbă (fig. 156).

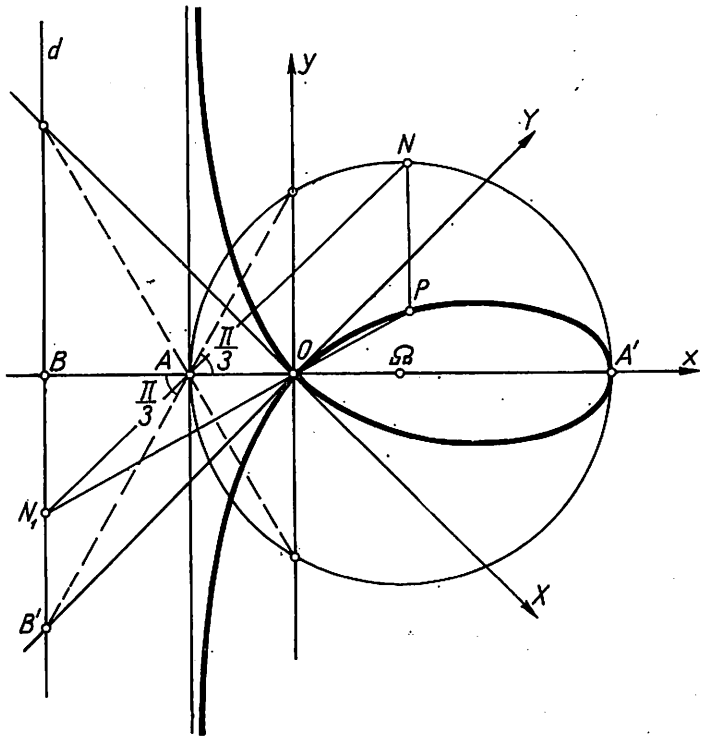


Fig. 155

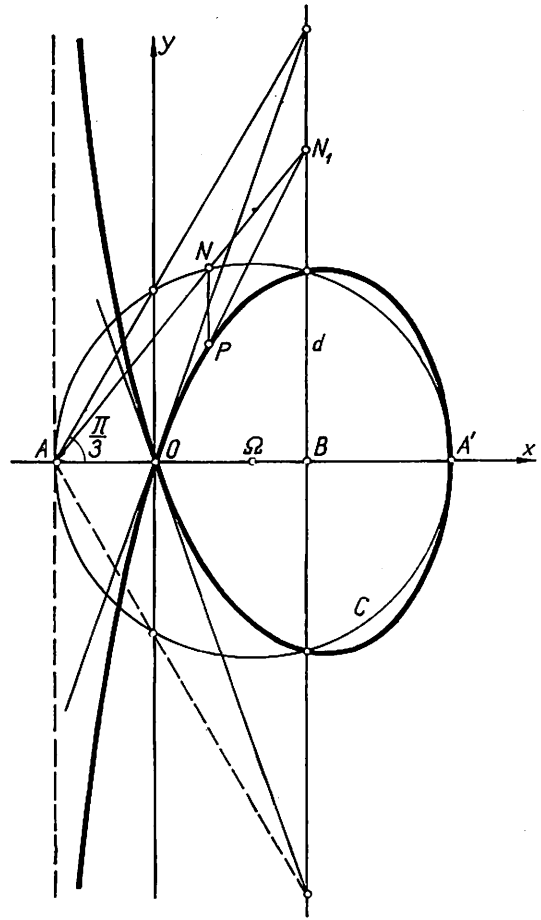


Fig. 154

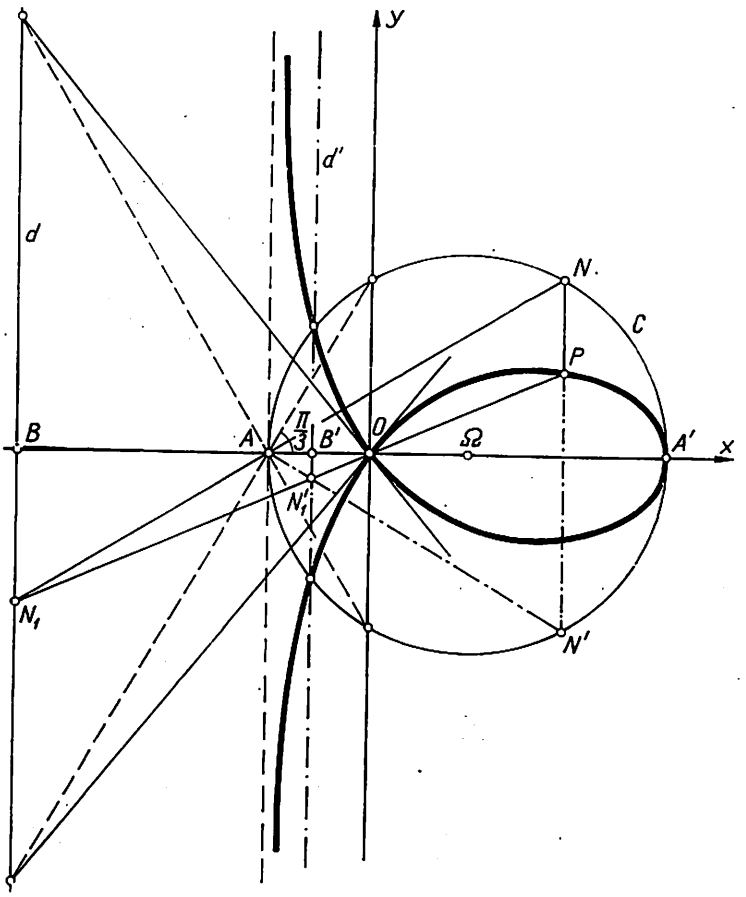


Fig. 156

51 Fie triunghiul dreptunghic OAB ($\hat{A} = 90°$) şi N piciorul perpendicularei din B pe o secantă variabilă d prin O; N se proiectează ortogonal pe una din catete, de exemplu pe OA, în N_1. Locul punctelor P de intersecţie a lui d cu perpendiculara din N_1 pe d e o cuartică, numită *bifoliu* (sinonim: *foliul dublu*). Are puncte multiple?

R. Fie (fig. 157): $a = OA$, $b = AB$; bifoliul e cuartica unicursală

$$(96)\quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by);\ x = \frac{a + bt}{(1 + t^2)^2},\ y = \frac{(a + bt)\,t}{(1 + t^2)^2};\ \rho = (a \cos\theta + b \sin\theta)\cos^2\theta.$$

O e un punct triplu, două din tangente coincizînd cu Oy iar a treia fiind OB_1. Dacă triunghiul OAB e isoscel ($a = b$), obţinem *bifoliul drept*.

52 Fie un dreptunghi fix $OABC$. O secantă prin O taie pe AC în D; perpendiculara în D pe OD taie pe BC în E, perpendiculara în E pe DE taie pe AC în F şi perpendiculara în F pe EF taie pe OD în P. Locul lui P se numeşte *foliul parabolic*. Are puncte multiple?

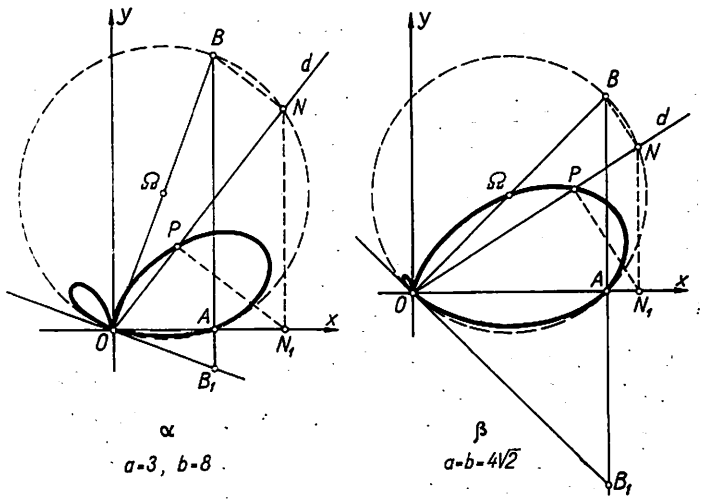


Fig. 157

R. Cu $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$, obţinem cubica unicursală (fig. 158)

(97) $$C: x^3 - a(x^2 - y^2) - bxy = 0,$$

avînd un nod în O. Dacă $b=0$, avem *foliul parabolic drept*: e simetric faţă de OA. *Obs.* Simetricul P^1 al lui P faţă de D e cubica

(98) $$\Gamma: x^3 - a(x^2 + y^2) + bxy = 0.$$

Cînd $b = 0$, Γ se numeşte *curba lui Longchamp* (fig. 159); e cubica

(98′) $$x^3 = a(x^2 + y^2);\ \rho = a/\cos^3\theta;\ x = a(1 + t^2),\ y = at(1 + t^2),$$

cu generarea: Fie dreptele d_1, d_2 cu $d_1 \perp d_2$ şi $O \in d_1$; o dreaptă d prin O taie pe d_2 în D, iar perpendiculara în D pe d taie pe d_1 în E; Γ e locul lui P_1, punctul comun al lui d şi paralelei prin E la d_2. Punctele lui Γ de abscisă dată $EO = p$ se determină astfel: cercul de diametru OE taie pe d_2 în D şi D', iar dreptele OD, OD' taie paralela prin E la d_2 în P_1 şi P_1' de pe Γ. *Curba lui Longchamp e o curbă duplicatoare*: pe d_2 luînd $CM = OC$, Γ e tăiată în Q de cercul $(O; OM)$; x_Q e dat de ecuaţia $x^3 = 2a^3$, fiind egal cu muchia cubului căutat. Sau: Γ taie cercul $(0; 2a)$ în N; ON taie pe d_2 în T astfel încît $OT = a\sqrt[3]{2}$.

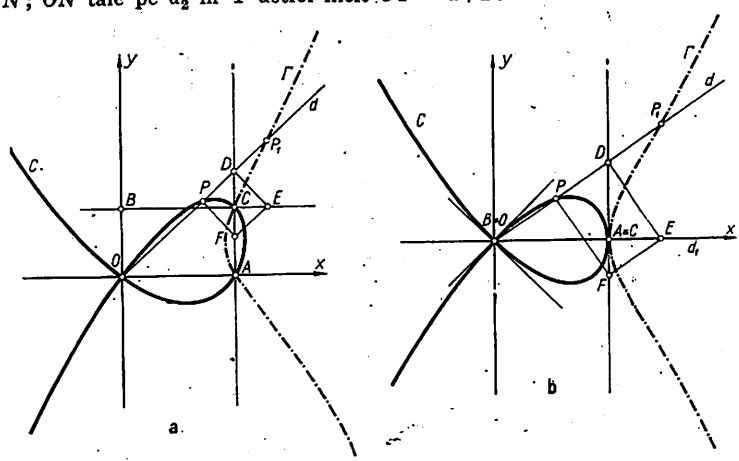


Fig. 158

53 Fie o dreaptă d, un punct fix O şi o curbă C. Din $M \in C$ se duce perpendiculara MM' pe d; se ia pe OM punctele P şi P' astfel încît $PM = MP' = MM'$. Cînd M descrie pe C, P şi P' descriu o curbă Γ, numită *veroida lui C de pol O şi directoare d*. Să se afle punctele multiple ale lui Γ. *Apl.* C e : a) o dreaptă; b) un cerc $(\Omega; R)$, cînd $d = O\Omega$.

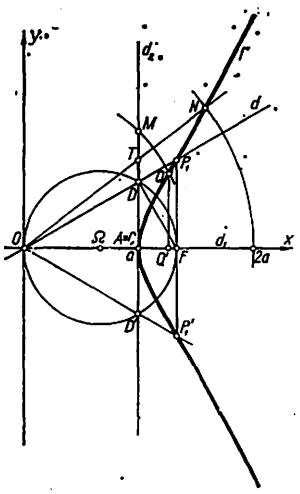


Fig. 159

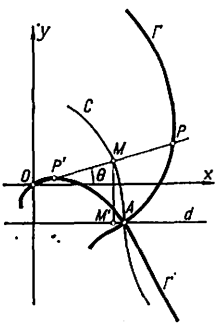


Fig. 160

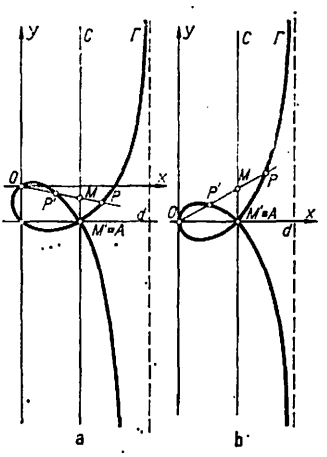


Fig. 161

R. Fie (fig. 160) $C : x = f(t)$, $y = g(t)$ şi $d : y - d = 0$; cum $MM' = g - d$, deducem

(99) $\Gamma : x = f \pm f(g-d)/\sqrt{f^2+g^2}, y = g \pm g(g-d)/\sqrt{f^2+g^2}$; $\rho = (\theta)(1 \pm \sin\theta) \pm d$

pentru $C : \rho = \rho(\theta)$, căci $\rho = OM \pm MM'$ iar $MM' = OM \sin\theta - d$. Fie t_i rădăcină a ecuaţiei

(99′) $$f^2 + 2dg - d^2 = 0;$$

dacă $i = 1, 2, \ldots, s$ iar $s \geqslant 2$, 0 e *punct multiplu de ordin s* : *nodal*—cînd t_i sînt rădăcini simple, *cu ramuri cuspidale* — pentru rădăcini multiple, sau *izolat*—pentru rădăcini imaginare. *Obs.* Pot exista şi alte puncte multiple pentru Γ; de exemplu, punctele în care d e tăiată de C. *Apl.* a) Dacă C e dreapta (71_3), conform cu (99_2), deducem că Γ e cuartica

100) $$(x^2 + y^2)(ax + by + c)^2 = [adx + (c + bd)y]^2.$$

Tangenta în O : $(c^2 - a^2d^2)x^2 - 2ad(c + bd)xy - bd(2c + bd)y^2 = 0$; O e punct izolat, nodal sau cuspidal (de prima speţă) după cum $d[(a^2 + b^2)d + 2bc] \gtrless 0$. Dacă d trece prin O $(d = 0)$, Γ poate avea un punct cuspidal în O. Dacă $A(-(bd + c)/a, d) = C \cap d$, Γ are un punct nodal în A. Se prezintă cazurile : $b = 0$ şi $b \neq 0$ (cînd putem avea $ab = 0$ sau $ab \neq 0$).
Fie $b = 0$; notînd $-c/a = l$, deci $C : x - l = 0$, Γ e cubica unicursală (fig. 161)

(100′) $$(x^2 + y^2)(x - 2l) + (l^2 - d^2)x + 2dly = 0,$$

avînd un nod în $A(l, d)$. Cînd $d = 0$, Γ e strofoida (66′).

Fie $b \neq 0$, $a = 0$; notînd $-c/b = a$, $c/b + d = l$, deci $C : y - a = 0$, Γ coincide cu concoida Nicomede (32), (fig. 162). *Fie* $ab \neq 0$; atunci Γ e o cuartică circulară avînd, la distanţă finită, două puncte duble : O (care poate fi izolat, nodal sau cuspidal) şi A (nod). Dacă $d = 0$, O e punct cuspidal (fig. 163). b) Fie $\Omega(a, 0)$, C avînd ecuaţia (25); Γ e curba algebrică

(101) $(x^2 + y^2)^4 + 4(a^2 - R^2 - ax)(x^2 + y^2)^3 + 2R^2x^2(x^2 + y^2)^2 + 2ax[a(x^2 - y^2) + 2x(R^2 - a^2)](x^2 + y^2) + (R^2 - a^2)^2x^4 = 0$; $\rho = (a\cos\theta \pm \sqrt{a^2\cos^2\theta + R^2 - a^2})(1 \pm \sin\theta)$

de gradul 6 sau 8, după cum C trece sau nu prin O (punct cuadruplu cu tangentele confundate). Fie $O \notin C$. Dacă O e exterior lui C ($R<a$), Γ mai admite 4 noduri, O fiind izolat (fig. 164 a); dacă O e interior lui C ($R>a$), Γ mai admite 2 noduri: $A(R+a, 0)$ și $A(R-a, 0)$, O fiind un tacnod (fig. 164 b). Fie $O \in C$ ($R=a$); Γ, cu un nod în $A'(R, 0)$, e sextica

(101′) $\qquad (x^2+y^2)^3 - 4Rx(x^2+y^2)^2 + 4R^2x^4 = 0$ (curbă unicursală; fig. 165).

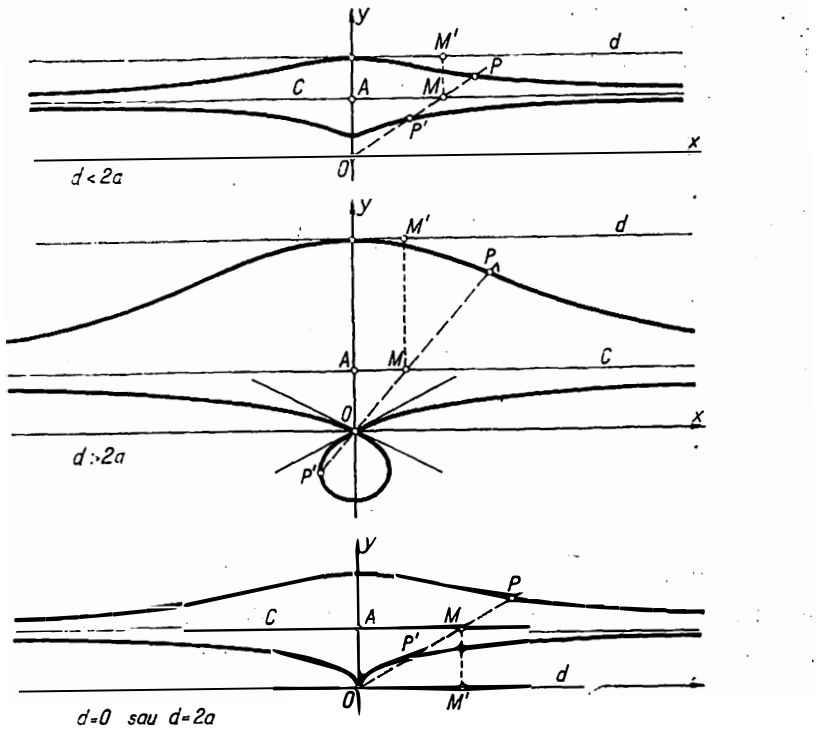


Fig. 162

54 Fie *mișcarea de bielă* generată de o *tri-bară*, adică de un patrulater articulat $O_1M_1M_2O_2$ ale căror vîrfuri O_1, O_2 sînt fixe; M_1M_2 e *biela*, iar O_1M_1 și O_2M_2 (care pivotează în jurul lui O_1 și O_2) sînt *manivelele* tri-barei. Să se determine punctele multiple ale traiectoriei Γ a unui punct P rigid legat de biela M_1M_2; în special, să se studieze *curba lui Watt*, care se obține în cazul cînd manivelele sînt egale iar P e mijlocul bielei M_1M_2.

R. Fie (fig. 166): $O_1O_2 = 2a$, $M_1M_2 = 2p$; din $OM_i = OP - M_iP$ ($i = 1, 2$), găsim $x_1 = x - m_2\cos\varphi$, $y_1 = y - m_2\sin\varphi$ și $x_2 = x - m_1\cos\varphi'$, $y_2 = y - m_1\sin\varphi'$ iar $\varphi' = \omega + \varphi$. Cum $M_i \in \Gamma_i : (x_i \pm a)^2 + y_i^2 = r_i^2$, avem $2m_2[(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi] = (x+a)^2 + y^2 + m_2^2 - r_2^2$, $2m_1\{[(x-a)\cos\omega + y\sin\omega]\cos\varphi - [(x-a)\sin\omega - y\cos\omega]\sin\varphi\} = (x-a)^2 + y^2 - m_1^2 - r_2^2$; rezolvat în $\sin\varphi, \cos\varphi$ cu $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, rezultă sextica

(102) $\qquad \Gamma : U^2 + V^2 = W^2$

cu $U = m_1[(x-a)\cos\omega + y\sin\omega][(x+a)^2 + y^2 + m_2^2 - r_1^2] - m_2(x+a)[(x-a)^2 + y^2 + m_1^2 - r_2^2]$, $V = m_1[(x-a)\sin\omega - y\cos\omega][(x+a)^2 + y^2 + m_2^2 - r_1^2] + m_2y[(x-a)^2 + y^2 + m_1^2 - r_2^2]$, $W = 2m_1m_2\sin\omega\,[x^2 + y^2 - 2ay\operatorname{ctg}\omega - a^2]$.

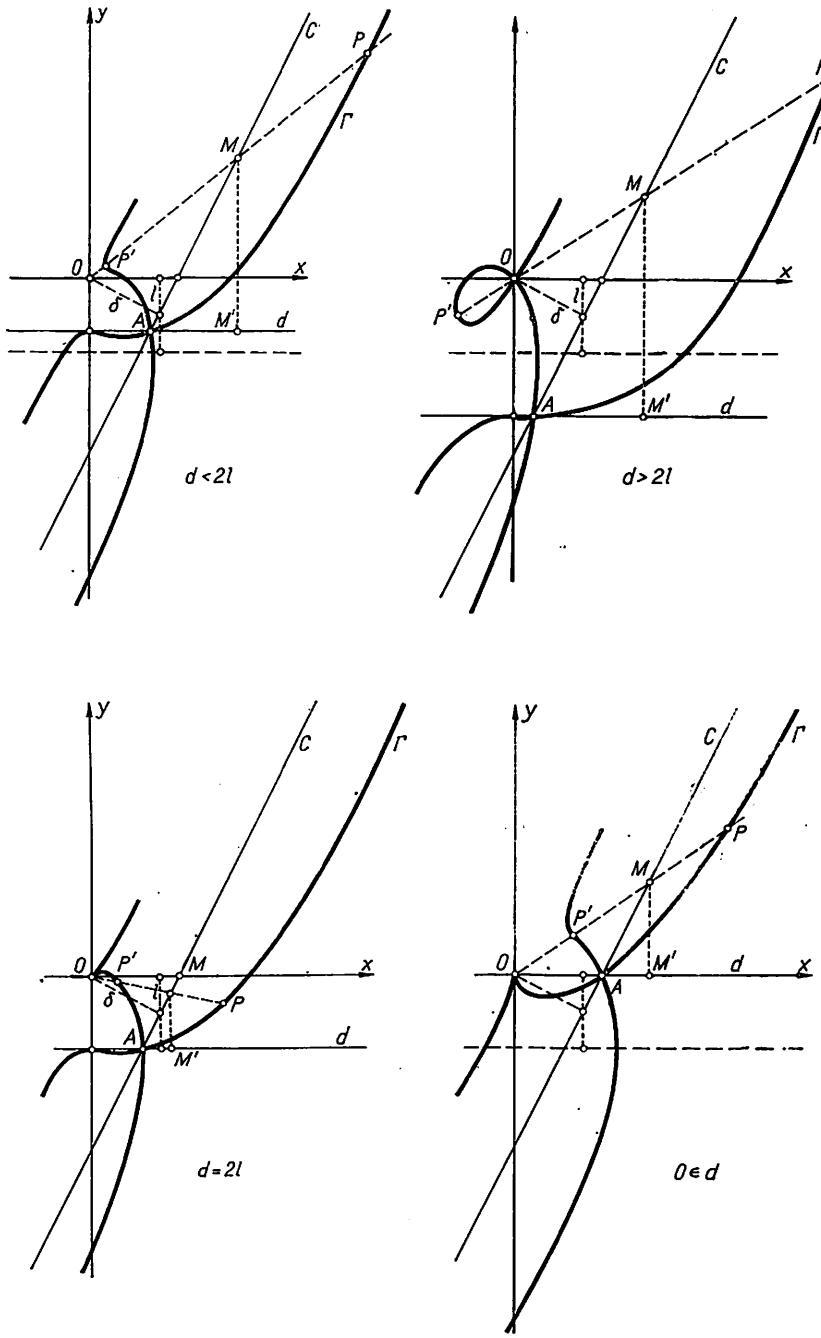

y
C
P
Γ
M
O
P'
x
δ
l
A
M'
d
d<2l
C
P
Γ
M
O
x
P'
δ
l
A
M'
d
d>2l
y
C
Γ
O
P'
M
x
δ
l
P
A
d
M'
d=2l
y
C
Γ
P
M
P'
O
M'
d
x
A
0∈d

Fig. 163

Punctele duble ale lui Γ sînt comune curbelor $U=0$, $V=0$; $W=0$; sînt, în general, în număr de 3. Γ poate admite un al 4-lea punct dublu, exterior cercului $W=0$; atunci Γ e o curbă unicursală. *Curba Watt* se obține din (102) cînd $r_1 = r_2 = r$, $\omega = \pi$ și $m_1 = m_2 = p$; deci are ecuația

$$(102') \qquad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + p^2 - a^2 - r^2)^2 + 4a^2y^2(x^2 + y^2 - r^2) = 0,$$

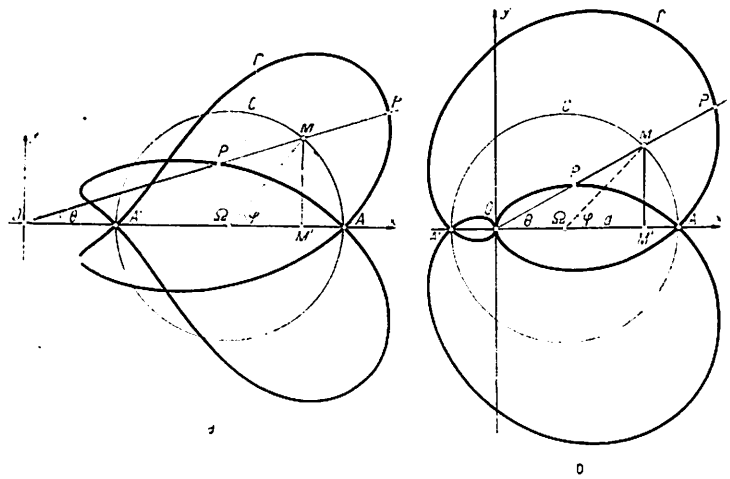


Fig. 164

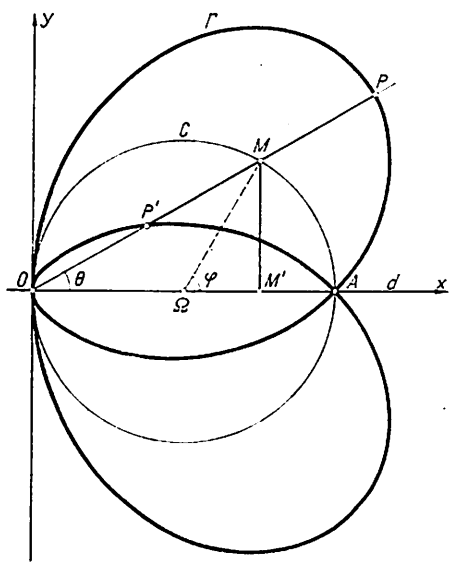


Fig. 165

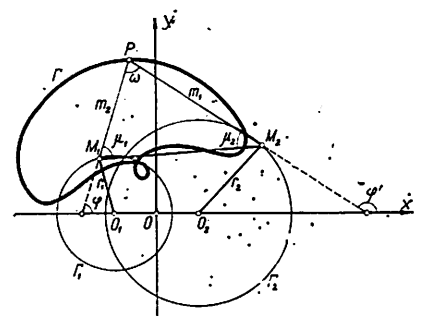


Fig. 166

simetrică față de Ox și Oy. Are un punct dublu în O, cu tangentele $(p^2 - a^2 - r^2)^2x^2 + [(r + a)^2 - p^2][(r - a)^2 - p^2]y^2 = 0$. Dacă $r^2 + a^2 - p^2 \neq 0$, O poate fi punct izolat, cuspidal (tacnod) cu Oy ca tangentă dublă sau nodal, după cum $p < |r - a|$, $p = |r - a|$ sau $|r - a| < p < r + a$ (fig. 167 a-c); atunci a, r și p nu pot forma un triunghi, pot forma un triunghi degenerat într-un segment sau un triunghi care nu e dreptunghic în vîrful opus laturii p. Dacă $r^2 + a^2 - p^2 = 0$, cînd a, r și p pot forma un triunghi dreptunghic de ipotenuză p, atunci O e un tacnod cu Ox

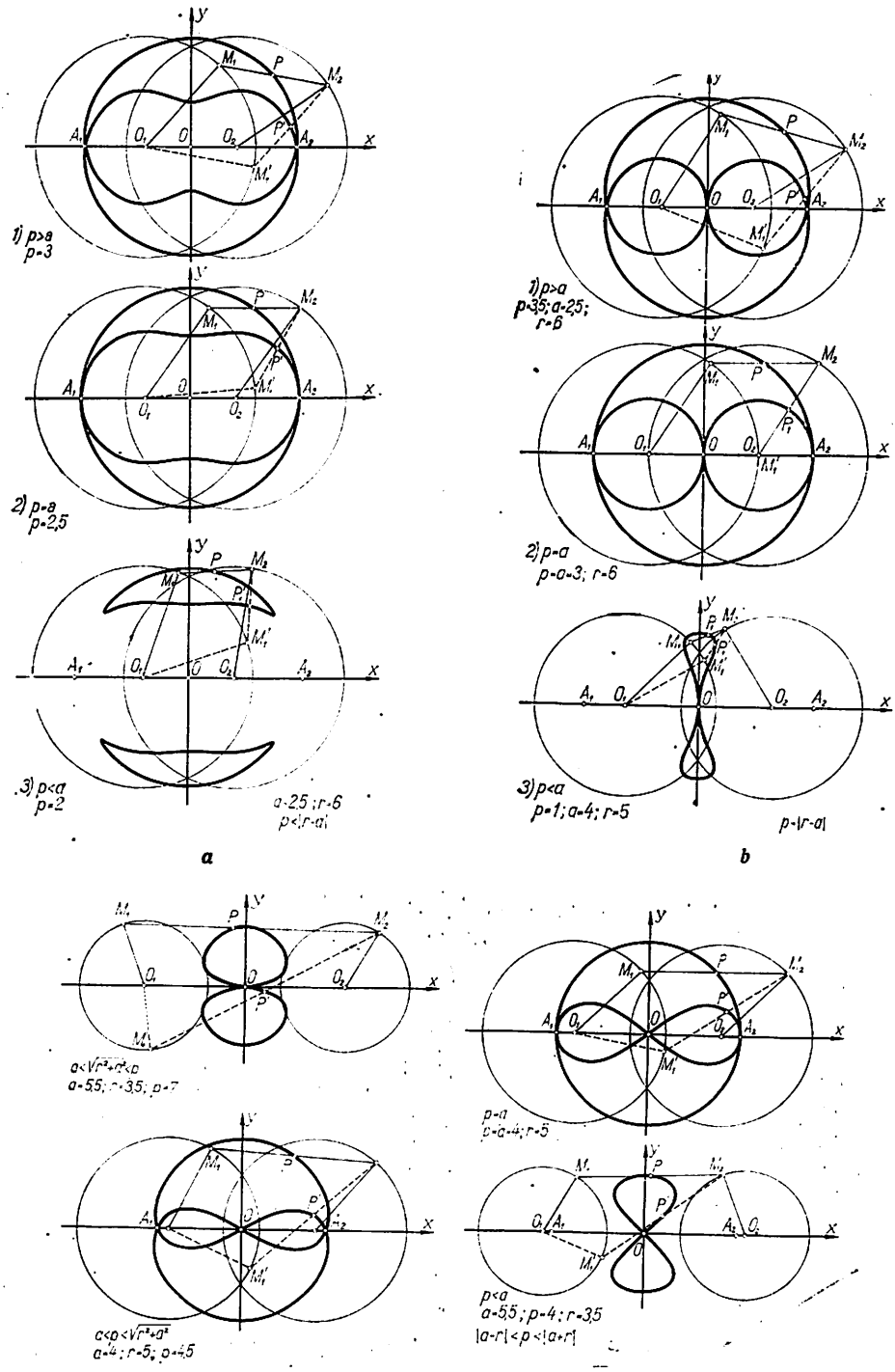

1) p>a
p=3
2) p=a
p=2,5
3) p<a
p=2
a=2,5 ; r=6
p<|r-a|
a
1) p>a
p=3,5; a=2,5;
r=6
2) p=a
p=a=3; r=6
3) p<a
p=1; a=4; r=5
p=|r-a|
b
a<√(r²+a²)<b
a=5,5; r=3,5; p=7
c<p<√(r²+a²)
a=4; r=5; p=4,5
p=a
p=a=4; r=5
p<a
a=5,5; p=4; r=3,5
|a-r|<p<|a+r|
c

Fig. 167

ca tangentă dublă (fig. 167 d). A_i $(\pm\sqrt{r^2+a^2-p^2}, 0) \in O_1O_2$ sînt alte 2 puncte duble ale curbei Watt, fiind reale distincte, confundate sau imaginare, după cum $p \lessgtr \sqrt{r^2+a^2}$. Cum $\Delta = (F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2)_{A_i} = 64\,a^2(r^2+a^2-p^2)^2(a^2-p^2)$, dacă $p < \sqrt{r^2+a^2}$, A_i sînt puncte nodale, cuspidale (tacnoduri) sau izolate, după cum $p > a$, $p = a$ sau $p < a$ (v. fig. 167 a–c). *Obs.* Cînd $p = a$, curba Watt se descompune în cercul $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ și în lemniscata Booth $C_2 : (x^2+y^2)^2 = r^2x^2 + (r^2 - 4a^2)y^2$, care e podara conicei $x^2/r^2 + y^2/(r^2-4a^2) - 1 = 0$ față de O; atunci $O_1M_1M_2O_2$ poate fi un paralelogram sau un antiparalelogram ($O_1M_1O_2M_2$ e trapez isoscel), cînd P descrie pe C_1 sau C_2. Dacă $p = \sqrt{r^2+a^2}$, atunci $A_1 = A_2 = 0$ (v. fig. 167 d). Dacă $p > \sqrt{r^2+a^2}$, atunci $p > a > |r-a|$ (v. fig. 167 c).

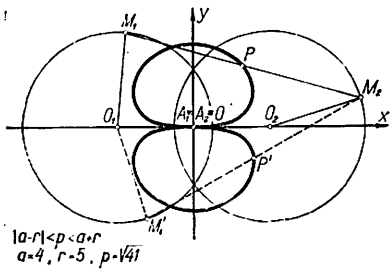


Fig. 167 *d*

55 Fie un punct fix O și un cerc $C(\Omega; R)$; $M \in C$ se proiectează ortogonal în M' pe $O\Omega$, iar M' în P_1 pe OM. Se repetă operația cu P_1 și se obține P_2; iterînd, se obține un șir de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Locul Γ_n al lui P_n, cînd M descrie pe C, se numește *oval de specia n* (în raport cu polul O). Să se afle punctele multiple ale ovalului.

R. Fie (fig. 168): $O\Omega = Ox$, $\Omega(a, 0)$, $\rho_n = OP_n = OM\cos^{2n}\theta$, $OM = O\Omega' \pm \Omega'M$ și

(103) $$\rho_n^2 - 2a\rho_n\cos^{2n+1}\theta + (a^2 - R^2)\cos^{4n}\theta = 0;$$

$$(x^2+y^2)^{2n+1} - 2ax^{2n+1}(x^2+y^2)^2 + (a^2-R^2)x^{4n} = 0,$$

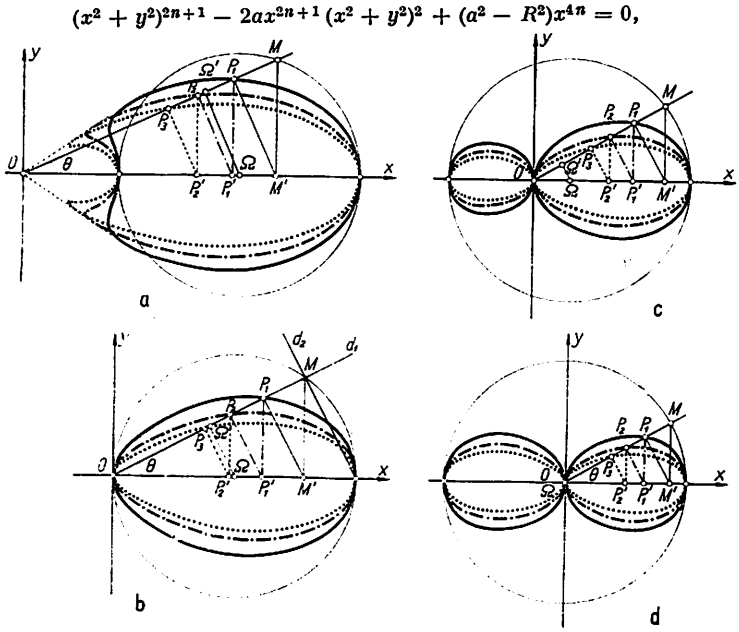


Fig. 168

Ox fiind axă de simetrie. Deci Γ_n e o curbă algebrică: de grad $2(2n+1)$, dacă $O \notin C$ ($a \neq R$), cînd O e punct multiplu de ordin $4n$, respectiv de grad $2(n+1)$, dacă $O \in C$ ($a = R$), cînd O e punct multiplu de ordin $2n+1$.

În cazul $n = 1$, $a = R$, Γ_1 e o cuartică unicursală, numită *ovoid* (sinonim: *foliu simplu, curba oului, curba lui Kepler*), avînd ecuația (fig. 168 b)

(103′) $$\rho = 2R\cos^3\theta;\quad (x^2+y^2)^2 - 2Rx^3 = 0;$$

O e un punct triplu cu tangentele confundate peste Oy. E inversa cubicei lui Longchamp; e podara hipocicloidei Steiner în raport cu unul din punctele de întoarcere. Generare uzuală: Prin unul din punctele fixe O_1 şi O_2, fie O_1, se duce secanta d_1 iar prin celălalt se duce $d_2 \perp d_1$; $M = d_1 \cap d_2$ se proiectează în M' pe O_1O_2, iar M' în P_1 pe d_1; P_1 descrie un ovoid. *Obs.* P_2, proiecţia lui M' pe d_2, descrie un al 2-lea ovoid, simetric cu primul faţă de mediatoarea lui O_1O_2 ($x - R = 0$).

În cazul $n = 1$, $a = 0$, Γ_1 e simetrică şi faţă de Oy şi are ecuaţia

$$(103'') \qquad (x^2 + y^2)^3 - R^2x^4 = 0.$$

O (punct cuadruplu) se descompune în 2 puncte de întoarcere obişnuite, Γ_1 admiţînd în O curbele aproximante $y \sim \pm Rx^2 = 0$; Γ_1 apare ca formată din 2 ovale proprii egale, simetrice faţă de Ox şi Oy (fig. 168 d).

56 Fie punctele A (fix) şi M (arbitrar) pe cercul C. Se ia $M \in C$ astfel ca arc AN = n arc $AM (n \in R_+)$; N se proiectează în N' pe OA şi în N'' pe diametrul perpendicular pe OA. Pe raza OM se iau P_1 şi P_2 astfel ca $OP_1 = NN'$ şi $OP_2 = NN''$, Locurile lui P_1 şi P_2, cînd M descrie pe C, sînt curbe congruente, numite *rodonee* (sinonim : *rozacee*), de indice n. Se cere : a) Să se arate că o rodonee e o curbă ciclică. b) Să se afle punctele multiple ale unei rodonee.

R. Fie (fig. 169) : $OA = a$; avem arc $AM = a\theta$, arc $AN = a\theta_1$ şi $\theta_1 = n\theta$, încît

$$(104) \qquad \Gamma_1 : \rho = a \sin n\theta \text{ şi } \Gamma_2 : \rho = a \cos n\theta.$$

Γ_1 se transformă în Γ_2 prin $\theta = \pi/2n - \theta$ (fig. 170). Punctele rodoneei sînt în interiorul *cercului fundamental* $C : \rho = a$. *Fie rodoneea* Γ_1. Pentru $\theta \in [0, \pi/n]$ se obţine un arc închis de rodonee (ovulul Γ), tangent în O la semidreptele $\theta = 0$, $\theta = \pi/n$ şi avînd semidreapta $\theta = \pi/2n$ (bisectoarea unghiului celor două tangente) ca axă de simetrie; în $A_1 (a, \pi/2n)$, cînd $\rho_{max} = a$, Γ şi C sînt tangente. Deci : intervalele $[0, \pi\ n], [\pi/n, 2\pi/n], [2\pi/n, 3\pi/n], \cdots$ dau toate arce egale, avînd axele de simetrie $\theta = \pi/2n$, $3\pi/2n$, $5\pi/2n, \ldots$ şi tangente la C în punctele unde aceste axe taie pe C, numite *vîrfuri* ale lui Γ_1. *Obs.* Rodoneele intervin în problema determinării unui punct care are o mişcare oscilatorie pe o dreaptă care se roteşte în jurul unui punct fix al ei. Luînd punctul fix ca pol : $\rho = a \sin \frac{m}{n} \theta + 2m\pi(\alpha - \tau)$ cu m — numărul oscilaţiilor pe secundă, n — numărul rotaţiilor dreptei pe secundă iar a, α, τ — constante. a) Fie (47); cu $l = a \pm r$, obţinem $\rho = 2(a + r) \sin \frac{a}{2r + a} t, \rho = 2(a - r) \cos \frac{a}{2r - a} t$. Reciproc : Γ_1 poate fi realizată prin rostogolirea unui cerc cu $r = a(1 - n)/2(1 + n)$ pe un cerc cu $r_0 = an/(1 + n)$ iar $l = a/2$. *Obs.* a$_1$) Rodoneele sînt curbe epiciclice : fie barele $OA = AP = a/2$, articulate în O şi A, care se rotesc în jurul acestora, cu viteze unghiulare de raport constant n'; P se mişcă pe cercul (A ; a/2), cu A descriind cercul (O ; $a/2$), şi are traiectoria $\rho = a \cos \frac{n'}{2 \pm n'} \theta$, după cum barele se rotesc în acelaşi sens sau în sensuri contrare (fig. 171). Deci o rodonee poate fi realizată în 2 moduri printr-o mişcare epiciclică a$_2$). Razele OA, OB ale cercului (O; a) se rotesc cu viteze unghiulare constante, de raport m; proiecţia lui A pe OB descrie $\rho = a \cos (m - 1)\theta$. a$_3$) Podara unei curbe ciclice normale ($l = a$), în raport cu centrul cercului fix, e $\rho = \frac{(2n + 1)a}{2} \cos \frac{\theta}{2n + 1}$ ($n = \frac{a}{r}$ e modulul curbei ciclice). b) Dacă

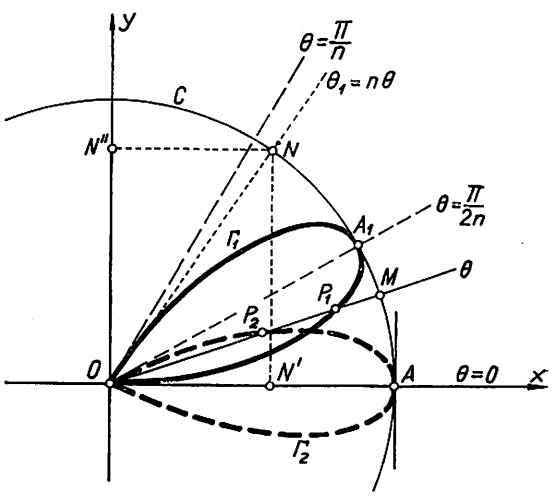


Fig. 169

indicele e irațional, O e un punct multiplu de ordin infinit; curba e formată dintr-o infinitate de ovale și e transcendentă. Dacă *indicele e rațional*: $n = p/q$, curba e algebrică de grad $p + q$ sau $2(p + q)$, fiind formată din p sau $2p$ ovale, după cum p și q sînt ambele sau nu impare; iar

$$a^q\,[C_p^1 x^{p-1} y - C_p^3 x^{p-3} y^3 + C_p^5 x^{p-5} y^5 - \ldots] = C_q^1 (x^2 + y^2)^{(p+1)/2}[a^2 -$$

(104′) $$- (x^2 + y^2)]^{(q-1)/2} - C_q^3 (x^2 + y^2)^{(p-1)/2}\,[a^2 - (x^2 + y^2)]^{(q-3)/2} + \ldots,$$

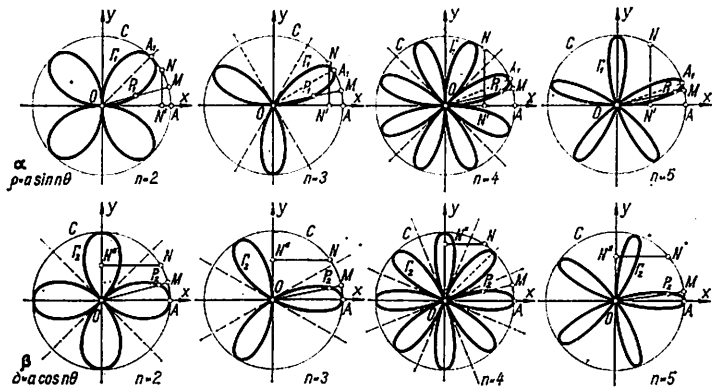


Fig. 170

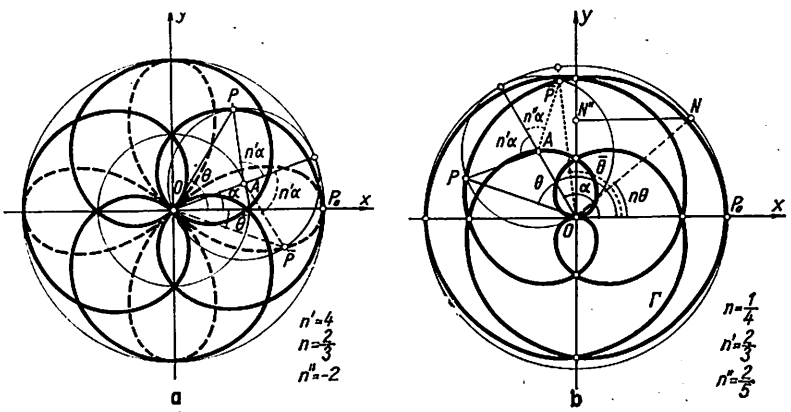


Fig. 171

O fiind un punct multiplu de ordinul p sau $2p$. Însă (v. probl. 7), o rodonee e o curbă unicursală; deci, în afară de O, ea are încă $p(q-1)/2$ sau $2p(q-1)$ puncte duble (echivalente). N-are puncte de inflexiune reale. *Rodonee* Γ_1 *particulare*: I) $n = 1$: *cerc* (tangent în O la Ox). II) $n = 2$: o sextică, cu O punct cuadruplu, numită *corolla* (fig. 170)

(105) $$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2;\ x = 4at\,(1 - t^2)^2/(1 + t^2)^3,\ y = 8at^2\,(1 - t^2)/(1 + t^2)^3$$

Generare: A și B fiind proiecțiile lui P (variabil) $\in$ cerc $(O; 2a)$ pe 2 diametri perpendiculari, e locul proiecției lui O pe AB. III) $n = 1/2$: o sextică simetrică față de Ox și Oy, cu un tacnod în O (ramurile tangente la Ox) și 2 noduri $(0, \pm a\sqrt{2})$, punctele ciclice fiind puncte triple; are cîte 2 tangente duble paralele cu axele (fig. 172). IV) $n = 3$: o cuartică bicirculară cu punct triplu în O, numită *trifoi regulat* (sinonim: *trifoi echilater*), (v. fig. 170). V) $n = 1/3$: o cuartică, cu $\Omega(0, a/2)$ punct dublu, numită *sescvisectoare* (fig. 173).

57 Pe un cerc $\gamma(O; a)$ se iau punctele A (fix) și P (variabil), iar pe OM se ia P cu $MO = MA$. Locul Γ al lui P are puncte multiple?

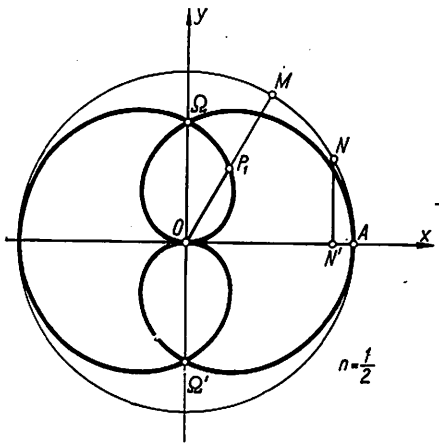


Fig. 172

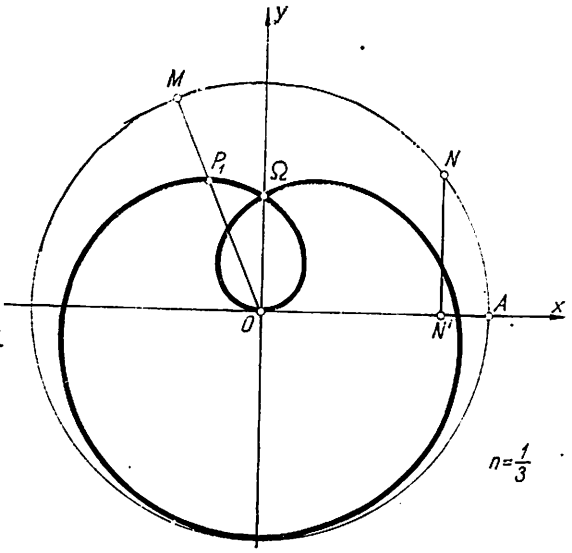


Fig. 173

R. În reperul polar de pol O şi $Ox = OA$, Γ e sextica (fig. 174)

$$\rho = a\left(1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\right);\ (x^2+y^2)^3 - 6a^2(x^2+y^2)^2 + 8a^3x(x^2+y^2) + a^4(y^2-3x^2) = 0.$$

O — punct nodal, A şi punctele ciclice — puncte triple. Γ e concoida rodoneei $\rho = 2a\sin\frac{\theta}{2}$.

Obs. Γ permite împărţirea lui γ în 7 arce egale: dacă $P_1 \in \Gamma$ se proiectează în mijlocul lui OA iar $M_1 = \gamma \cap OP_1$, atunci $\widehat{M_1OA} - \widehat{OM_1A} = \pi/7$. Cunoscînd împărţirea cercului în $2^{2^\mu}+1$ arce egale, se poate realiza împărţirea lui în $7(2^{2^\mu}+1)$ arce egale.

58 Fie P_0 un punct multiplu de ordin n al unei curbe C: $F(x,y) = 0$. Într-o vecinătate $V(P_0)$ a lui P_0, unei rădăcini simple m a ecuaţiei

$$\Lambda(n\,;m) = (F_{x_0} + mF_{y_0})^{(n)} = 0 \tag{106}$$

îi corespunde un arc regulat al lui C, tangent în P_0 dreptei d de ecuaţie (24_2). Rădăcinei m multiplă de ordin s, care nu-i rădăcină a ecuaţiei

$$\Lambda(n+1\,;m) = (F_{x_0} + mF_{y_0})^{(n+1)} = 0, \tag{106'}$$

îi corespunde o ramură tangentă în P_0 dreptei d; după cum s e par sau impar, P_0 e punct de întoarcere de prima speţă, respectiv ramura e formată din 2 arce

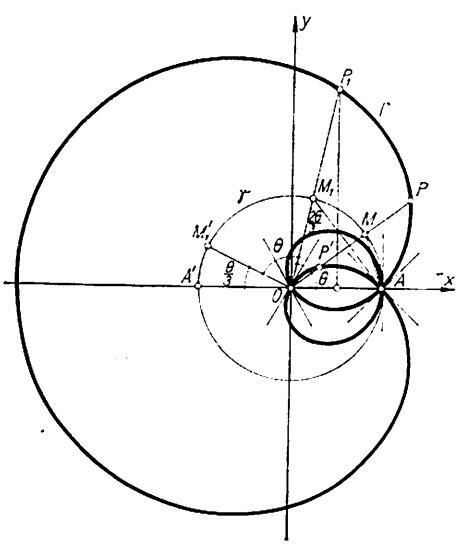


Fig. 174

regulate care pleacă din P_0 în sensuri contrare situate de aceeaşi parte a tangentei. *Apl.* a) $C: x^5 + 2x^2y - y^2 = 0$. b) Să se obţină explicit ecuaţia celor două arce regulate ale cubei, din $V(P_0)$, cînd P_0 e punct de întoarcere de prima speţă.

R. Printr-o translaţie, putem avea $P_0 = 0$; ecuaţia lui C se scrie

(107) $$(xF_{x_0} + yF_{y_0})^{(n)} + \frac{1}{n+1}(xF_\xi + yF_\eta)^{(n+1)} = 0 \ (\xi = \theta x, \eta = \theta y;\ 0 < \theta < 1).$$

(24_2) şi (107) se taie în puncte ($\neq 0$) de abscise date de ecuaţia

(108) $$f(x, m) = \Lambda(n; m) + \frac{x}{n+1}\Phi(x, m) = 0, \Phi(x, m) = (F_\xi + mF_\eta)^{(n+1)}.$$

Ecuaţia (106) admite pe m_1 ca rădăcină multiplă de ordin s ($s \geqslant 1$), dacă

(106'') $$\Lambda_{m^i}(n; m_1) = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, s-1), \Lambda_{m^s}(n; m_1) \neq \left(\Lambda_{m^k}(n; m_1) = \frac{d^k\Lambda(n; m)}{dm^k}\Big|_{m_1}\right)$$

Fie m_1 o *rădăcină simplă* ($s = 1$) a ecuaţiei (106). Atunci, într-o vecinătate a lui $M_1(0, m)$ — ce corespunde lui O —, există şi e continuă funcţia $f_m(x, m)$ iar $f(0, m_1) = 0$, $f_m(0, m_1) \neq 0$; adică $f(x, m)$ se poate explicita printr-o funcţie unică $m = \varphi_1(x)$ de clasă C^1, astfel încît $f[x, \varphi_1(x)] = 0$ iar pentru $x = 0$ avem $\varphi_1(0) = m_1$: *C admite prin O arcul simplu şi neted*

(109) $$y = x\varphi_1(x) \text{ cu } F[x, x\varphi_1(x)] = 0, \ y'_0 = \varphi_1(0) = m_1.$$

Fie m_1 o *rădăcină multiplă de ordin $s > 1$* a ecuaţiei (106). Acum explicităm pe $f(x, m)$ în raport cu x; căci, din (108), cu (106') şi (106''), avem

$$f_{m^i}(0, m_1) = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, s-1), f_{m^s}(0, m_1) \neq 0, f_x(0, m_1) = \frac{1}{n+1}\Lambda(n+1; m_1) \neq 0.$$

Deci există funcţia unică $x = \varphi(m)$ de clasă C^1; *C admite în O ramura*

(110) $$x = \varphi(m), y = m\varphi(m) \text{ cu } F[\varphi(m), m\varphi(m)] = 0, \ y'_0 = m_1.$$

Însă $x' = \varphi'(m) = -f_m/f_x$, $x'' = \varphi''(m) = -[f_{m^2} + x'f_{mx})f_x - (f_{xm} + x'f_{x^2})f_m]/f_x^2 \ldots$,

$$x^{(p)} = \varphi^{(p)}(m) = -[f_m + f_x^{p-1} + P(x^{(k)} f_{x^p}, x^{(k)} f_{x^i m^j}, f_{xi m^j}, f_{m^k}, f_{xi m^k})]/f_x^p,$$

unde P e un polinom fără termen liber de argumentele indicate ($i, j, k = 1, 2, \ldots, p-1$). Demonstraţia se face prin inducţie completă. Rezultă

$$x_0^{(i)} = \varphi^{(i)}(m_1) = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, s-1), \ x_0^{(s)} = \varphi^{(s)}(m_1) = -f_m^s(0, m_1)/f_x(0, m_1) \neq 0.$$

Printr-o rotaţie avem $m_1 = 0$ şi *ramura prin O (tangentă la Ox) a lui C*:

(110') $$x = \frac{m^s}{s!}x^{(s)}(\theta m), \ y = \frac{m^{s+1}}{s!}x^{(s)}(\theta m) \ (0 < \theta < 1).$$

Studiind poziţia acestei ramuri faţă de tangenta Ox (în O la C), rezultă afirmaţia din problemă; căci, într-o vecinătate a lui $m = 0$: $x^{(s)}(m)$ e o funcţie continuă iar $x^{(s)}(0) \neq 0$. *Apl.* a) O e tacnod (fig. 175). b) Prin o rototranslaţie putem avea $x_0 = y_0 = 0$, $m_1 = m_2 = 0$, $F_{x^2}^0 = F_{x_0y_0} = 0$, $F_{y^2}^0 \neq 0$. Dacă $F_{y^2}^0 F_{x^3}^0 < 0 \ (> 0)$, prin $m = \mu x^{1/2}$ ($m = -\mu x^{1/2}$), din (108) avem

(111) $$\psi(x, \mu) = \mu^2 F_{y^2}^0 + \frac{1}{3}\Phi(x, \mu x^{1/2}) = 0 \quad \text{cu} \quad \psi(0, \mu) = \mu^2 F_{y^2}^0 + \frac{1}{3}F_{x^3}^0.$$

Fie $M_0(x_0, \mu_0) \in (111)$; M_0 corespunde punctului dublu O dacă $x_0 = 0$, $\mu_0 = \pm \sqrt{-F_{x_0^3}/3F_{y_0^2}}$. $\psi(x, \mu)$, $\psi_\mu(x, \mu)$ sînt continue în vecinătatea lui M_0, iar $\psi_\mu(0, \mu_0) = 2\mu_0 F_{y_0^2} \neq 0$; deci $\psi(x, \mu)$ definește două funcții de clasă C^1: $\mu = \mu_i(x)$ astfel încît $\psi[x, \mu_i(x)] = 0$ iar pentru $x = 0$ iau valorile $\mu_i(0) = \pm \mu_0$ $(i = 1, 2)$. Deci: *ramurile (lui C) care pleacă din O au ecuațiile*

(112) $$C_i : y = x^{3/2}\mu_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

59 Fie cercul $C(O; r)$ și un punct A cu $OA = a$. $M \in C$ se proiectează pe diametrul OA în M_1; pe MM_1 se ia P astfel ca ariile triunghiurilor OM_1M și OAP să fie egale: P descrie *lemniscata lui Gérono*, avînd un nod în O.

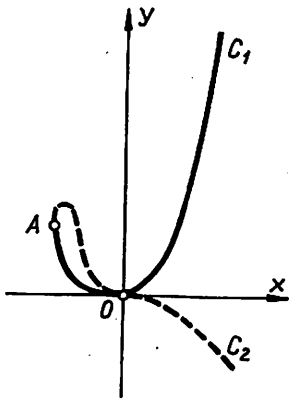


Fig. 175

R. Cu $y = tx$, $r^2 - a^2t^2 = (r + at)^2 u^2$, se obține cuartica unicursală

$$x = 2ru/(1 + u^2),$$

(113) $$a^2y^2 = (r^2 - x^2)\, x^2;$$

$$y = 2r^2u^2 (1 - u^2)/a (1 + u^2)^2.$$

Curba e închisă, înscrisă în dreptunghiul $x = \pm r$, $y = \pm r^2/2a$ (fig. 176).

60 Să se arate: a) o cubică cu 2 puncte duble e degenerată într-o dreaptă și o conică; b) o cuintică cu 2 puncte triple e degenerată.

61 Să se arate că o curbă algebrică C_n de gen zero e unicursală.

R. Dacă δ e numărul punctelor duble ale lui C_n, *genul curbei* e

(114) $$g = \delta - (n - 1)(n - 2)/2.$$

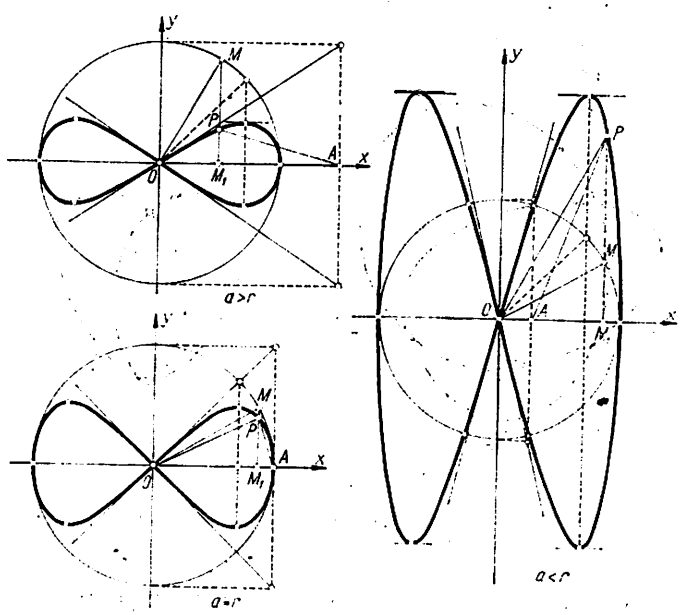


Fig. 176

C ind $g = 0$, C_n e de *gen zero*; atunci, prin cele δ puncte duble şi alte $n-3$ puncte de pe C_n, putem face să treacă un fascicul de curbe C_{n-2}: $C^k_{n-2} = C'_{n-2} - kC''_{n-2} = 0$, căci avem $\delta+n-3 = (n-2)(n-1)/2 - 1$ puncte. Însă, orice C^k_{n-2} taie pe C_n în $n(n-2)$ puncte, dintre care se cunosc $N = 2\delta + n - 3 = n(n-1) - 1$ puncte; deci au un singur punct mobil în comun. Eliminantul lor în x, respectiv în y, fiind de forma $(x-x_1)\dots(x-x_N)[P(k) + xR(k)] = 0$, respectiv $(y-y_1)\dots(y-y_N)[Q(k) + xS(k)] = 0$, cu P, Q, R, S polinoame (cel mult) de grad n în k:

(115) $\qquad x = -P(k)/R(k),\ y = -Q(k)/S(k).$

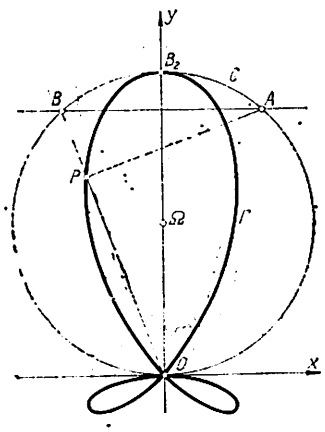


Fig. 177

62 Într-un cerc C, tangent în O la Ox, se duce o coardă variabilă AB paralelă la Ox. Să se afle: a) Locul Γ al intersecţiei lui OB cu perpendiculara din A pe OB. b) Punctele multiple ale curbei Γ.

R. a) OB: $y = tx$, C: $x^2+y^2-2ay = 0$, Γ: $(x^2+y^2)^2 + 2ay(x^2-y^2) = 0$ sau $\rho = -2a\sin\theta\cos 2\theta$; $x = \pm a/2$ şi $y = -a/4$ sînt bitangente la Γ (fig. 177; v. şi fig. 42). b) O e un punct triplu. *Obs.* Un punct triplu poate proveni din suprapunerea a trei puncte duble; deci Γ e de gen zero (v. şi probl. 7): $x = 2at(t^2-1)/(t^2+1)^2$, $y = 2at(t^2-1)/(t^2+1)^2$.

63 Fie parabolele γ ce trec prin vîrfurile triunghiului dreptunghic OAB ($\hat{O} = 90°$). Se cere: a) Să se arate că locul vîrfului lui γ e o septică unicursală. b) Să se studieze locul punctelor P din plan pentru care axa lui γ ce trec prin el formează un unghi dat θ; caz particular: $A = 0$.

R. a) Fie $A(2a, 0)$ şi $B(0, 2b)$; deci parabolele γ au ecuaţia

(116) $\qquad (y - tx)^2 - 2at^2x - 2by = 0$ cu axa $y - tx - (b - at^3)/(1 + t^2) = 0$.

Vîrful, intersecţia parabolei au axa, descrie septica unicursală

(117) $\qquad x = -\dfrac{(b - at^3)(b + 2bt^2 + at^3)}{2t(1+t^2)^2(at+b)},\quad y = \dfrac{(b - at^3)(b + 2at + at^3)}{2(1+t^2)^2(at+b)}.$

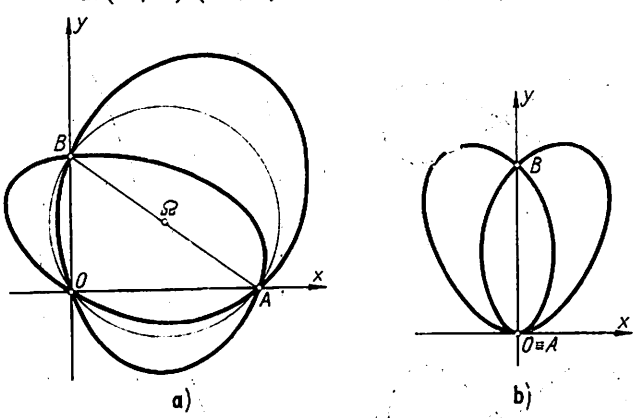


Fig. 178

b) Prin P trec două parabole reale dacă $2xy(bx + ay - 2ab) \geqslant 0$. Cu t' şi t'' pantele axelor şi $c = 1/\mathrm{tg}\theta$: $(t' + t'')^2 - 4t't'' = (1 + t't'')^2/c^2$; deci

(118) $\qquad (x^2 + y^2 - 2ax - 2by)^2 = 8c^2xy(bx + ay - 2ab).$

O, A, B sînt noduri, cu tangentele de o parte şi de alta a tangentei la cercul OAB (fig. 178 a). Cuartica e unicursală (de gen zero). Dacă $A = 0$ ($a = 0$), curba (118) e simetrică faţă de Oy şi e situată în semiplanul $y > 0$. O e tacnod (Ox tangentă dublă) şi B e nod (fig. 178 b).

64 Un punct M al cercului $C(O\,;\,a)$ se proiectează pe 2 diametri ortogonali AA' şi BB' în M_1 şi M_2, iar pe M_1M_2 în M_0. Pe M_2M se ia P astfel ca $MP = MM_0$ iar P să fie exterior sau interior lui M_2M după cum M se găseşte pe semicercurile ABA' sau $A'B'A$. Locul Γ al lui P, cînd M descrie pe C, e o cuartică unicursală, numită *sfîrleză*.

R. Luînd $A(a, 0)$ şi $B(0, a)$ iar $\theta = \widehat{AOM}$ sfîrleza are ecuaţia

$$(y + a)^2(y^2 - a^2) + a^2x^2 = 0\,; \tag{119}$$

$$x = a(1 + \sin\theta)\cos\theta,\ y = a\sin\theta\,;$$

$$x = a(1 + t)^2(1 - t)^2/(1 + t^2)^2,\ y = 2at/(1 + t^2).$$

Γ e simetrică faţă de BB'; conţine pe A şi A'; are 2 puncte de inflexiune reale; B' $(0, -a)$ e punct de întoarcere de prima speţă (BB' — tangenta cuspidală), fig. 179. *Obs.* a) Aria domeniului delimitat de Γ e egală cu aria C : $2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin^3 t)\,dt = \pi a^2$. b) $M_0 \in (50)$.

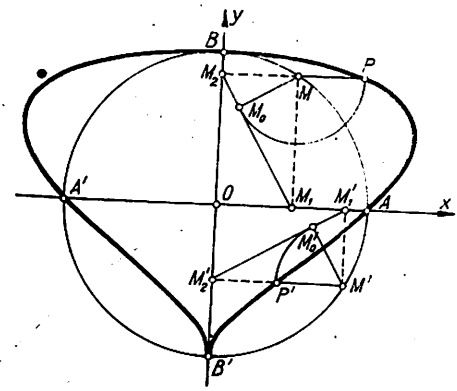


Fig. 179

65 Numim *parabolă virtuală* cuartica (în coordonate ortogonale)

$$\Gamma : y = \sqrt{a_1x + b_1} + \sqrt{a_2x + b_2} \text{ cu } D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \tag{120}$$

Se cere : a) Să se cerceteze dacă curba admite puncte multiple. b) Să se arate că, dîndu-se un cerc C, un punct fix O C şi o dreaptă fixă d prin O, locul punctelor P, P' comune dreptei d' (paralela prin $M \in C$ la d) şi cercului C' (de rază OM şi centru O', unde d' taie perpendiculara în O pe d) e parabola virtuală cu punct dublu nodal în O; această parabolă virtuală se numeşte *curba desagilor* (fig. 180).

R. a) Raţionalizînd ecuaţia (120), din (85) : $x = -(b_1 - b_2)/(a_1 - a_2)$, $y = 0$ şi $\Delta = -16\,D$; Γ *poate admite un punct dublu necuspidal*; luat în θ, obţinem

$$\Gamma : y^4 - 2(a_1 + a_2)\,xy^2 + (a_1 - a_2)^2\,x^2 - 4b_1\,y^2 = 0. \tag{120'}$$

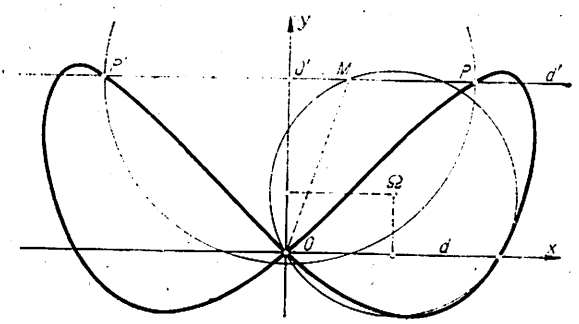


Fig. 180

b) $d = Ox$ şi $OO' = Oy$; $\Omega\,(a/2, b/2)$ centrul lui C; $OM = (a + bt)/\sqrt{1 + t^2}$ iar

$$x = \varepsilon(a + bt)/\sqrt{1 + t^2},\ y = (a + bt)t/(1 + t^2),\ (\varepsilon = \pm 1)\,;\ (x^2 - by)^2 = a^2(x^2 - y^2). \tag{121}$$

Schimbînd axele între ele și identificînd (121) cu (120'), obținem

$$(121') \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(b+c)x} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(b-c)x}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dacă $\Omega \in d$, găsim o lemniscată Gérono (113); altă generare (fig. 181): $M \in C$ (cerc fix, de rază a) se proiectează pe diametrul AA' în M'; e locul intersecției P, P' a lui MM' cu cercul de centru M', tangent la OM.

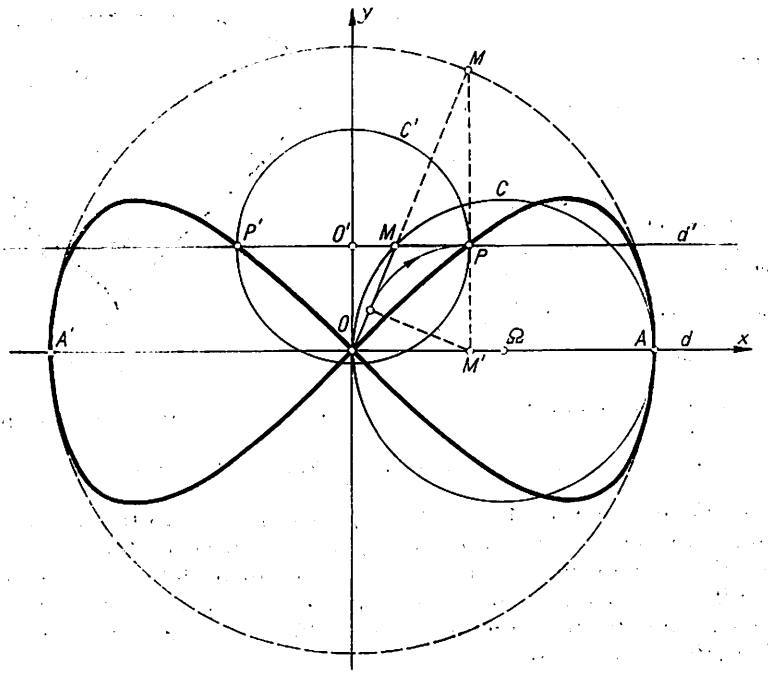


Fig. 181

66 Numim *parabolă divergentă* cubica (în coordonate ortogonale)

$$(122) \qquad \Gamma : y^2 = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 \quad (a \in R,\ a_0 > 0;\ \alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Să se cerceteze dacă parabola divergentă are puncte multiple.

R. Γ e simetrică față de Ox. Se împart în 5 clase, după natura rădăcinilor $\alpha_k (k = 1, 2, 3)$ ale trinomului în x; cu $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_2$ (fig. 182)

$$(122') \qquad \Gamma : y^2 = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

După (85) și $\Delta = -4a_0[(x-\alpha_1) + (x-\alpha_2) + (x-\alpha_3)]$, numai $A_k(\alpha_k, 0)$ pot fi puncte duble. *Caz I)* α_k sînt reale și distincte. Cum $F_x(A_k) \neq 0$, Γ nu are puncte duble. *Caz II)* $\alpha_1 \in R$ iar $\alpha_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha_3 = \alpha - i\beta$ ($i^2 = -1$). Însă $F_x(A_k) \neq 0$; Γ n-admite puncte duble. *Caz III)* $\alpha_1 = \alpha_2$; $A_1 = A_2$ e punct izolat pentru Γ. *Caz IV)* $\alpha_2 = \alpha_3$; Γ are un nod în $A_2 = A_3$. *Caz V)* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Γ are în $A_1 = A_2 = A_3$ un punct de întoarcere de prima speță; Γ se mai numește *parabola semicubică* (sinonim: *parabola lui Neil*). *Obs.* a) Puncte de inflexiune reale: 3 (caz I—III) sau 1 (caz IV—V); unul din ele e impropriu. În caz I—II, cu vîrfurile triunghiului fundamental ale reperului proiectiv în punctele de inflexiune reale, $\Gamma : x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6kx_1x_2x_3 = 0$. b) Γ cu punct dublu e unicursală. c) Dacă $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = p/3$. $a_3 = q$, Γ admite un punct dublu, dacă $4p^3 + 27q^2 = 0$. d) Orice cubică ireductibilă se obține printr-o transformare proiectivă dintr-o parabolă divergentă; reciproc (dreapta de la infinit fiind o tangentă inflexionară), avem

$$(122'') \qquad y^2 = (x-\alpha)(x^2 - k^2),\ 0 < k < \alpha;\ y^2 = (x-\alpha)(x^2 + k^2);$$

$$y^2 = x^2(x - k^2);\ y^2 = x^2(x + k^2) \text{ și } y^2 = x^3.$$

e) Denumirea de *parabole divergente* se datorește lui *I. Newton.*

67 *Duala* (*polara reciprocă*) a unei cisoide, în raport cu un cerc cu centrul în punctul dublu, e o parabolă semicubică.

R. Fie cisoida C: $x = a/(1 + t^2)$, $y = at/(1 + t^2)$; tangenta: $2t^3x - (1 + 3t^2)y + a = 0$. Fie (α, β) polul tangentei în raport cu cercul $\Gamma(O; r)$; deci $\alpha x + \beta y = r^2$. Identificînd: $\alpha/2t^3 = -\beta/(1+3t^3) = -r^2/a$; deci parabola semicubică $4(ay/r^2-1)^3 = 27a^2x^2/r^4$, cu punctul de întoarcere în $A(0, r^2/a)$.

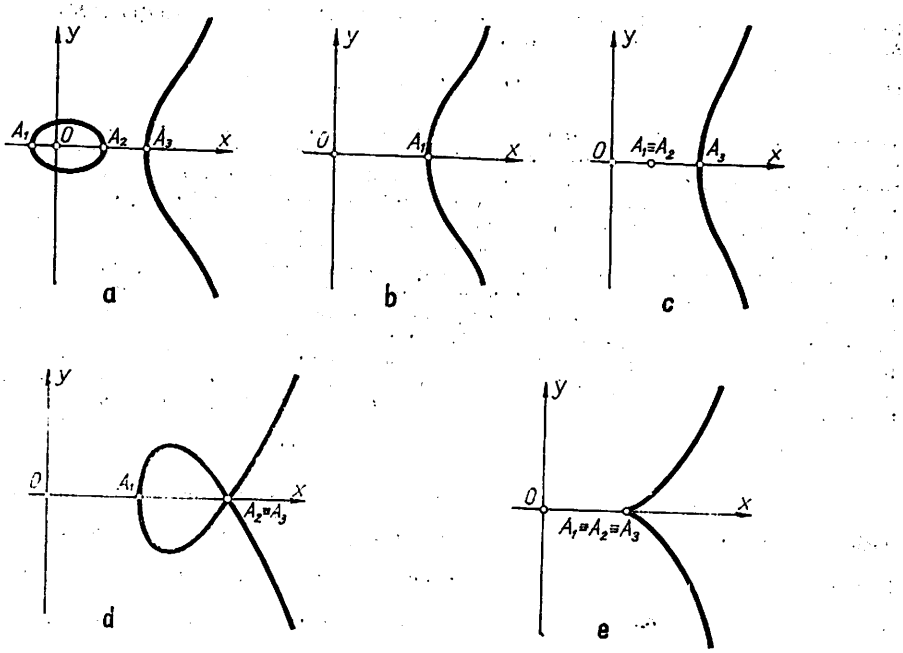


Fig. 182

68 Fiind dată o curbă algebrică C_n de gradul n, se cere: a) Să se demonstreze *formulele lui Poncelet—Plücker*:

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3k, \quad i = 3n(n-2) - 6\tau - 8k, \tag{123}$$

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3i, \quad k = 3m(m-2) - 6\tau - 8i,$$

cu m, i, τ, δ și k — *clasa* lui C_n, numărul *punctelor de inflexiune*, al *tangentelor duble*, al *punctelor duble izolate sau nodale* și, respectiv, al *punctelor de întoarcere* pe care le are C_n. b) Să se arate că formulele (123) se reduc la 3 relații independente. *Apl.* a) Să se clasifice cubicele și cuarticele; să se studieze cazul cubicelor care admit un punct cuspidal. b) Să se arate că C_n (ireductibilă) cu $n > 2$, care n-are puncte de inflexiune (reale), trebuie să fie de grad par; în acest caz, C_n are puncte cuspidale. c) Să se găsească elementele plückeriene ale nefroidei (48).

R. a) Fie, în coordonate omogene, C_n de ecuație

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ sau, simplificat, } f(x_i) = 0 (i = 1, 2, 3). \tag{124}$$

Dreapta d determinată de punctele $P(x_i')$ — fix și $P(x_i)$ — variabil e

$$X_i = hx_i' + x_i \ (h \text{ — coordonata proiectivă pe dreaptă}). \tag{125}$$

Făcînd intersecţia lui C_n cu d, obţinem eliminantul

$$f(hx_i' + x_i) = h^n f(x_i') + \frac{h^{n-1}}{1!}(x_i f_{x_i'}) + \frac{h^{n-2}}{2!}(x_i f_{x_i'})^{(2)} + \ldots +$$

$$(126) \qquad + \frac{h}{(n-1)!}(x_i f_{x_i'})^{(n-1)} + f(x_i) = 0 \text{ şi } (n-p)!(x_i f_{x_i'})^{(p)} = p!(x_i' f_{x_i})^{(n-p)},$$

puterile fiind simbolice. Dacă $P \in C_n$, d e tangentă în P la C_n cînd ecuaţia (126) are rădăcinile $h_1 = h_2 = 0$; P se găseşte din sistemul

$$(127) \qquad C_n : f(x_i) = 0, \ \Gamma_{n-1} : x_i' f_{x_i} = 0.$$

Deci $m \leqslant n(n-1)$, maximul fiind atins dacă C_n n-are puncte multiple: dacă P e punct dublu, el e simplu pentru Γ_{n-1} (se arată uşor, luînd $P=0$). Cum $P'P$ nu e tangentă, însă se găseşte printre dreptele care în ecuaţia (126) termenul liber şi coeficientul lui h sînt nuli, rezultă că din numărul soluţiilor lui (127) trebuie să scadem 2, respectiv 3, soluţii după cum P e izolat sau nodal, respectiv, e de întoarcere; căci, dacă tangentele (în P la C_n) se confundă, C_n şi Γ_{n-1} au în comun şi tangenta (în P), ceea ce corespunde la 3 soluţii comune.

Maximum în (82) e atins dacă C_n n-are puncte multiple. Fie $P \in C_n$ un punct dublu nodal sau izolat; în (127), P contează ca o soluţie de ordinul 6 : 4 — că P e dublu pentru C_n şi pentru H (hessiana), iar 2 — că tangentele în P la C_n sînt tangente şi în P la H. Fie $P \in C_n$ un punct de întoarcere; în (127), P contează ca o soluţie de ordinul 8 : 6 — că P e dublu pentru C_n şi triplu pentru H, iar 2 — că tangenta în P la C_n ne dă o tangentă dublă în P la H. Prin transformări duale (corelative) ale lui C_n, rolul elementelor plückeriene punctuale: n, δ, k şi cele duale: m, τ, i se schimbă între ele. *Obs.* a_1) Se numesc *curbe polare ale lui P' în raport cu C_n* curbele

$$\Gamma_{n-1} : x_i' f_{x_i} = 0, \ \Gamma_{n-2} : (x_i' f_{x_i})^{(2)} = 0, \ldots, \Gamma_2 : (x_i f_{x_i'})^{(2)} = 0, \ \Gamma_1 : x_i f_{x_i'} = 0,$$

ele fiind *prima curbă polară, a doua curbă polară, ..., conica polară* (sinonim: *poloconică*) şi *dreapta polară*. Dacă polara lui P' e d: $\xi_i' x_i = 0$, atunci $\rho \xi_i' = \frac{\partial f}{\partial x_i'}$. Eliminarea lui ρ ne conduce la 2 ecuaţii în x_i' de grad $n-1$; deci: *O dreaptă d, în raport cu C_n, are $(n-1)^2$ poluri.* Dacă $P'' \in d$, avem $x_i'' \frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$; deci $P' \in \Gamma_{n-1}(P'')$, adică: *Polurile unei drepte sînt punctele de intersecţie ale primelor curbe polare a două dintre punctele dreptei.* Dacă poloconica lui P' e degenerată, atunci $P' \in H$; deci: *Hessiana e formată din punctele din planul curbei C_n a căror poloconică e formată din 2 drepte.* Locul S al centrelor poloconicelor degenerate ale lui C_n se numeşte *steineriana lui C_n*. Deci, lui $P' \in H$ îi corespunde $\Omega \in S$, centrul Ω al poloconicei Γ_2 a lui P' în raport cu C_n; Ω e punct singular pentru Γ_2 şi e dat de sistemul $x_j f_{x_i' x_j'} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), încît ecuaţia lui S se obţine eliminînd pe x_i' din ecuaţiile acestui sistem. S e o curbă algebrică de grad $3(n-2)^2$. Dacă prima curbă polară Γ_{n-1} a lui P' admite puncte duble, atunci $P' \in S$. Cînd $n = 3$: $S = H$. a_2) C_n se numeşte *autoduală* dacă $n = m$, $\delta = \tau$, $k = i$ (elementele punctuale sînt egale cu dualul corespunzător); deci: *Pentru ca C_n să fie autoduală e suficient ca $n = m$.* b) Din (123_1), multiplicată cu 3, se scade (123_2), respectiv din (123_3), înmulţită cu 3, se scade (123_4); obţinem

$$(123') \qquad 3m - i = 3n - k \text{ sau } 3(m-n) = i - k.$$

Deci: $(123_{1,3})$ şi (123') constituie 3 formule independente. *Apl.* a) Fie C_3 ireductibilă: $\tau = 0$ şi (v. probl. 60a) $\delta = 1$, $k = 0$ sau $\delta = 0$, $k = 1$ (tabela 1). *Obs.* Singurele cubice autoduale sînt cele de tip *III*.

Tabela 1

Tipul	n	δ	k	m	τ	i	κ
I	3	0	0	6	0	9	1
II	3	1	0	4	0	3	0
III	3	0	1	3	0	1	0

Fie $k = 1$; C_3 are un punct cuspidal A_3 şi un punct de inflexiune A_2. În reperul proiectiv $(A_1A_2A_3; E)$, cu E arbitrar (fig. 183), C_3 are ecuaţia

(128) $$x_2^2x_3 - ax_1^3 = 0 \ (a>0)\text{; respectiv } y^2 - ax^3 = 0 \text{ sau } y = ax^3,$$

după cum dreapta inflexionară e dreapta improprie, cînd regăsim *parabola semicubică* (fig. 184 a), sau punctul cuspidal e la infinit pe Oy, cînd obţinem *parabola cubică* (sinonim: *parabola lui Wallis*; fig. 184 b). Ex.:

(129) $$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e o parabolă cubică, cu punct de inflexiune dat de $x = -b/3a$ (fig. 185). Luîndu-l ca origine iar tangenta inflexionară ($m = (3ac - b^2)/3a$) ca Ox, ecuaţia (129) se transformă în (128_3).

Fie C_4 ireductibilă; diferitele tipuri sînt date în tabela 2. *Obs.* Cuarticele autoduale sînt cele de tipul IX. b) $g = (n-1)(n-2)/2 - (\delta + k)$. Din ($123_2$) şi $i = 0$, deducem $3n = 2(k - 3g + 3)$; deci $n = 2n'$. În ipoteza $n \geqslant 2$, rezultă $g \geqslant 0$ şi $n' \geqslant 2$; deci $k = 3(n' + g - 1) \geqslant 3$ şi C_n are puncte de întoarcere.

Tabela 2

Tipul	n	δ	k	m	τ	i	g
I	4	0	0	12	28	24	3
II	4	1	0	10	16	18	2
III	4	0	1	9	10	16	2
IV	4	2	0	8	8	12	1
V	4	1	1	7	4	10	1
VI	4	0	2	6	1	8	1
VII	4	3	0	6	4	6	0
VIII	4	2	1	5	2	4	0
IX	4	1	2	4	1	2	0
X	4	0	3	3	1	0	0

Ex.: cardioida (18′); ecuaţia tangenţială: $27p^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_3 - 2(p\xi_1 + 2\xi_3)^3 = 0$, tangenta dublă: $4x + p = 0$, puncte de întoarcere: I, J (imaginare) şi O (real). c) Tangenta în $P(\theta) \in (48)$: $x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - 2a \sin \theta = 0$. Ecuaţia tangenţială: $(2a^2\xi_1^2 - \xi_3^2)^2 = 4a^2\xi_2^2(\xi_3^2 - a^2\xi_1^2)$; deci C e o sextică de clasă 4. Are 2 puncte cuspidale: $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$, 2 noduri imaginare: $(0, \pm ai/\sqrt{2})$, 2 puncte triple imaginare: I şi J. Admite 3 tangente duble: $x \pm a\sqrt{2} = 0$ şi $y = 0$. N-are puncte de inflexiune. Obţinem: $n = 6$, $m = 4$, $\delta = 4$, $k = 6$, $\tau = 3$, $i = 0$, $g = 0$; C e o curbă unicursală.

69 Să se găsească formele canonice ale ecuaţiilor cubicelor unicursale.

R. O cubică (ireductibilă) C_3 unicursală are un punct dublu P_0. *Dacă P_0 e un nod*, raportînd planul la tangentele în P_0 la C_3, atunci

$$xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0 \ (ad \neq 0).$$

Fie transformarea proiectivă (ce păstrează pe O; şi axele cînd $\varepsilon = \nu = 0$)

(130) $$x = (\alpha X + \nu Y)/(1 + \lambda X + \mu Y),\ y = (\varepsilon X + \beta Y)/(1 + \lambda X + \mu Y).$$

Cu $\varepsilon = \nu = 0$, în ecuaţia transformată anulînd coeficienţii lui X^2Y şi XY^2, egalînd cu -1 coeficienţii lui X^2 şi Y^2, obţinem $\lambda = -\alpha b$, $\mu = -\beta c$ şi $\alpha^3 = -1/a^2d$, $\beta^3 = -1/ad^2$; deci: *ecuaţia lui C_3 cu nod ia forma canonică*

(131) $$x^3 + y^3 - xy = 0;\ x = t/(1 + t^3),\ y = t^2/(1 + t^3) \ (\textit{foliul Descartes}),$$

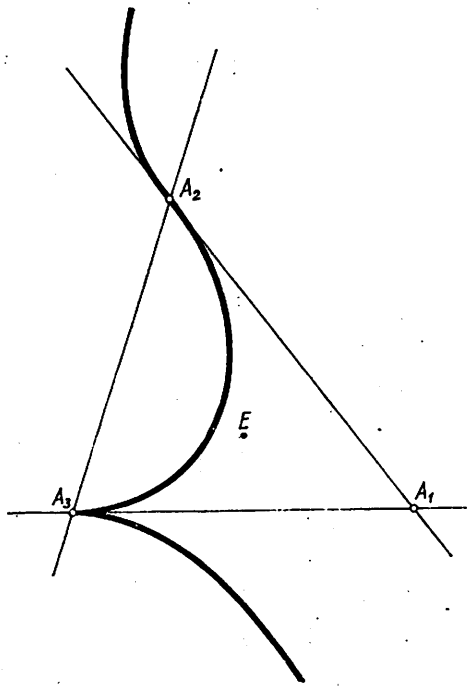


Fig. 183

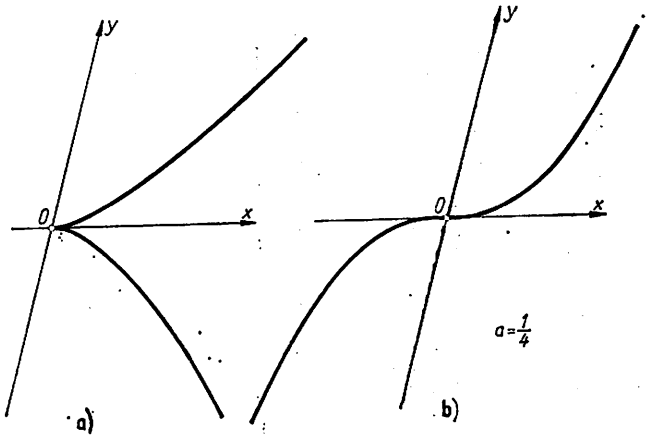


Fig. 184

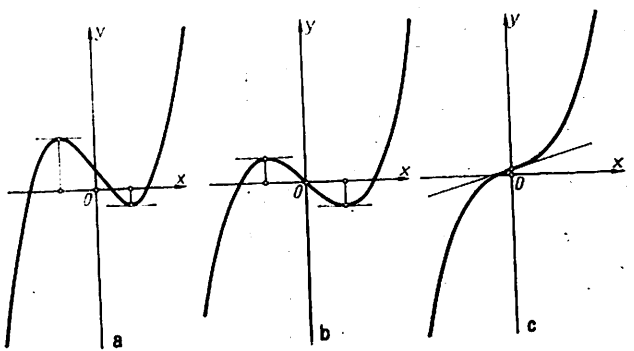


Fig. 185

conservată de transformarea identică. *Obs.* Elipsa polară a lui P' e

$$E_p: 3x'x^2 - xy + 3y'y^2 - y'x - x'y = 0;\ x = \frac{y' + x't}{3x' - t + 3y't^2},\ y = \frac{(y' + x't)t}{3x' - t + 3y't^2}.$$

C_3 și E_p au în comun 6 puncte $P_i(t_i)$ cu t_i $(i = 1, \ldots, 6)$ date de ecuația $(y' + x't)^2(x't^4 - 3y't^3 + t^2 - 3x't + y') = 0$; ecuația admite o rădăcină dublă $t_1 = t_2 = -y'/x'$ (pentru $O \in C_3$). Hessiana $H: 3x_1^3 + 3x_2^3 + x_1x_2x_3 = 0$ (fig. 186 a). $H \cap C_3: O$ (luat de 6 ori), $P_\infty(1, -1, 0)$ și alte 2 puncte imaginare.

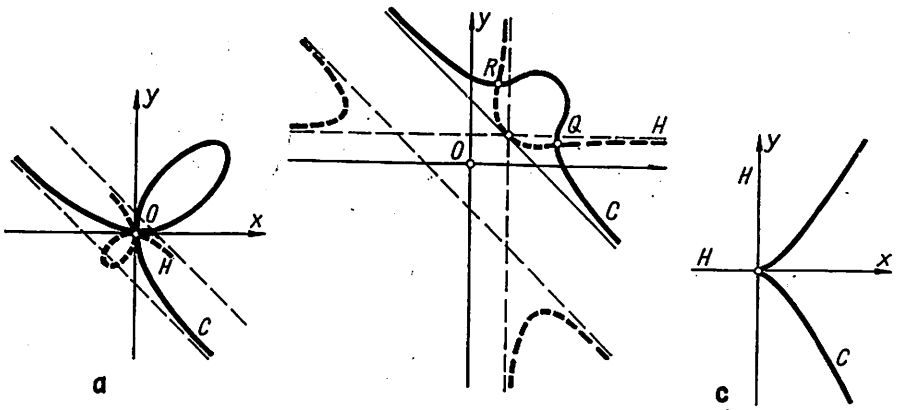


Fig. 186

Dacă P_0 e punct izolat, cu $O = P_0$, putem alege axele astfel încît

$$x^2 + y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0 \text{ sau } -x^3 + \rho y^3 + x^2 + y^2 = 0$$

prin (130) cu $\varepsilon = \nu = 0$, $\alpha = \beta$. Dacă $\rho \neq -1$, prin (130) cu $\nu = -\varepsilon$, $\alpha = \beta$, obținem

(132) $$x^3 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0;\ x = (1 + t^2)/(1 + t^3),\ y = t(1 + t^2)/(1 + t^3),$$

conservată de transformarea identică (fig. 186 b). *Obs.* Conica polară

$$C_2: (3x' - 1)x^2 + (3y' - 1)y^2 - 2x'x - 2y'y = 0;$$

$$x = \frac{2(x' + ty')}{(3y' - 1)t^2 + 3x' - 1},\quad y = \frac{2t(x' + ty')}{(3y' - 1)t^2 + 3x' - 1}$$

Din cele 6 puncte comune $P_i(t_i)$ ale lui C_3 cu C_2, 2 sînt confundate în O $(t = -x'/y')$. $H: 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)x_3 = 0$ are în O un punct izolat (ca C_3). $H \cap C_3: P_\infty(1, -1, 0)$, O (de 6 ori) și punctele reale P, Q respectiv de pe $y = (2 \pm \sqrt{3})x$. Deci C_3 are 3 puncte de inflexiune: P_∞, P și Q.

Dacă P_0 e punct de întoarcere, cu $O = P_0$ și tangenta (în O) ca Ox, avem

$$y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Prin (130) cu $\varepsilon = 0$, $\alpha\beta \neq 0$, obținem *parabola semicubică* (fig. 186 c)

(133) $$y^2 - x^3 = 0;\ x = t^2,\ y = t^3,$$

conservată de transformarea $x = \alpha^2X$, $y = \alpha^3Y$. *Obs.* Conica polară

$$C_2: 3x'x^2 + y^2 + 2y'y = 0;\ x = -2y't/(3x' + t^2),\ y = -2y't^2/(3x' + t^2)$$

taie pe C_3 în 6 puncte $P_i(t_i)$ cu t_i din $t^3(t^2 + 3x't + 2y') = 0$; ecuația are o rădăcină triplă (pentru $O \in C_3$). $H: x_1x_2^2 = 0$; O e punct triplu cu Ox tangentă dublă. $H \cap C_3: Y_\infty(0, 1, 0)$ și O (socotit de 8 ori).

Alte forme canonice se obțin astfel: fie cubica C_3 de ecuație

$$a_1x_1^3 + a_2x_1^2x_2 + a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3 + x_3(b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2) + x_3^2(c_1x_1 + c_2x_2) + dx_3^3 = 0.$$

Alegem punctul dublu în Y_∞ $(0, 1, 0)$; atunci $a_3 = a_4 = b_3 = 0$ iar tangentele în Y_∞ (la C_3) : $a_2x_1^2 + b_2x_1x_3 + c_2x_3^2 = 0$. *Dacă* Y_∞ *e un nod*, dreapta de la infinit fiind una din tangentele în Y_∞, atunci $a_2 = 0$. Deci C_3 are ecuația

$y = P_3(x)/P_1(x)$ cu P_i — polinoame în x de gradul $i = 1, 3$

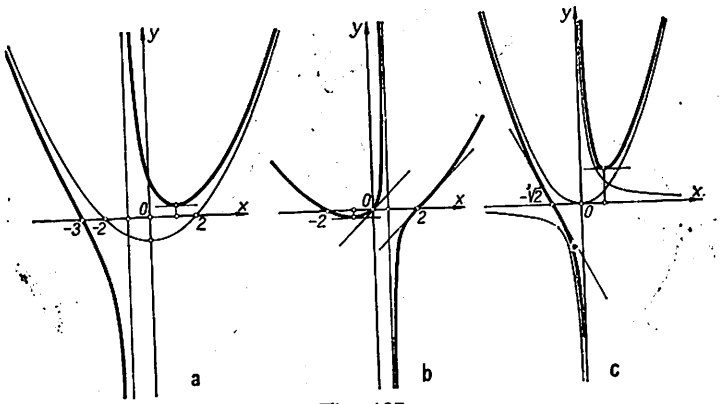


Fig. 187

și se numește *tridentul lui Newton*. Exemple: $y=(x^3+x^2-4x+6)/4(x+1)$, (fig. 187 a); $y=(x^3-4x)/2(3x-2)$, (fig. 187 b); $y = x^2/2 + 1/x$, (fig. 187 c). *Dacă* Y_∞ *e punct izolat*, atunci $b_2 = 0$, $a_2c_2 > 0$, încît C_3 are ecuația

$y = P_3(x)/(ax^2 + b)$ cu P_3 — polinom în x de gradul 3 $(ab > 0)$;

de exemplu: $y = (x^3 - 2x^2 + 1)/(2x^2 + 1)$, (fig. 188). *Dacă* Y_∞ *e punct cuspidal*, cu dreapta de la infinit ca tangentă dublă, atunci $a_2 = b_2 = 0$; deci C_3 are ecuația de forma (129) și e o parabolă cubică.

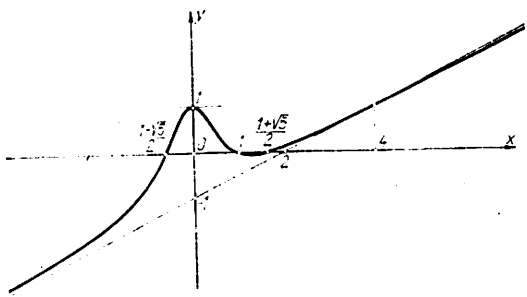


Fig. 188

70 Un punct de întoarcere P_0 al unei curbe C e *punct tacnodal* (sinonim: *tacnod*) dacă tangenta în P_0 la C are 4 puncte de intersecție cu C confundate în P_0. Un punct nodal P_0 al lui C e *punct biflecnodal* dacă cele 2 tangente în P_0 la C au 4 puncte de intersecție cu C confundate în P_0. Să se scrie ecuația unei cuartice ireductibile pentru care sînt date: a) un punct tacnodal și unul biflecnodal; b) un punct biflecnodal și 2 puncte cuspidale; c) 3 puncte cuspidale. *Obs.* Punctul multiplu P_0 de ordin par $2p$

al lui C în care ramurile sînt 2 cîte 2 tangente la cîte o aceeaşi dreaptă se numeşte *tacnod de ordinul p*; în P_0, C are p tangente distincte.

71 Dintr-un punct P se duc normale la elipsa Γ. Să se găsească locul lui P astfel încît tangentele duse la Γ în picioarele normalelor să formeze un patrulater inscriptibil; are puncte multiple?

R. Fie Γ de ecuaţie (61) cu $\varepsilon = 1$. Ecuaţia tangenţială a lui Γ: $f(\xi_i) = a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 - \xi_3^2 = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Ecuaţia tangentei (în M la Γ): $\xi_i x_i = 0$ cu $f(\xi_i) = 0$; însă $M\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = a^2\xi_1, \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = b^2\xi_2, \frac{\partial f}{\partial \xi_3} = -\xi_3\right)$, căci e polul tangentei faţă de Γ. Normala în M la Γ trece prin $P(\alpha, \beta, 1)$ dacă $\varphi(\xi_i) = c^2\xi_1\xi_2 + \alpha\xi_1\xi_3 - \beta\xi_2\xi_3 = 0$ cu $c^2 = a^2 - b^2$. $f = 0$, $\varphi = 0$ are 4 soluţii (din P se duc 4 normale la Γ). $f = 0$ şi $\varphi = 0$ determină fasciculul de conice $\lambda f + \varphi = 0$ înscrise în patrulaterul format de cele 4 tangente. Eliminînd pe λ în ecuaţia cercului din fascicul: $\alpha^2 + 4b^2\lambda^2 = \beta^2 + 4a^2\lambda^2$, $\alpha\beta - 2c^2\lambda = 0$, găsim locul

(134) $$x^2y^2 - c^2(x^2 - y^2) = 0;\quad x = 2ct/(1 - t^2),\ y = 2ct/(1 + t^2)$$ (fig. 189)

Puncte biflecnodale: O cu tangentele $x \pm y = 0$, $X_\infty(1, 0, 0)$ cu tangentele $x_2^2 - c^2x_3^2 = 0$ şi $Y_\infty(0, 1, 0)$ cu tangentele $x_1^2 + c^2x_3^2 = 0$, care e punct izolat.

72 În coordonate proiective omogene, *curba triunghiulară simetrică de exponent m* e (m număr raţional, a_i numere reale sau complexe)

(135) $$\Gamma^m : (x_1/a_1)^m + (x_2/a_2)^m + (x_3/a_3)^m = 0.$$

Se cere: a) Numind *curbă asociată* şi *a doua curbă asociată* lui Γ^m curba formată de polarele triliniare ale punctelor lui Γ^m şi, respectiv, curba constituită din polurile triliniare ale tangentelor la Γ^m, să se arate că aceste curbe (distincte) sînt tot curbe triunghiulare simetrice; să se găsească relaţia între exponenţii acestor curbe. b) Orice curbă triunghiulară simetrică poate fi obţinută ca polara reciprocă a unei curbe (135) în raport cu o conică ce admite triunghiul fundamental (format din vîrfurile A_i ale reperului proiectiv) ca triunghi autopolar; să se stabilească relaţia între exponenţii curbelor. c) Să se studieze cazul cînd latura $A_1A_2: x_3 = 0$ e dreapta improprie a planului iar a_3 e soluţie a ecuaţiei $a_3^m + 1 = 0$; să se determine clasa unei astfel de curbe, numită *curbă Lamé*.

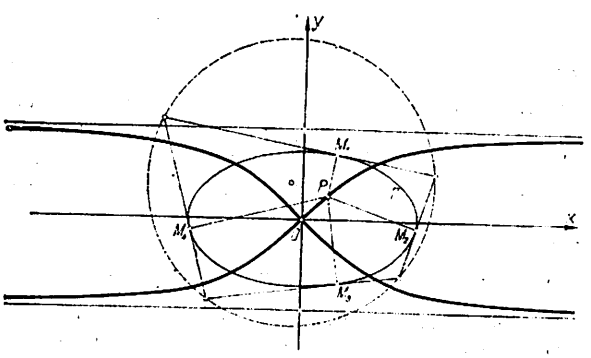


Fig. 189

R. Γ^m cu $m = \varepsilon p/q$ sînt curbe algebrice de grad pq sau 2 pq, după cum $\varepsilon = \pm 1$. În primul caz, Γ^m nu trece prin A_i; în celălalt caz, $A_i \in \Gamma^m$ şi sînt puncte multiple de ordin pq cu p tangente distincte. Genul lui Γ^m e $g = (p - 1)(p - 2)/2$. *Cazuri particulare*: drepte care nu trec prin A_i ($m = 1$); conice în raport cu care triunghiul fundamental e autopolar ($m = 2$); conice

înscrise în triunghiul fundamental ($m = 1/2$) sau circumscrise acestui triunghi ($m = -1$). Pentru $m = 2/3$, Γ^m e o sextică unicursală, numită *astroida proiectivă*. a) Lui $M' \notin A_jA_k$ i se asociază *polara triliniară* (a lui M')

(136) $\quad x_1x_2'x_3' + x_2x_3'x_1' + x_3x_1'x_2' = 0$, de coordonate tangențiale $\lambda\xi_i' = 1/x_i'$,

determinată de conjugatele armonice M_i', în raport cu A_i, ale intersecției lui $M'A_i$ cu laturile triunghiului fundamental. Unei drepte $d' : \Sigma_i\, \xi_i'x_i = 0$, cu $d' \notin A_i$, îi corespunde *polul triliniar* (al lui d')

(136') $\quad \lambda x_i' = 1/\xi_i'$.

Curba asociată lui Γ^m e curba (în coordonate tangențiale)

(137) $\quad \Sigma_i\,(a_i\,\xi_i)^{-m} = 0$; deci $\Gamma^{m_1} : \Sigma_i\,(x_i/a_i)^{m_1} = 0$ cu $m_1 = \dfrac{m}{m+1}$.

Tangenta în M' (la Γ^m): $\Sigma_i\,(x_i'/a_i)^{m-1}\,x_i/a_i = 0$; *a doua curbă asociată*

(137') $\quad \Gamma^{m_2} : \Sigma_i\,(x_i/a_i)^{m_2} = 0$ cu $m_2 = \dfrac{m}{1-m}$

Există relația armonică $1/m_1 + 1/m_2 = 2/m$. b) Ecuația polarelor lui $P \in \Gamma^m$ în raport cu conica $\Sigma_i\,\lambda_i\,x_i^2 = 0$ e tangențială; ecuația punctuală e

(137'') $\quad \Gamma^{m'} : \Sigma_i\,(a_i\lambda_i\,x_i)^{m'} = 0$ cu $m' = \dfrac{m}{m-1}$ (*exponent tangențial* pentru Γ^m).

Există relația simetrică $1/m + 1/m' = 1$. c) *Curbele Lamé* au ecuația

(138) $\quad (x/a_1)^m + (y/a_2)^m - 1 = 0$; $(a_1\xi_1)^{m'} + (a_2\xi_2)^{m'} = (-\xi_3)^{m'}$ cu $m' = \dfrac{m}{m-1}$.

Cu $m = \varepsilon p/q$ ($\varepsilon = \pm 1$; $p, q > 0$), avem $m' = p/(p - \varepsilon q)$. Deci: dacă $m > 0$, Γ^m e de clasă $p(p-q)$ sau $2p$ $(q-p)$ după cum $p \gtrless q$ $(m' \gtrless 0)$; dacă $m < 0$, cînd $m' > 0$, Γ^m e de clasă $p\,(p+q)$. *Obs.* c_1) Prin centro-afinitatea $x = a_1X/a$, $y = a_2Y/b$, sînt echivalente afin cu $X^m + Y^m = c^m$. c_2) Din ecuația tangentei se deduce relația $x/a + y/b - 1 = 0$ cu $a = a_1^m/x_0^{m-1}$, $b = a_2^m/y_0^{m-1}$ („tăieturile" tangentei pe axe). c_3) Dacă m e irațional, Γ^m e transcendentă. În cazul unei *conice cu centru* $C = \Gamma^2 : m = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = \sqrt{\varepsilon}b$, $a_3 = \sqrt{-1}$, $x_3 = 1$, *curba asociată* e o *astroidă proiectivă de tip Lamé* (fig. 190)

(139) $\quad \Gamma_1 : (x/a)^{2/3} + \varepsilon\,(y/b)^{2/3} - 1 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1)$;

cînd $\varepsilon = 1$, avem *astroida alungită* (sinonim: *curba tetracuspidală*; fig. 190 a)

(139') $\quad (x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} - 1 = 0$ sau $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$,

iar pt. $\varepsilon = -1$, curba e *astroida hiperbolică* (fig. 190 b)

(139'') $\quad (x/a)^{2/3} - (y/b)^{2/3} - 1 = 0$ sau $x = a\,\mathrm{ch}^3 t$, $y = b\,\mathrm{sh}^3 t$.

A doua curbă asociată a lui C e *curba Schoute* (curbă Lamé cu $m = -2$)

(140) $\quad \Gamma_2 : (a/x)^2 + \varepsilon\,(b/y)^2 - 1 = 0$; $(a\xi_1)^{2/3} + (b\xi_2)^{2/3} = \xi_3^{2/3}$,

simetrică în raport cu axele, de clasă 6. Generare: Tangenta în $M \in C$ taie axele conice în M' și M'', iar paralelele la aceste axe prin ele se taie în P; Γ_2 e locul lui P, cînd M descrie pe C. *Obs.* Paralelele la axele de simetrie ale lui Γ_2, duse prin punctele în care ele sînt tăiate de tangenta în P la Γ_2, se taie în P' $(x^3/a^2, \varepsilon y^3/b^2)$ — asociatul lui P; locul Γ' al lui P' e o curbă Lamé de indice $m = -2/3$. Cînd $\varepsilon = 1$, Γ_2 e *curba cruciformă* (sinonim: *curba trinodală armonică*)

(140') $\quad x = a/\cos u$, $y = b/\sin u$; $x = a\,(1+t^2)/(1-t^2)$, $y = b(1+t^2)/2t$, $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{u}{2}$.

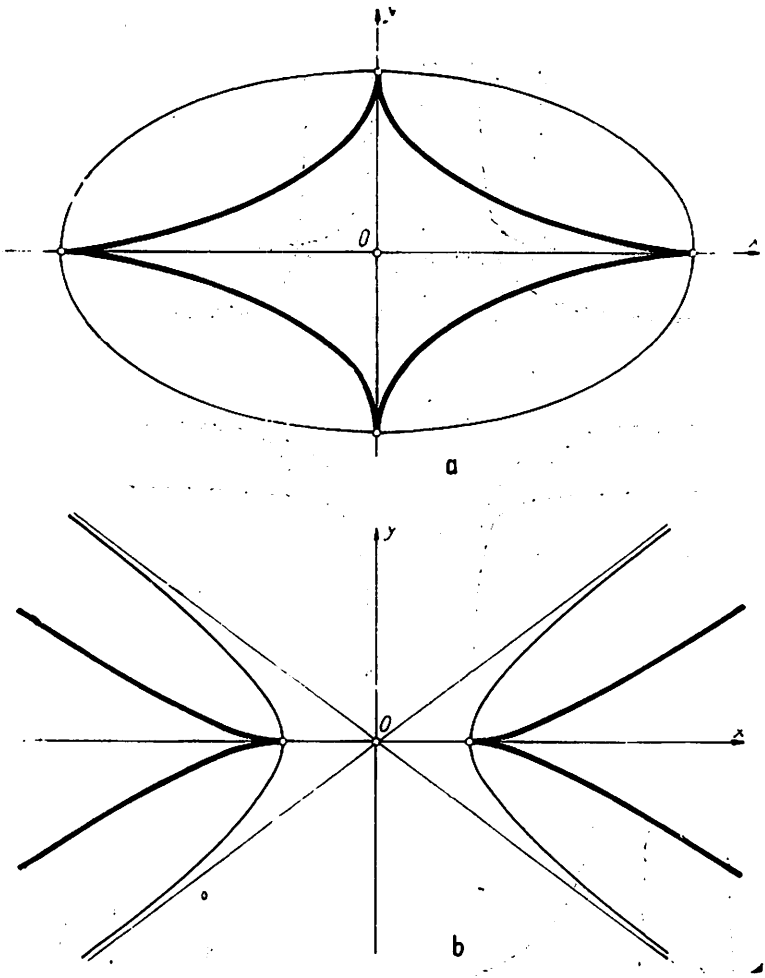


Fig. 190

Centrul O al elipsei e punct izolat pentru Γ_2, cu tangente inflexionare; asimptote: $x = \pm a$ și $y = \pm b$ (fig. 191 a). Altă construcție: Se consideră cercurile $C_1(0; a)$ și $C_2(0; b)$ cu $a > b$; raza OM_1 cu $M_1 \in C_1$ taie pe C_2 în M_2; tangenta în M_i la C_i $(i = 1, 2)$ taie 2 diametri ortogonali Ox și Oy în T_i și T_i'; Γ_2 e locul intersecției P a paralelelor prin T_1 și T_2' la Ox și Oy (fig. 191b). Intersecția Q a paralelelor prin T_2 și T_1' la Ox și Oy e tot o curbă cruciformă Γ_2': $(b/x)^2 + (a/y)^2 - 1 = 0$. Tangentele în $P \in \Gamma_2$ și $Q \in \Gamma_2'$ (corespunzînd aceluiași t) se taie în R: $x = ab/(a+b)\cos^3 t$, $y = ab/(a+b)\sin^3 t$ sau Γ: $(ab)^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) = (a+b)^{2/3}(xy)^{2/3}$, care e o curbă Lamé cu $m = -2/3$. *Obs.* Tangenta în $P(u)$ la Γ_2: $bx\cos^3 u + ay\sin^3 u - ab = 0$; deci $P'(a/\cos^3 u, b/\sin^3 u)$ descrie pe Γ'.

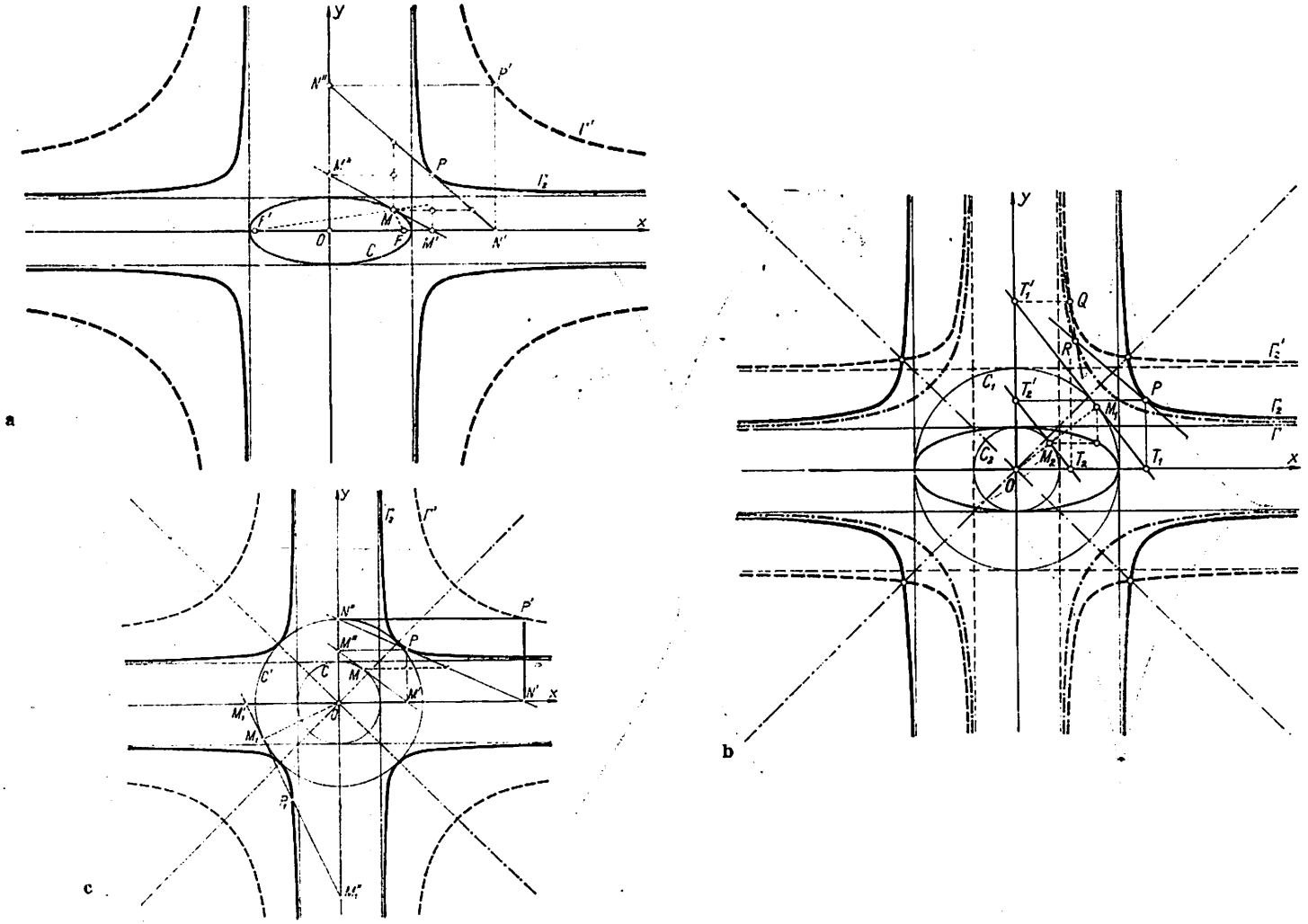
Pentru $a = b$ (C e cerc), obținem *curba cruce* (fig. 191 c); generare: tangenta în $M_1 \in C'(0; 2a)$ taie 2 diametri ortogonali în M_1' și M_1''; Γ_2 e locul mijlocului P_1 al segmentului $M_1' M_1''$:

(140″) $$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2) \text{ sau } \rho = 2a/\sin 2\theta$$

și e tangentă de 4 ori cercului C' în puncte de pe bisectoare.

Cînd $\varepsilon = -1$, Γ_2 e *curba punctiformă* (sinonim: *curba arcului voltaic*)

(140‴) $$x = a/\operatorname{ch} u,\ y = b/\operatorname{sh} u;\ x = 2at/(t^2+1),\ y = 2bt/(t^2-1) \text{ cu } t = e^u.$$



Fig, 191

Γ_2 are un nod inflexionar în : O (centrul hiperbolei C) — cu tangente reale (asimptotele lui C) și $Y_\infty(0, 1, 0)$ — cu tangente reale (asimptotele lui $\Gamma_2 : x = \pm a$), (fig. 192). *Obs.* Tangenta în $P(u)$ la Γ_2 : $bx\,\mathrm{ch}^3 u - ay\,\mathrm{sh}^3 u - ab = 0$; deci $P'(a/\mathrm{ch}^3 u, b/\mathrm{sh}^3 u)$ descrie pe Γ'. Altă generare : Fie cercurile $C_1(O; a)$ și $C_2(0; b)$ cu $a > b$; AA' și BB' fiind 2 diametri perpendiculari în C_1, raza OM_1 cu $M_1 \in C_1$ taie pe C_2 în M_2 iar tangenta în M_2 la C_2 taie pe BB' în T_2 ; dacă M_1' e proiecția lui M_1 pe AA' ; Γ_2 e locul intersecțiilor P și P' ale cercului $\gamma(M_1'; M_2T_2)$ cu paralela prin M_1 la BB'. Cu $OA = Ox$ și $t = \widehat{Ox, OM_1}$, avem parametrizarea

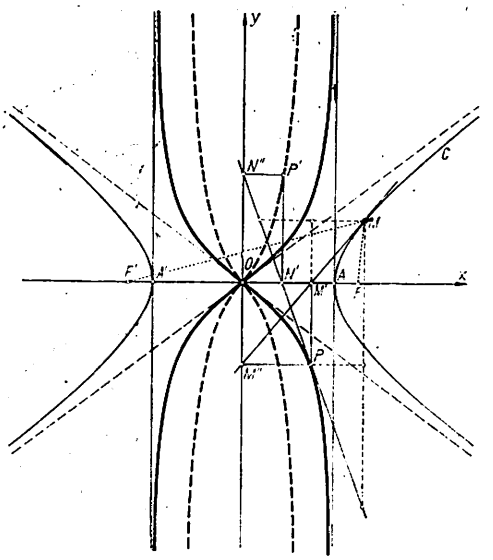


Fig. 192

$$x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{ctg}\,t\ (0 \leqslant t \leqslant \pi);\quad x = \frac{a(1-v^2)}{1+v^2},\ y = \frac{b(1-v^2)}{2v}\left(v = \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right). \tag{140'^V}$$

Locul polurilor normalelor unei conice cu centru e o curbă Schoute ; căci ecuația normalei în $M(\alpha, \beta) \in (61) : a^2X/\alpha - \varepsilon b^2 Y/\beta - c^2 = 0$ coincide cu a polarei lui $P(x, y) \in \Gamma_2 : xX/a^2 + \varepsilon yY/b^2 - 1 = 0$, încît $\alpha = a^4/c^2x$, $\beta = -b^4/c^2y$ iar din $M \in (61)$ rezultă $\Gamma_2 : c^4x^2y^2 = \varepsilon b^6x^2 + a^6y^2$.

73 Două curbe C_1 și C_2 se numesc *curbe paralele* dacă tangentele lor în puncte corespondente sînt paralele. Să se arate : a) Dacă M e un punct al normalei în punctul P la curba C, cînd P descrie pe C, M descrie o curbă Γ paralelă cu C. b) Dacă Ω e un punct dat în plan iar P e punctul curent al curbei C, locul punctelor M din plan astfel încît $\overline{\Omega M} = k\overline{\Omega P}$ (k — const) e o curbă Γ_1, căreia i se zice *omotetica lui C (de centru Ω și modul k)*, paralelă cu C. *Apl.* Numind *toroidă* curba paralelă unei elipse, se cer elementele ei plückeriene.

R. a) Fie $C : F(x, y) = 0$; $M(X, Y)$ fiind pe normala în $P(x, y) \in C$, avem

$$(X - x)/F_x = (Y - y)/F_y \text{ sau } X = x + \rho F_x/\sqrt{F_x^2 + F_y^2},\ Y = y + \rho F_y/\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \text{ cu } \rho = PM. \tag{141}$$

Dînd lui ρ o valoare determinată, M descrie o curbă paralelă cu C. b) Fie $\Omega = 0$ și $C : \rho = \rho(\theta)$; omotetica lui C e curba

$$\Gamma_1 : \rho = k\rho(\theta). \tag{141'}$$

Tangentele în punctele omologe fac unghiuri egale cu raza vectoare comună : $\mathrm{tg}\,V_1 = \frac{k\rho}{k\rho'} = \frac{\rho}{\rho'} = \mathrm{tg}\,V$; deci sînt paralele. Fie $\Omega(a, b)$ și $C : F(x, y) = 0$. Din $\overline{\Omega M} = k\overline{\Omega P}$ cu $P(x, y) \in C$ și $M(X, Y) \in R^2$, deducem *omotetia*

$$X = a + k(x - a),\ Y = b + k(y - b) \text{ și } x = a + (X - a)/k,\ y = b + (Y - b)/k. \tag{141''}$$

Deci omotetica Γ_1 a lui C are ecuația

$$F(a + (X - a)/k,\ b + (Y - b)/k) = 0. \tag{141'''}$$

Apl. Dacă $P_0 \in (61, \varepsilon = 1)$. toroida are ecuațiile (141_2). Sau, din (141_1), găsim

$$P_0\left(\frac{a^2x}{a^2 + t}, \frac{b^2y}{b^2 + t}\right);\ \text{deci } \frac{a^2x^2}{(a^2+t)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2+t)^2} = 1,\ \frac{t^2x^2}{(a^2+t)^2} + \frac{t^2y^2}{(b^2+t)^2} = \rho^2,$$

încît, prin eliminarea lui t și notînd $c^2 = a^2 - b^2$, obținem

$$x = \frac{a^2 + t}{ct}\sqrt{t^2 - b^2\rho^2},\ y = \frac{b^2 + t}{ct}\sqrt{a^2\rho^2 - t^2};\ P_1^2P_2^2 + 4P_2^3 + 4P_1^3P_3 + 18P_1P_2P_3 - 27P_3^2 = 0,$$

unde $P_1 = x^2 + y^2 - (a^2 + b^2 + \rho^2)$, $P_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\rho^2 - a^2b^2$, $P_3 = a^2b^2\rho^2$.

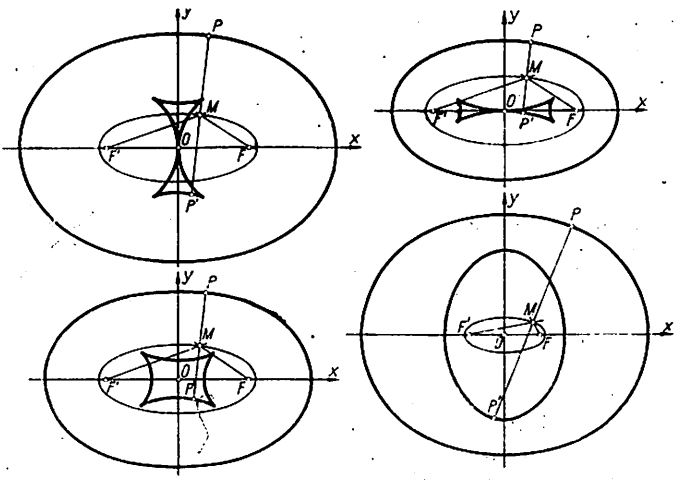


Fig. 193

Deci toroida e o curbă algebrică de grad opt ($n = 8$), simetrică în raport cu axele elipsei; e formată din 2 ramuri, forma curbei depinzînd de ρ (fig. 193). Are 8 puncte duble nodale sau izolate ($\delta = 8$), 4 sînt la distanță finită: cîte 2 pe axele elipsei, cu cel puțin una din perechi reală; celelalte 4 sînt improprii: punctele improprii ale elipsei și punctele ciclice. Are 12 puncte cuspidale ($k = 12$), dintre care cel puțin 4 sînt reale*. Deci toroida e de clasă $m = 4$ și de gen $g = 1$; ecuația tangențială: $(b^2 - \xi^2)\,\xi_1^2 + (a^2 - \xi^2)\,\xi_2^2 - \xi_3^2\xi^2 - 4\rho\,(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,\xi_3^2 = 0$.

74 Un punct $P_0(t_0) \in (29_1)$ se numește *punct* (p, q)-*multiplu* dacă**

$$(142)\quad \begin{cases} \alpha)\ x(t), y(t) \text{ sînt derivabile (cel puțin) de } n \text{ ori în } t_0, \\ \beta)\ x_0^{(i)} = y_0^{(i)} = 0\ (i = 1, 2, \ldots, p-1), x_0^{(p)} \neq 0,\ y_0^{(q)} \neq 0\ (1 < p < q \leqslant n), \\ \gamma)\ \dfrac{y_0^{(p)}}{x_0^{(p)}} = \dfrac{y_0^{(p+1)}}{x_0^{(p+1)}} = \cdots = \dfrac{y_0^{(q-1)}}{x_0^{(q-1)}} \neq \dfrac{y_0^{(q)}}{x_0^{(q)}};\ E^\alpha = 0, E^q \neq 0\ (\alpha = p+1, \ldots, q-1) \end{cases}$$

unde $E^k = x_0^{(p)}\,y_0^{(k)} - x_0^{(k)}\,y_0^{(p)}$ $(k = p + 1, \ldots, q)$. Să se arate că numerele p și q sînt invariante față de: a) o transformare de parametru pe curbă; b) o transformare de coordonate carteziene (ortogonale).

---

* Corespund punctelor elipsei în care raza de curbură e egală cu ρ.

** Se consideră numai cazul $p < q$ (ceea ce e posibil, prin schimbarea axelor de coordonate între ele). Dacă $p = 1$, deci $x_0' \neq 0$, P_0 e un punct ordinar; deci: *un punct* $(1, q)$ — *multiplu e un punct ordinar*. După unii autori (v. [7], p. 361), *ramul singular (neliniar) de origine* P_0 (format din puncte ordinare cu excepția punctului (p, q) — multiplu P_0) se numește *ram de ordinul* p *și de clasă* $\mu = q - p$; atunci

$$C: x = x + a_p t^p + \ldots,\ y = y + b_q t^q + \ldots.$$

R. a) Fie $t = t(\tau)$ cu $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_0 \neq 0$. Avem $\frac{d^\nu x}{d\tau^\nu} = \sum_{\sigma=1}^{\nu} A_\nu^{\nu-\sigma} x^{(\sigma)}$, $\frac{d^\nu y}{d\tau^\nu} = \sum_{\sigma=1}^{\nu} A_\nu^{\nu-\sigma} y^{(\sigma)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, unde $A_\nu^{\nu-1} = \frac{d^\nu t}{d\tau^\nu}$, $A_\nu^0 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^\nu$, ceilalți coeficienți $A_\nu^{\nu-\sigma}$ depinzînd de $\frac{d^2 t}{d\tau^2}, \ldots, \frac{d^{\nu-1} t}{d\tau^{\nu-1}}$. Deducem

$\beta_1)$ $\left(\frac{d^i x}{d\tau^i}\right)_0 = \left(\frac{d^i y}{d\tau^i}\right)_0 = 0, \left(\frac{d_x^p}{d\tau^p}\right)_0 = A_p^0 x_0^{(p)} \neq 0, \left(\frac{d_y^q}{d\tau^q}\right)_0 = \sum_{\sigma=p}^{q} A_0^{1-\sigma} y_0^{(\sigma)} \neq 0;$

$\gamma_1)$ $\mathcal{E}^\alpha = 0$, $\mathcal{E}^p \neq 0$ cu $\mathcal{E}^k = \left(\frac{d^p x}{d\tau^p}\right)_0 \left(\frac{d^k y}{d\tau^k}\right)_0 - \left(\frac{d^k x}{d\tau^k}\right)_0 \left(\frac{d^p y}{d\tau^p}\right)_0 = \sum_{\sigma=p+1}^{k} A_p^0 A_k^{k-\sigma} E^\sigma = A_p^0 A_k^0 E^k$

b) Fie deplasarea: $X = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta$, $Y = -(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta$.

Deducem: $\beta_2)$ $X_0^{(i)} = Y_0^{(i)} = 0, X_0^{(p)} \neq 0, Y_0^{(q)} \neq 0;$

$\gamma_2)$ $\mathcal{E}^\alpha = 0$, $\mathcal{E}^q \neq 0$ cu $\mathcal{E}^k = X_0^{(p)} Y_0^{(k)} - X_0^{(k)} Y_0^{(p)} = x_0^{(p)} y_0^{(k)} - x_0^{(k)} y_0^{(p)} = E^k$.

75 Fie $P_0(t_0) \in (29_1)$ un punct (p, q)-multiplu. Se cere: a) Să se arate că tangenta în P_0 la curba C e determinată. b) Să se raporteze curba la reperul format din tangenta și normala în P_0 la C, numit *reper afin asociat lui* C în P_0.

R. a) Tangenta, prin definiție, e limita secantei prin P_0 și $P\,[x(t_0 + h), y(t_0 + h)] \in C$, cînd $h \to 0$. După (142), avem

$$(143)\quad \begin{cases} x(t_0 + h) = x(t_0) + \dfrac{h^p}{p!} x^{(p)}(t_0 + \theta' h), \\ \\ y(t_0 + h) = y(t_0) + \dfrac{h^p}{p!} y^{(q)}(t_0) + \ldots + \dfrac{h^q}{q!} y^{(q)}(t_0 + \theta'' h) \end{cases} \qquad (0 < \theta', \theta'' < 1).$$

După cum $y_0^{(p)} \neq 0$ sau $y_0^{(\sigma)} = 0$ $(\sigma = p, \ldots, q-1)$, tangenta în P_0 la C are ecuația

$$(144)\qquad (x - x_0)/x_0^{(p)} = (y - y_0)/y_0^{(p)} \quad \text{sau}^* \quad y - y(t_0) = 0.$$

Obs. (142) arată: vectorii $\bar{r}_0^{(\alpha)}$ $(\alpha = p + 1, \ldots, q - 1)$ sînt coliniari cu vectorul tangentă $\bar{r}_0^{(p)}$, adică $\bar{r}_0^{(\alpha)} = \lambda^\alpha \bar{r}_0^{(p)}$. b) Conform problemei 74, putem avea $P_0 = O$, Ox să fie tangenta în P_0 la C iar $t_0 = 0$; deci (143) devine

$$(143')\qquad x(t) = \frac{t^p}{p!} x^{(p)}(\theta' t),\ y(t) = \frac{t^q}{q!} y^{(q)}(\theta'' t),\ (p < q).$$

Transformarea de parametru $\tau = t \left(\frac{x(t)}{x_0^{(p)} t^p}\right)^{1/p}$ duce la (notînd t pentru τ)

$$(145)\qquad x = at^p,\ y = bt^q + b_1 t^{q_1} + \ldots\ (p < q < q_1 < \ldots).$$

Obs. O condiție necesară și suficientă ca P_0 să fie un punct (p, q) — multiplu $(p > 1)$ e ca (cel puțin) unul din numerele $q, q_1, \ldots$ să nu se dividă prin p.

---

* Dacă $p > q$ și $x^{(q)}(t_0) = \ldots = x^{(p-1)}(t_0) = 0$, tangenta în P_0 la C e paralelă cu axa Oy.

76 Fie $P_0(t_0) \in (29_1)$ un punct (p, q)-multiplu. Dacă p e par, P_0 e un punct de întoarcere de prima sau a doua speţă, după cum q e impar sau par. Dacă p e impar, P_0 e un punct singular aparent al lui C, fiind punct de inflexiune sau de ondulaţie, după cum q e impar sau par.

R. În reperul afin asociat în P_0 lui C : $P_0(t_0) = 0$, $P\,(t = t_0 + h) \in C$ are coordonatele (143) cu $x(t_0) = y(t_0) = 0$ iar tangenta în P_0 la C e Ox (fig. 194). Comportarea curbei se determină cu ajutorul expresiilor

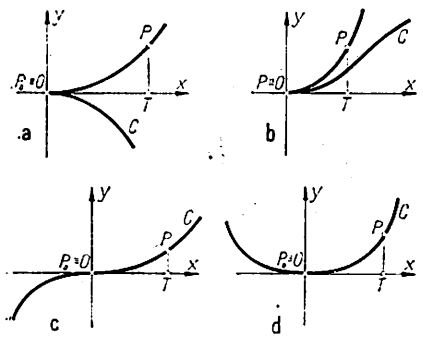


Fig. 194

$$x(t_0 + h),\ \eta(t_0 + h) = TP = y_P - y_T = y(t_0 + h).$$

Presupunem că $x^{(p)}(t_0 + \theta' h)$, $y^{(q)}(t_0 + \theta'' h)$ au acelaşi semn; de exemplu, sînt pozitive. Celelalte posibilităţi conduc la aceleaşi concluzii, schimbîndu-se numai cadranele în care se află C. Datorită continuităţii derivatelor $x^{(p)}(t)$ şi $y^{(q)}(t)$, diferite de zero pentru $t = t_0$, ele vor păstra acelaşi semn într-o vecinătate a lui $O(t = t_0)$. Cum în (143) intervine h la diferite puteri, în acea vecinătate a lui O, forma curbei diferă de la caz la caz, fiind formată din 2 ramuri tangente fiecare în O la Ox: 1) *p — par, q — impar*: după cum $h \gtrless 0$ ($h^p > 0$, $h^q \gtrless 0$), P descrie cîte o ramură în cadranele I şi IV; *O e un punct de întoarcere de prima speţă* (fig. 194 a). 2) *p, q — pare*: după cum $h \gtrless 0$, P descrie cîte o altă ramură în acelaşi cadran I; *O e un punct de întoarcere de a doua speţă* (fig. 194 b). 3) *p, q — impare*: după cum $h \gtrless 0$, P descrie cîte o ramură în cadranele I şi III; *O e un punct de inflexiune* (fig. 194 c). 4) *p — impar, q — par*: după cum $h \gtrless 0$, P descrie cîte o ramură în cadranele I şi II; *O e un punct de ondulaţie* (194 d). Însă, dacă p e impar, prin transformarea de parametru $\tau = t^p$, adică $t = \tau^{1/p}$, ecuaţia lui C devine

$$x = \frac{\tau}{p!}\, x_0^{(p)} + \frac{\tau^{(p+1)/p}}{(p+1)!}\, x_0^{(p+1)} + \ldots,\quad y = \frac{\tau^{q/p}}{q!}\, y_0^{(q)} + \frac{\tau^{(q+1)/p}}{(q+1)!}\, y_0^{(q+1)} + \ldots$$

iar în O ($\tau = 0$) avem $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_0 = \frac{1}{p!}\, x_0^{(p)} \neq 0$, $\left(\frac{dy}{g\tau}\right)_0 = 0$; deci O e punct ordinar.

77 Să se determine natura punctelor (p, q)-multiplu ale curbei C:

a) $x = t^2, y = 2t(3 - t^2)/3$; b) $x = 2 \sin t, y = 2 \cos^2 t/(2 + \cos t)$; c) $x = (9t^4 + 1)/9t^2, y = (27t^4 + 1)/27t^3$; d) $x = t^5/10\,(1 - t), y = t^3$; e) $x = t^4, y = t^2 - t^5$; f) $x = t^2/(1 - t), y = t^3/(1 - t^2)$; g) $x = t^2, y = at^4 + bt^5$); h) $x = t/(1 - t^2), y = t(1 - 2t^2)/(1 - t^2)$; (i) $x = 5t^2/(1 + t^5), y = 5t^3/(1 + t^5)$; j) $x = (t + 2)^2/(t + 1), y = (t - 2)^2/(t - 1)$; *k*) $x = t^3/(t - 1)\,(t + 2), y = t(t - 2)/(t - 1)$; *l*) $x = 8t^2/(1 + t^4), y = 8t^3/(1 + t^4)$; m) $x = -3t^2 + t^3, y = -3t^3 + t^4$; n) $x = (t^2 - 1)^2, y = t(t^2 - 1)$.

R. a) $x' = y' = 0$ n-admite nici o soluţie; deci C n-are puncte (p, q) — multiplu. Are un nod în A (3, 0), obţinut pentru $t = \pm \sqrt{3}$ (fig. 195). b) $A\,(t = \pi/2) = (2, 0)$ şi $B\,(t = 3\pi/2) = (-2, 0)$ — puncte de întoarcere de prima speţă, cu tangentele $\pm x + y - 2 = 0$ (fig. 196). Tangentele în $C\,(t = 0) = (0, 2/3)$ şi $D\,(t = \pi) = (0, 2)$ sînt paralele cu Ox; $P_{1,2}\,(\pm 2\sqrt{5}/3, 2/3)$ — puncte de inflexiune. c) Pentru $t = \pm \sqrt{3}/3$ obţinem că $A\,(2/3, -4\sqrt{3}/9)$ şi $B\,(2/3, 4\sqrt{3}/9)$ sînt puncte (2, 3) — multiple (fig. 197). d) $O\,(t = 0)$ e punct (5, 3) — multiplu, tangenta în O fiind Oy (fig. 198). e) $O\,(t = 0)$ e punct (4, 2) — multiplu, cu tangenta Oy (fig. 199). $A\,(t = -\sqrt[3]{4/5})$ e punct de inflexiune, tangenta în $B\,(t = \sqrt[3]{2/5})$ e paralelă cu Ox şi curba taie pe Ox în $C\,(t = 1)$. f) $O\,(t = 0)$ e punct (2, 3) — multiplu (fig. 200). g) $O\,(t = 0)$ e punct (2, 4) — multiplu (fig. 201). h) N-are

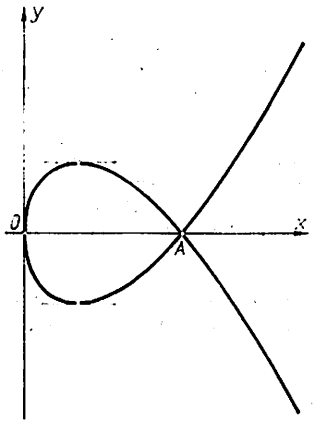


Fig. 195

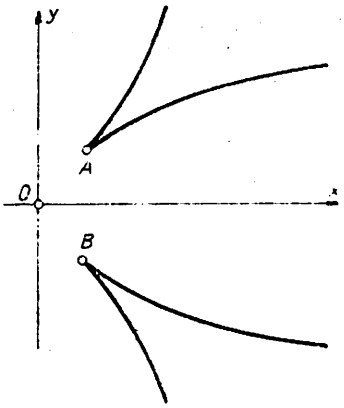


Fig. 197

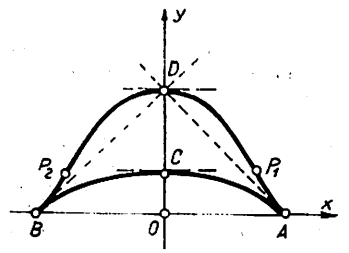


Fig. 196

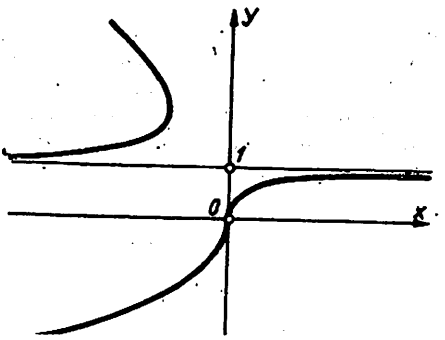


Fig. 198

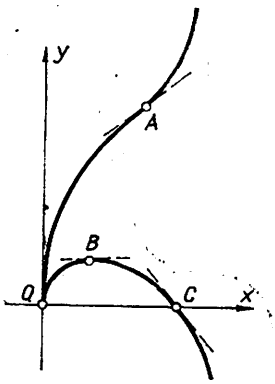


Fig. 199

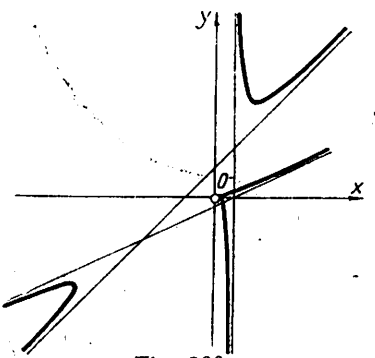


Fig. 200

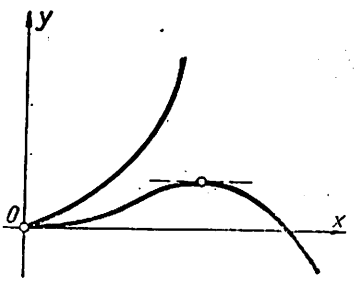


Fig. 201

puncte (p, q) — multiplu (fig. 202). i) O e punct cuadruplu, constituit din două puncte de întoarcere, tangentele duble fiind Ox (pentru $t = 0$) și Oy (pentru $t = \infty$); prima bisectoare e axă de simetrie (fig. 203). Ecuația carteziană $x^5 + y^5 - 5x^2y^2 = 0$. j) A $(t = 0) = (4, -4)$ e punct (2, 3) — multiplu (fig. 204). k) $x = -t^3/2 + \ldots$, $y = 2t + \ldots$ O e punct (3, 1) — multiplu (fig. 205). l) O e un punct triplu, fiind punct (2, 3) — multiplu cu Ox tangentă (pentru $t = 0$) și ordinar cu Oy tangentă (pentru $t = \infty$), (fig. 206). m) O ($t_1 = 0$ și $t_2 = 3$) — punct triplu: pentru t_1 e punct (2, 3) — multiplu cu tangenta Ox (situată la stînga lui Oy) iar pentru t_2 e punct ordinar cu tangenta $y = 3x$ (fig. 207). Tangenta e paralelă cu Ox în A ($t = 9/4$) și cu Oy în B ($t = 2$). n) N-are puncte (p, q) — multiplu. O ($t = \pm 1$) e tacnod (fig. 208; v. și fig. 36); tangenta e paralelă cu Ox în A ($t = -1/\sqrt{3}$) și A' ($t = 1/\sqrt{3}$), iar cu Oy în B ($t = 0$).

78 Se numește *parabolă generalizată de indice m* (sinonim: *parabolă de ordin superior, parabolă de ordinul m, curbă binomă parabolică*) curba C de ecuație

(146) $$y = ax^m \quad (m \text{ — număr real pozitiv}).$$

Se cere: a) Să se afle punctele (p, q)-multiplu ale curbei. b) Notînd cu T, T' punctele în care tangenta în P la C taie pe Ox și Oy, iar cu P' proiecția lui P pe Ox, să se găsească raportul de asemănare al triunghiului TOT' și triunghiului $TP'P$. c) Folosind acest raport de asemănare, să se deducă un mod de construcție al tangentei în P la C. d) Să se arate că raportul dintre subtangentă (în P la C) și abscisa lui P e constant.

R. a) Dacă *m e număr irațional*, C e transcendentă, fiind formată dintr-o singură ramură tangentă în O unei axe a reperului (fig. 209). Dacă *m e număr rațional*: $m = q/p$ cu* $p < q$ și $(p, q) = 1$, $C = C_{pq}$ e o curbă algebrică de grad q și admite parametrizarea

(146′) $$C_{pq}: x = t^p, \; y = at^q \quad (p<q).$$

Dacă *p e impar*, O e *punct ordinar cu tangentă nestaționară* cînd $p=1$, $q=2$ (C_{12} e o parabolă; fig. 210) sau *cu tangentă staționară* cînd $p \geqslant 1$, $q > 2$, fiind *punct de inflexiune* pentru q impar (fig. 211)

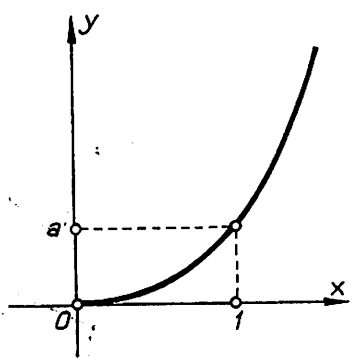


Fig. 209

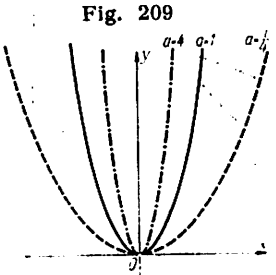


Fig. 210

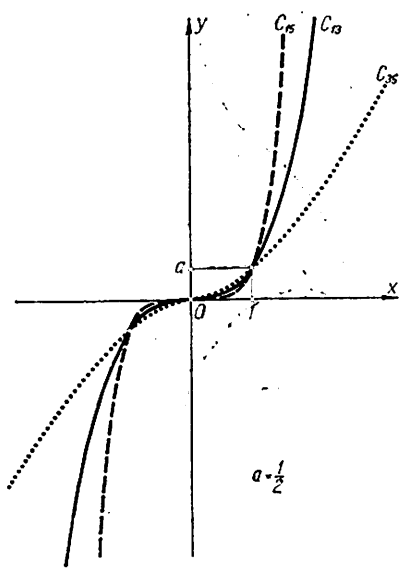


Fig. 211

* Ceea ce e posibil schimbînd axele de coordonate între ele.

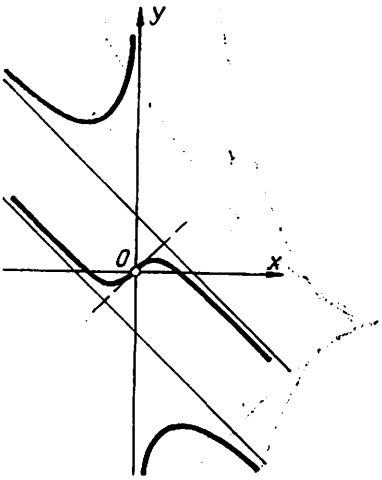


Fig. 202

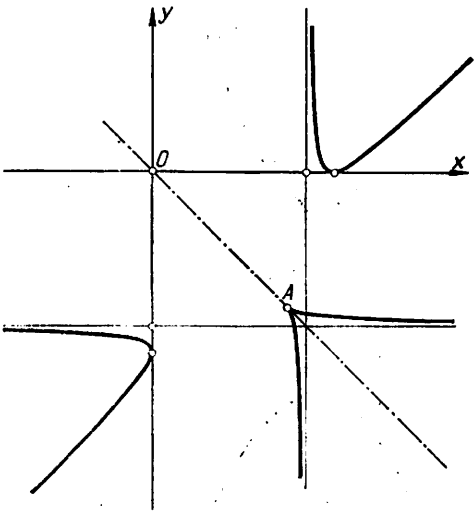


Fig. 204

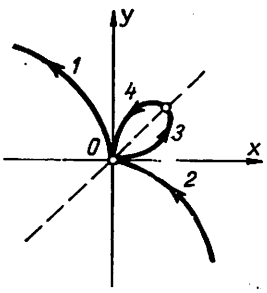


Fig. 203

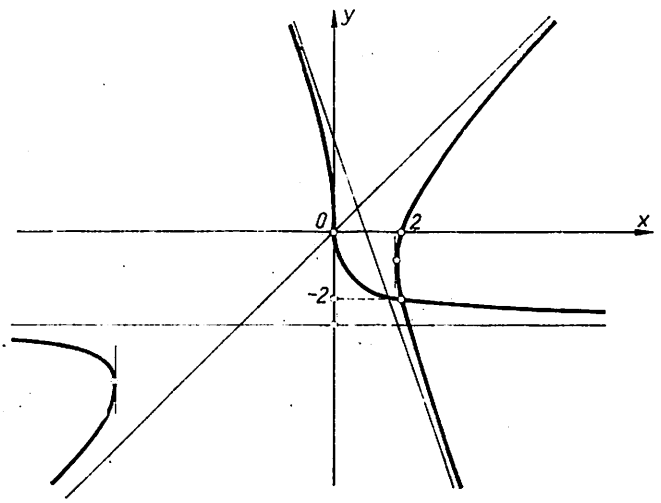


Fig. 205

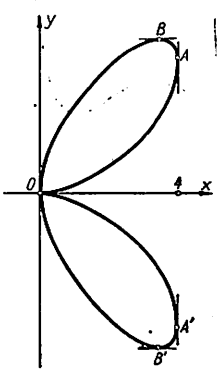


Fig. 206

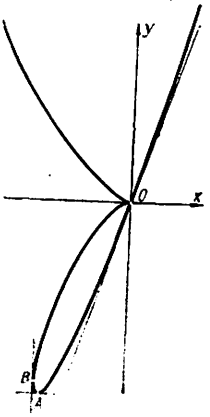


Fig. 207

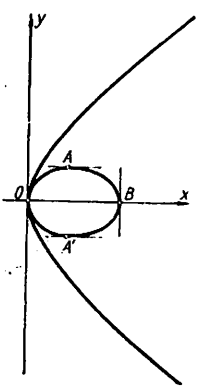


Fig. 208

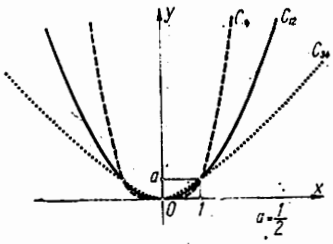


Fig. 212

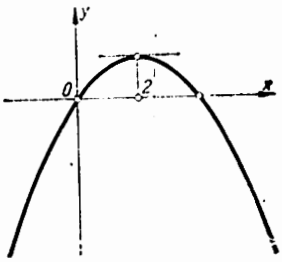


Fig. 214

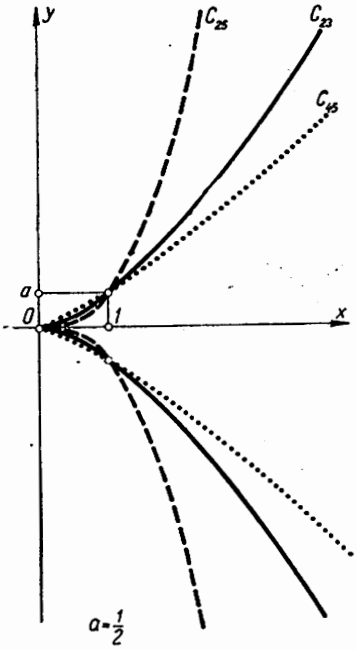


Fig. 213

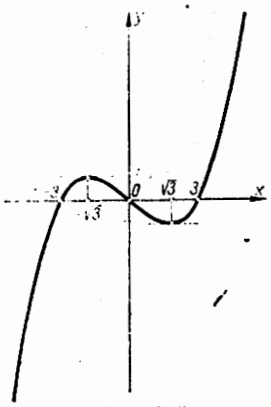


Fig. 215

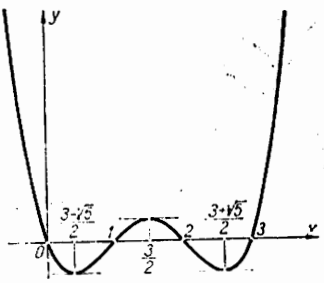


Fig. 217

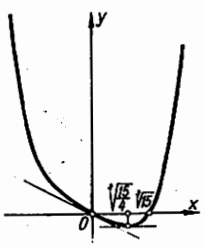


Fig. 216

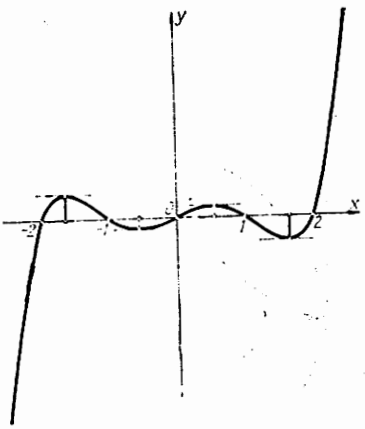


Fig. 218

sau *punct de ondulație* pentru q par (fig. 212). Dacă p *e par* (deci q e impar), O e *punct de întoarcere de prima speță* (fig. 213). *Obs.* Mai general:

$$y = ax^m + \sum_{i=1}^{r} a_i x^{m_i} \quad (m<m_1<\ldots<m_r). \tag{147}$$

Dacă m și m_i sînt numere naturale, C e o curbă rațională de grad m_r, cu $m_r - 2$ puncte de inflexiune reale sau imaginare. Pentru $m_r = 2$ se obține o *parabolă*; de exemplu: $y = (4x - x^2)/3$ (fig. 214). Pentru $m_r = 3$ regăsim *parabola lui Wallis*; de exemplu: $y = -(9x - x^3)/10$ (fig. 215). Alte exemple: $y = -(15x - x^4)/30$ (fig. 216); $y = x(x-1)(x-2)(x-3)/2$ (fig. 217); $y = (4x - 5x^3 + x^5)/10$ (fig. 218) Dacă $m = \alpha/\beta$, $m_i = \alpha_i/\beta_i$ iar p = c.m.m.m.c. $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_r)$, putem lua

$$x = t^p, \quad y = at^q + \sum_{i=1}^{r} a_i t^{q_i} \quad (p<q<q_1<\ldots<q_r). \tag{147'}$$

Deci O e punct (p, q) — multiplu, prezentîndu-se oricare din cele 4 cazuri (termenul $\sum_{i=1}^{r} a_i t^{q_i}$ ia o valoare pentru $t \in [-\varepsilon, 0)$ și alta pentru $t \in (0, \varepsilon]$, una sau ambele ramuri ale lui C putînd tăia pe Ox. Exemple: $y = ax^2 + bx^{5/2}$ (fig. 219), $y = ax^{3/2} + bx^3$ (fig. 220), $y = ax^2 + bx^3$ (fig. 221), $y = ax^{7/3} + bx^2$ (fig. 222), $y = ax^2 + bx^3 + cx^{7/2}$ (fig. 223). b) Tangenta și normala

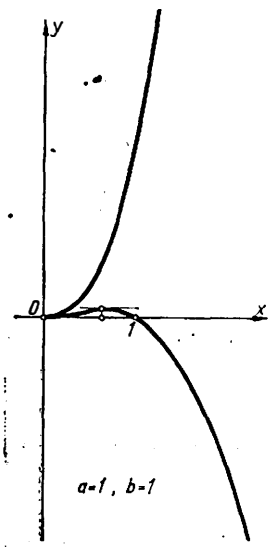


Fig. 219

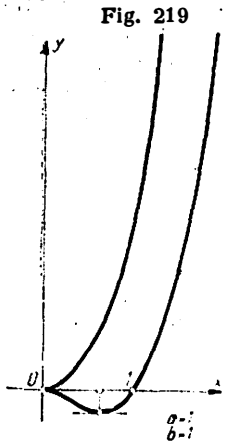


Fig. 220

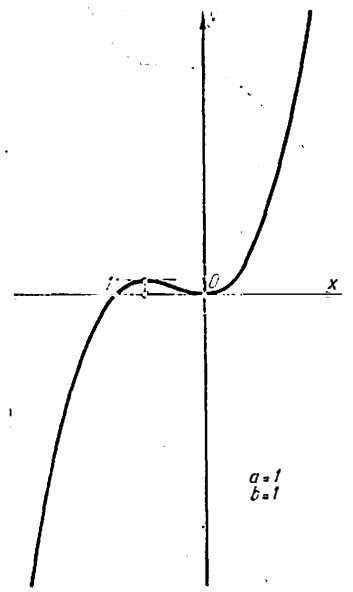


Fig. 221

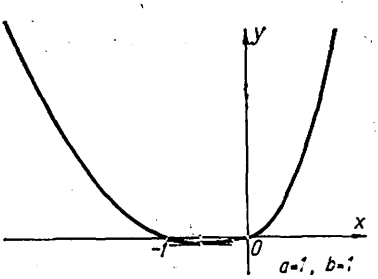


Fig. 222

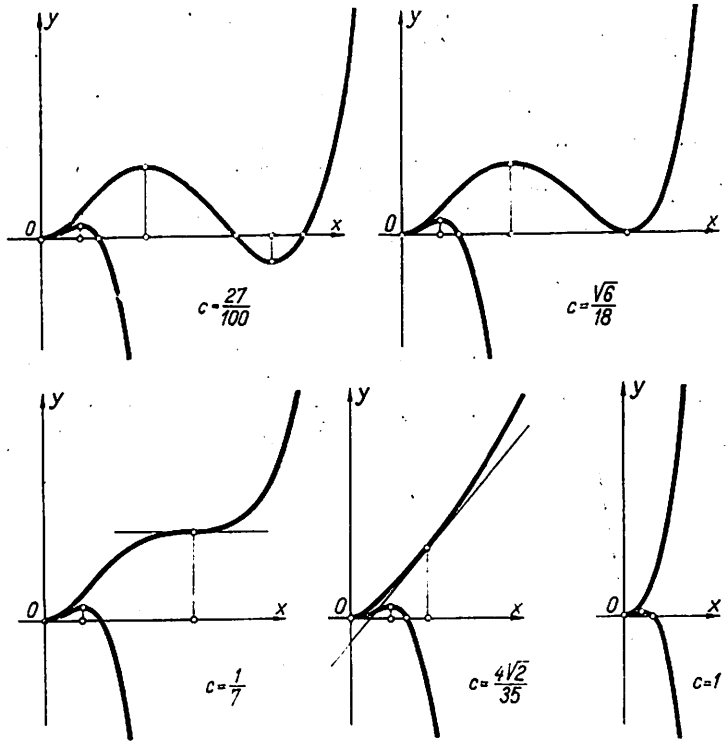


Fig. 223

în $P(x, y) \in (146)$: $myX - xY + (1 - m)xy = 0$ și $xX + myY - (x^2 + my^2) = 0$; deci $OT = \frac{m-1}{m} x$, $OT' = (1 - m)y$, încît raportul de asemănare e $1 - m$. c) Se împarte $x = OP'$ în m părți egale; dreapta care unește a $(m - 1)$ – a diviziune cu P e tangenta căutată (fig. 224). d) Subtangenta $P'T = -y/y'$; deci $P'T/x = -1/m$. *Obs.* Ecuația tangențială : $(1 - m)^{m-1} \xi_1^m + m^m \xi_2 \xi_3^{m-1} = 0$. Traiectoriile ortogonale ale curbei (146) cu a parametru sînt elipsele $x^2 + my^2 = \text{const}$.

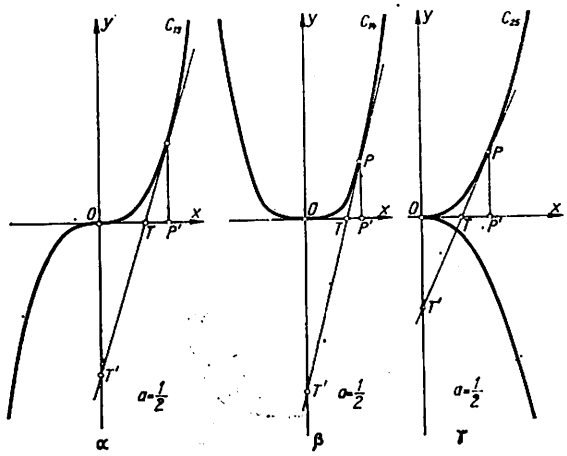


Fig. 224

79 Să se studieze singularitățile curbei C : a) $\rho = \pm\theta^{p/q}$ unde $p/q > 0$ e o fracție ireductibilă și unde se ia semnul $+$ cînd p e par; b) $\rho = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$; c) $\rho^2\cos\theta = a^2\sin^2\theta$; d) $\rho = a\sin\frac{\theta}{2}$ $(a > 0)$; e) $\rho\cos\theta = 2p\sin\theta(1 + \sin\theta)$; f) $\rho^2\cos 2\theta = 2\cos 2\theta - 1$.

R. Uneori e necesar să trecem în reprezentarea carteziană. a) $\theta = t^q$; $C : x = t^p\cos t^q = t^p(1 - t^{2q}/2! + \ldots)$, $y = t^p\sin t^q = t^p(t^q - t^{3q}/3! + \ldots)$. O $(t = 0)$ e punct $(p, p+q)$ – multiplu.

b) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$; $A\ (t = \pm 1) = (0, 1)$ e nod (fig. 225). c) $x\,(x^2 + y^2)^2 = a^2 y\,(3x^2 - y^2)$; O e punct triplu (fig. 226). d) $4\,(x^2 + y^2)^3 - 4a^2\,(x^2 + y^2)^2 + a^4 y^2 = 0$; $\Omega\,(0, a\sqrt{2}/2)$ și $\Omega'\,(0, -a\sqrt{2}/2)$ sînt noduri iar O e tacnod (v. fig. 227). e) $x\,(x^2 + y^2)^2 - py^2\,(x^2 + y^2) - 4p^3xy^2 = 0$; O e punct triplu (fig. 228). *Obs.* $\rho = 0$ pentru $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ și $\theta = \pi/2$; $\rho' = 0$ pentru $1 + 2\sin\theta - \sin^3\theta = 0$. f) $x^4 - y^4 = x^2 - 3y^2$; O e un nod cu tangente inflexionare (fig. 229).

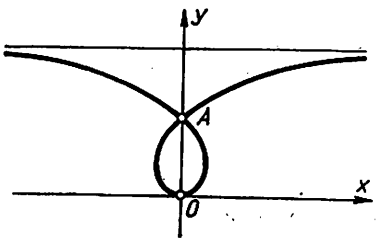


Fig. 225

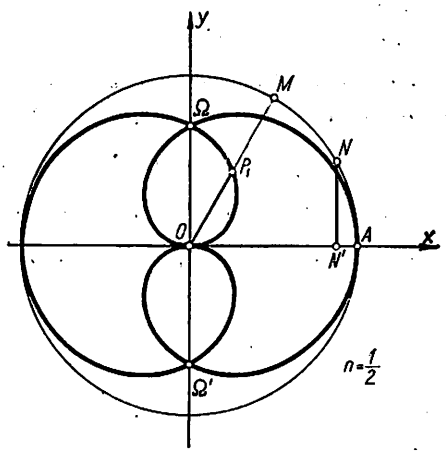


Fig. 227

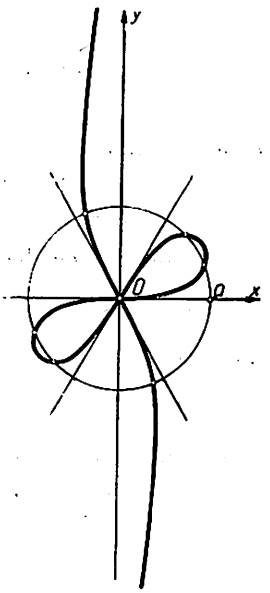


Fig. 226

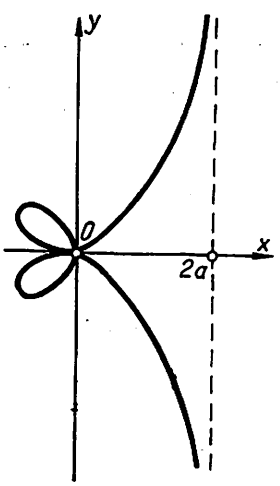


Fig. 228

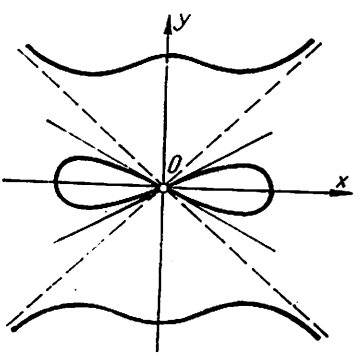


Fig. 229

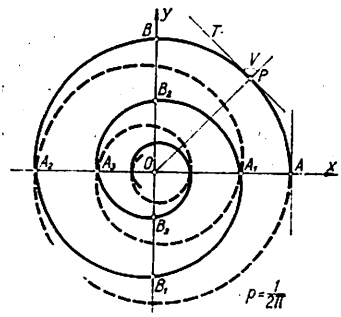


Fig. 230

80 Să se afle singularităţile *spiralei lui Poinsot*:

$$(148) \qquad \rho = 2a/(e^{p\theta} + e^{-p\theta}) = a/\operatorname{ch} p\theta.$$

R. $\theta \in R$. *C* e simetrică în raport cu axa polară şi n-are puncte de inflexiune; polul *O* e un punct asimptotic (fig. 230; linia întreruptă pentru $\theta \in (0, -\infty)$). *Obs.* În *A*, tangenta e perpendiculară pe axa polară.

5. ASIMPTOTELE UNEI CURBE PLANE

81 O condiţie necesară (dar nu suficientă) ca o curbă (2) să aibă asimptote:

$$(149) \qquad \text{există } \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ finită sau infinită.}$$

Apl. a) $y = ax/(ax^2 + 1)$, $a > 0$ (*serpentina lui Newton*); b) $y = x^3/(x^2 - 3)$; c) $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$ (*curba Mariei Agnesi*); d) $y = \ln|(x-2)/(x+2)|$; e) $y = 2(x-1)^2/(4x^2 + 2x + 1)$; f) $y = x^3/2(x+1)^2$; g) $y = \frac{\ln x}{x}$; h) $y = x^2/(x^2 - 1)$; i) $y = (x^2 + 3x + 2)/(x^2 - 3x + 2)$; j) $y = b \operatorname{tg} ax$ (*tangentoidă*); k) $y = (1 + \sin 2x)e^{-x}$; l) $y = b \sec \frac{x}{a}$ (*secantoidă*); m) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

R. Căci *C* n-are asimptotă dacă

$$(149') \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ nu există (nici finită, nici infinită).}$$

În adevăr, dreapta d: $y = mx + n$ e o asimptotă a lui *C* dacă

$$(149'') \qquad m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Cînd $m = 0$, atunci $f(x) - mx = f(x)$, iar după (149') nu există ($149''_2$); *C* n-are asimptotă. Dacă $m \neq 0$, atunci $f(x) = \frac{f(x)}{x}\, x$ şi deci ar exista $\lim_{x\to\infty} f(x) = m \cdot \infty$; se contrazice ipoteza (149'). *Obs.* Cînd limita (149) există şi e finită, *C* admite o *asimptotă orizontală*. Dacă această limită există şi e infinită, atunci se cercetează limitele (149''); dacă una din ele nu există sau e infinită, *C* n-are asimptotă. *Apl.* a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; *Ox* e asimptotă orizontală (fig. 231). Punctele de abscisă 0 şi $\pm\sqrt{3/a}$ sînt de inflexiune; maxim în *A* $(1/\sqrt{a}, \sqrt{a}/2)$ şi minim

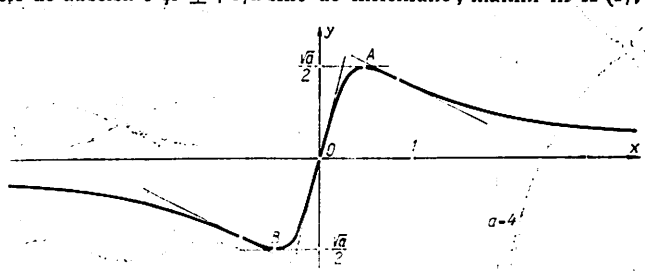


Fig. 231

$-1/\sqrt{a}, -\sqrt{a}/2)$. b) $\lim_{x\to\pm} f(x) = \infty$; asimptote verticale $x = \pm\sqrt{3}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ iar $m = 1$, $n = 0$; asimptotă oblică $y = x$. O e punct de inflexiune (fig. 232). c) Ox e asimptotă orizontală (v. fig. 115 c); maxim în $A(0, 2a)$. d) $x = \pm 2$, $y = 0$ (fig. 233). e) $y = 1/2$; $A(-2/5, 98/21)$ și $B(1, 0)$ sînt extreme (fig. 234). f) $x + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ (fig. 235). g) Ox și Oy (fig. 236); maxim în $A(e, 1/e)$ iar $B(e^{3/2}, 3/2\sqrt{e^3})$ e punct de inflexiune. h) $x = \pm 1$, $y = 1$ (fig. 237). i) $x = 1$, $x = 2$ și $y = 1$ (fig. 238). j) Curba e formată dintr-o infinitate de ramuri egale, una obținîndu-se din alta printr-o translație de forma $x' = x + k\pi/a$ $(k \in Z)$. Ramura din intervalul $(\pi/2a,$

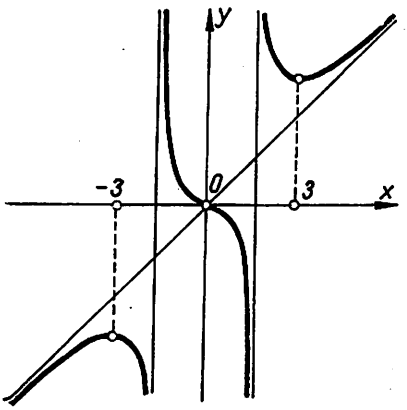


Fig. 232

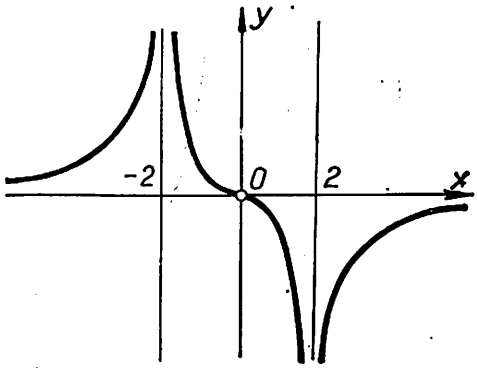


Fig. 233

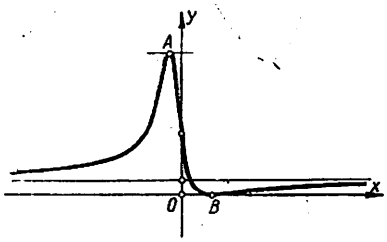


Fig. 234

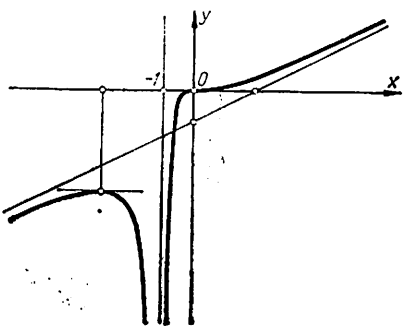


Fig. 235

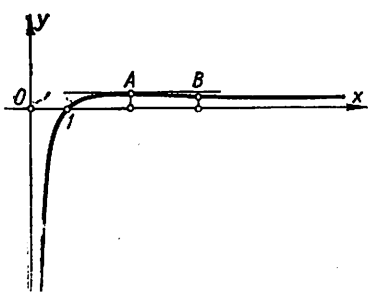


Fig. 236

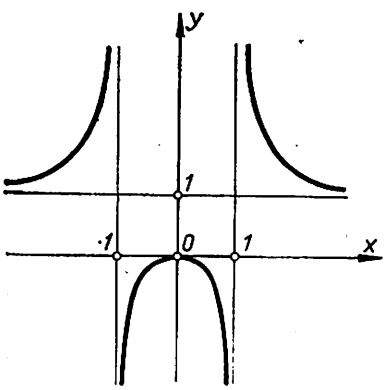


Fig. 237

$3\pi/2a$) admite asimptotele verticale $x = \pi/2a$, $x = 3\pi/2a$ (fig. 239); A $(\pi/a, 0)$ e punct de inflexiune, cu tangenta $y = ab\,(x - \pi/a)$. k) Cum $f(x + k\pi) = f(x)e^{-k\pi}$, valorile funcției pentru $x \in [k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$ se deduc din cele pentru $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ prin înmulțire cu $e^{-k\pi}$. Avem $A\,(-\pi/2, e^{\pi/2} \sim 4{,}8)$ și $B\,(\pi/2, e^{-\pi/2} \sim 0{,}2)$, cu minim în $m\,(-\pi/4, 0)$ și maxim $M\left(\text{arc tg}\frac{1}{3} \sim \right.$ $\left. \sim 0{,}32; \frac{8}{5}\, e^{-\text{arctg}1/3} \sim 1{,}178\right)$ (fig. 240). l) Curba are o infinitate de ramuri, deducîndu-se din cea din intervalul $[0, 2a\pi]$ prin translația $x = x + 2ak\pi$, $y' = y$ $(k \in Z)$. Asimptote: $x = (2k + 1)\,a\pi/2$ (fig. 241). m) $f(x)$ e periodică, de perioadă 2π; deci, fie $x \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2]$, $x = \pi/2$ fiind

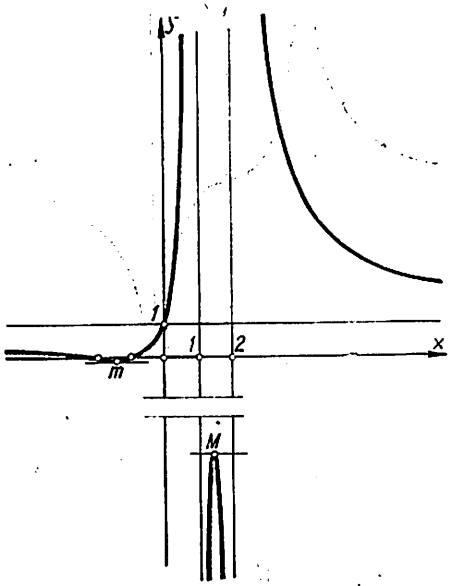


Fig. 238

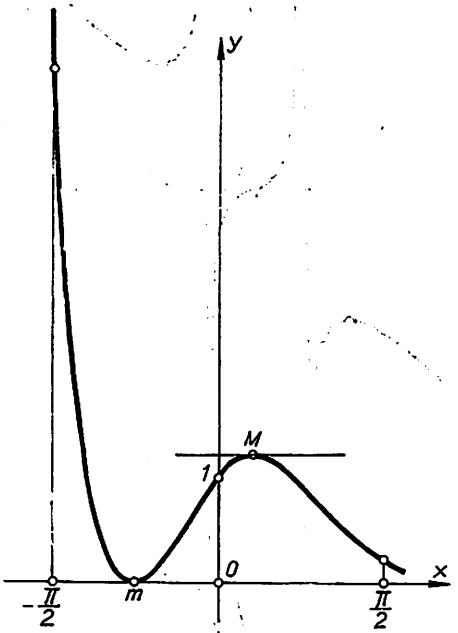


Fig. 240

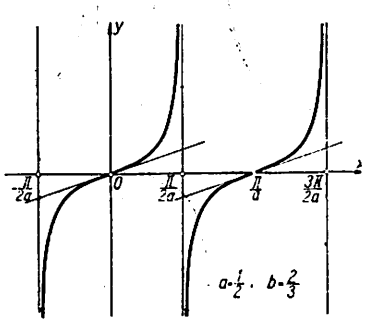


Fig. 239

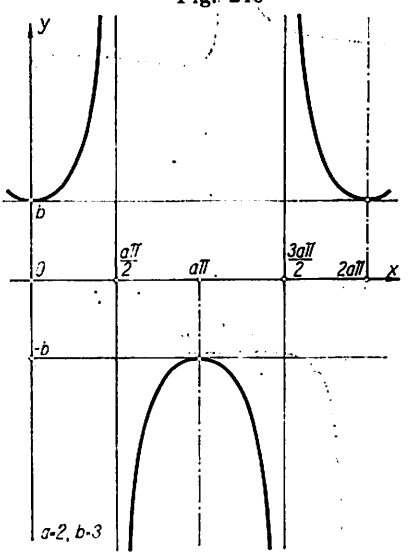


Fig. 241

asimptotă, iar $A\,(0,1)$, $A_1\,(\pi,1)$ și $D_1\,(3\pi/2,0)$ puncte de oprire (fig. 242). *Obs.* În $[0,\pi/2)$, scriem $y = e^u$ cu $u = \sin x \ln(\operatorname{tg} x)$; $y'(0+0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\cdot\dfrac{u}{x} = -\infty$. În $[\pi, 3\pi/2]$, avem $y(x+\pi) = (\operatorname{tg} x)^{-\sin x} = \dfrac{1}{y(x)}$ (tabela 3).

Tabela 3

x	0	$x_0 \sim 0{,}31$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$+x_0$	$\frac{5\pi}{4}$	x_1	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	$-$	$-\ 0\ +$	$\sqrt{2}$	$+$	▨	$+\infty\ +\ 0-$	$-\sqrt{2}$	$-$	-1	▨
y	1	$y_0 \sim 0{,}7$	1	$+\infty$	1	$\frac{1}{y_0} \sim 1{,}4$	1	y_1	0	
	A	B	C		A_1	B_1	C_1	I	D_1	
							$(y''=0)$			

82 Fie familia de strofoide oblice $(x^2+y^2)(y-\lambda x) = a(x^2-y^2)$. Să se afle: a) Locul punctului de intersecție al curbei cu asimptota. b) Locul proiecției punctului dublu al curbei pe asimptotă.

83 Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$\text{a) } e^x = ax^2;\quad \text{b) } (x^3 - 3x + 1)^2 + x^2 = 4 - 0.$$

R. Se folosește *metoda grafică*: numărul rădăcinilor reale e dat de numărul punctelor de intersecție a două curbe C_1 și C_2 obținute (în mod convenabil) din ecuația dată. a) $C_1: y = e^x$ și $C_2: y = ax^2$ (fig. 243) se taie în 1 sau 3 puncte, după cum $a < e^2/4$ sau $a \geqslant e^2/4$; în cazul $a = e^2/4$, 2 din ele coincid în $(2, e^2)$. b) $C_1: y = x^3 - 3x + 1$ și $C_2: x^2 + y^2 = 4$ (fig. 244) se taie în 4 puncte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

84 O secantă prin vîrful A' al unei hiperbole echilatere o taie în M și tangenta în celălalt vîrf în N. Luînd pe semidreapta $A'M$ segmentul $A'P = MN$, P descrie o curbă C. Să se afle asimptotele lui C.

R. Cu $O = A'$, hiperbola: $y^2 = x^2 - 2ax$. $C: x(x^2 - y^2) = 2ay^2$; O — punct de întoarcere de prima speță, asimptote: $y = \pm(x - a)$, $x + 2a = 0$ (fig. 245).

85 Folosind tangenta în $\Omega\,(0, l)$ la cisoida oblică (26), să se indice o construcție pentru asimptota cisoidei.

86 Prin *cvadratrice* se înțelege curba utilizată în rezolvarea „cvadraturii cercului" (problema construirii unui pătrat avînd aria egală ca a unui cerc dat, a determinării lungimii unui arc de cerc sau a construirii unui segment de măsură egală cu numărul π). Să se arate că sînt astfel de curbe, determinîndu-se asimptotele curbei: a) *Cvadratricea lui Dinostrate*: Dacă A e un punct fix și d e o dreaptă fixă, e locul punctelor P astfel ca $OP'/OA = \widehat{POd}/\widehat{AOd}$, P' fiind proiecția lui P pe dreapta OA dusă prin A perpendicular pe d. b) *Cvadratricea lui Tschirnhausen* de ecuație

$$y = a \sin\frac{x}{2a}. \tag{150}$$

c) *Curba lui Wallis* (Γ — funcția euleriană):

$$y = 2^{2(x-1)}\left(\int_0^1 (1-u^2)^{x-1}\,du\right)^{-1} \text{ sau } y = \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)}. \tag{151}$$

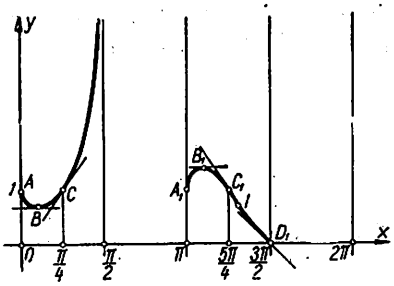


Fig. 242

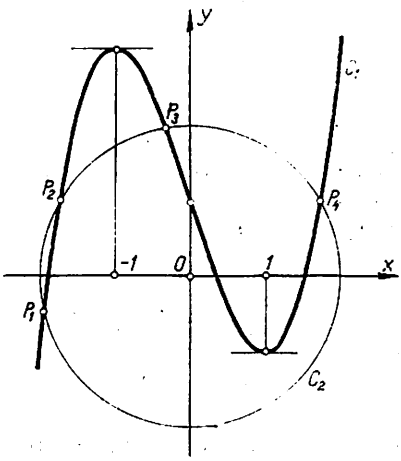


Fig. 244

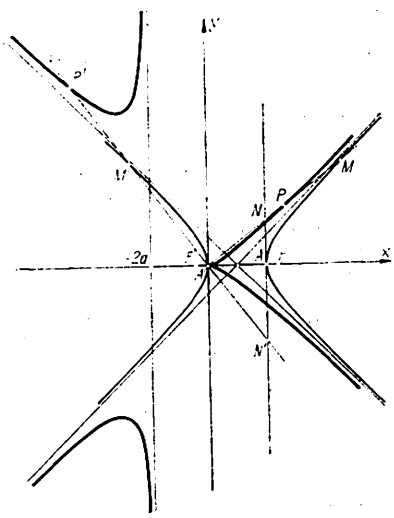


Fig. 245

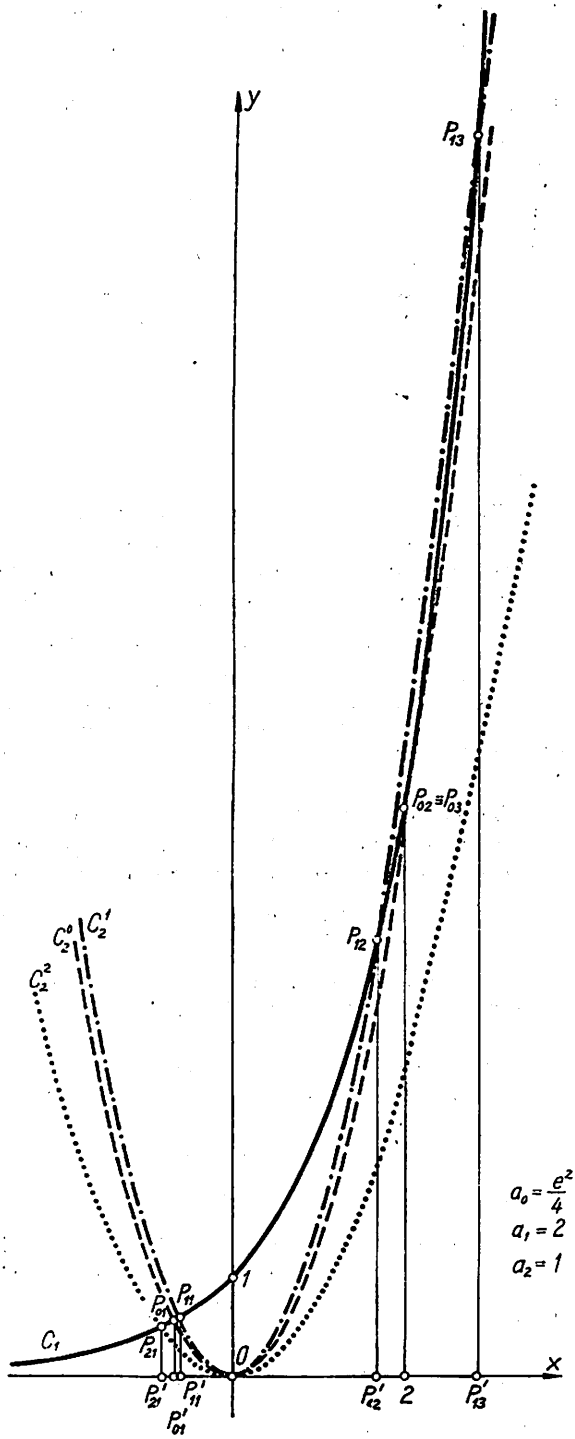


Fig. 243

R. a) Fie (fig. 246): $a = OA$, $\theta = \widehat{POA}$ şi $\varphi = \pi/2 - \theta$; deci

$$C: y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}, \quad \rho = \frac{2a}{\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \tag{152}$$

Asimptote: $x = 2ka$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). C e simetrică faţă de d, pe care o taie în $B(0, 2a/\pi)$; în $[\pm 2a, \pm 4a]$, $[\pm 4a, \pm 6a], \ldots$ e formată din ramuri asemănătoare. Punctele ei de inflexiune sînt pe tangenta în B la C. Arcul BA (din intervalul $[0,2a]$) admite o definiţie cinematică: Traiectoria punctului comun a două drepte mobile, dintre care una se deplasează uniform şi paralel cu d iar cealaltă se roteşte uniform în jurul lui $O \in d$, fiind paralele iniţial şi coincizînd în final. *Dinostrate* (sec. IV î.e.n.) a arătat că $OB = 2a/\pi$; plecînd de la $OA = a$ şi $OB = 2a/\pi$, a construit pe $a\pi$. De fapt, cu definiţia cinematică, curba a fost descoperită de *Hippias din Elis* (sec. V î.e.n.), folosind-o la rezolvarea „trisecţiunii unghiului": fie $\widehat{POA}$ dat; se construieşte $AQ' = AP'/3$ şi paralela prin Q' la d taie pe C astfel că $\widehat{QOA} = \widehat{POA}/3$. Luînd $AQ' = AP'/n$ se obţine $\widehat{QOA} = \widehat{POA}/n$. *Obs.* Inversa lui (152) e cohleoida (53) cu $\alpha = \pi/2a$. b) Căci (fig. 247) o intersecţie a curbei cu cercul $\Gamma(0; a)$ e $A(2a/\pi, a \sin 1)$. *Obs.* Curba (150) e transformata sinusoidei $Y = \sin X$ prin afinitatea $x = 2aX/\pi$, $y = aY$. c) Punctul de abscisă $x = 3/2$ are ordonata $y = 8/\pi$. C conţine punctul (1, 1) şi toate punctele de coordonate cu valori întregi de forma $\left(x, \frac{2^{x-1}.1.3\ldots(2x-1)}{1.2.3\ldots(x-1)}\right)$, unde x ia valori întregi pozitive mai mari decît 1. *Obs.* Tot curbă. Wallis e

$$y = \left(\int_0^1 (1-u^2)^{x-1}\, du\right)^{-1} \quad \text{sau} \quad y = \frac{\Gamma(2x)}{2^{2(x-1)}\,\Gamma^2(x)}, \tag{151'}$$

cu care se stabileşte formula

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \quad \text{sau} \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

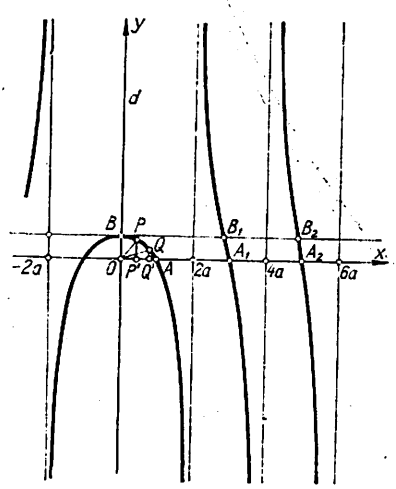


Fig. 246

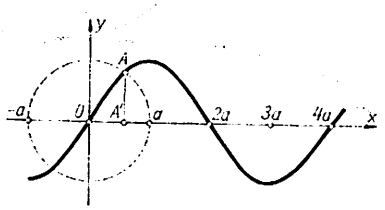


Fig. 247

O a treia curbă de tip Wallis e şi *curba binomială a lui Quételet*:

$$y = \binom{n}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}, \tag{151''}$$

care e folosită în statistică pentru reprezentarea frecvenţei probabile a abaterilor de la o normă determinată.

87 Să se studieze *curbele lui Van der Waals*:
(153) $y = -a/x^2 + \mu/(x - b)$ (a, b-const. pozitive, μ-parametru pozitiv). Cînd y e *presiunea* p, x e *volumul* V *iar* $\mu = RT$ cu T-*temperatura absolută* şi R-*constanta gazelor*, obţinem *ecuaţia modelului gazelor reale*; pentru diferite valori ale lui T rezultă *izotermele lui Van der Waals*.

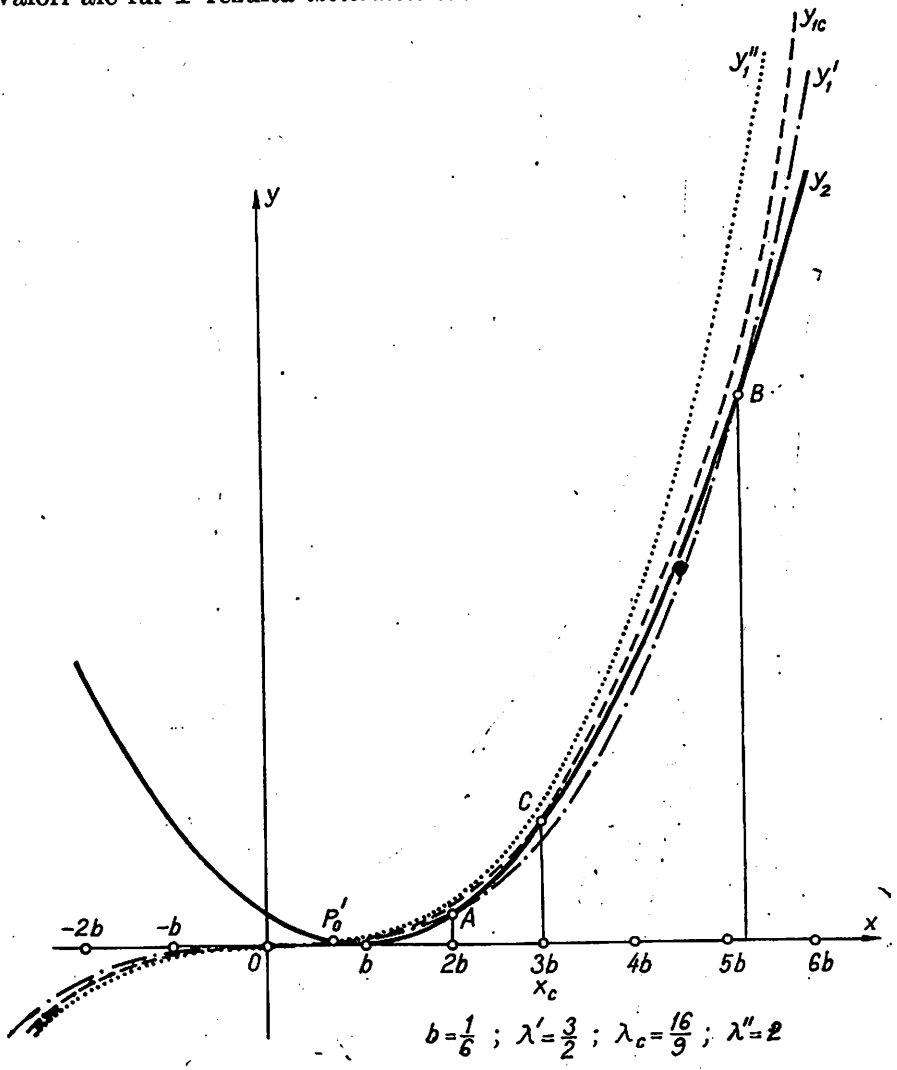


Fig. 248

R. Asimptote: $x = 0$, $x = b$ şi $y = 0$, $Y_\infty(0, 1, 0)$ e punct triplu cu 2 tangente distincte (asimptotele verticale, Oy — tangentă dublă). Forma curbei depinde de μ(sau $\lambda = \mu/a$). Zerourile lui y' sînt date de intersecţia lui $y_1 = \lambda x^3$ şi $y_2 = 2(x - b)^2$: se taie (cel puţin) în P_0' astfel că $x_0' \in (0, b)$; există $\lambda_c = 8/27\, b$, cînd $x_c = 3b$, astfel că y_1 şi y_2 sînt tangente în C, iar $y_1 \cap y_2 = \{P_0', A, B\}$ pentru $\lambda < \lambda_c$ şi $y_1 \cap y_2 = \{P_0'\}$ pentru $\lambda > \lambda_c$ (fig. 248) — căci $\lambda x^3 = 2(x - b)^2$, $3\lambda x^2 = 4(x - b)$ iar $\lambda_c = 2(x - b)^2/x^3 = 4(x - b)/3x^2$. Zerourile lui y'' sînt date de intersecţia lui $y_3 = \lambda x^4$ şi $y_4 = 3(x - b)^3$: există $\lambda_0 = 81/156\, b$, cînd $x''_0 = 4b$, astfel că y_3 şi y_4 sînt tangente în P_0'', iar $y_3 \cap y_4 = \{P, Q\}$ pentru $\lambda < \lambda_0$ şi $y_3 \cap y_4 = 0$ pentru $\lambda > \lambda_0$ (fig. 249). Avem

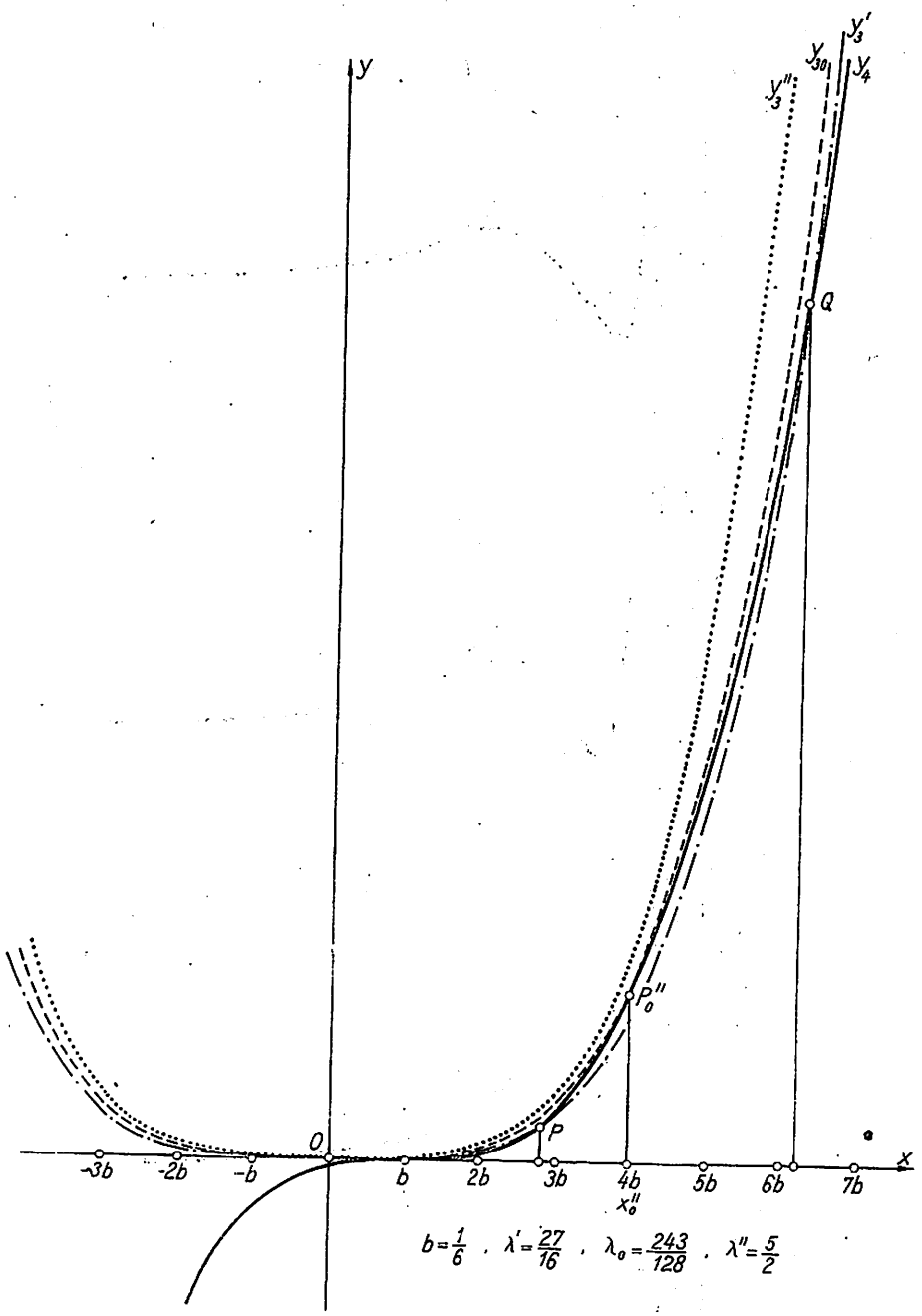

y
y'3
y30
y4
y''3
Q
P''0
P
O
-3b
-2b
-b
b
2b
3b
4b
5b
6b
7b
x
x''0
b=1/6 , λ'=27/16 , λ0=243/128 , λ''=5/2

Fig. 249

cazurile : y are 3 extreme şi 2 puncte de inflexiune (tabela 4, fig. 250) ; y are 1 extrem şi 2 puncte de inflexiune (tabela 5, fig. 251) ; y are 1 extrem şi 1 punct de ondulaţie (tabela 6, fig. 252) ; y are 1 extrem (tabela 7, fig. 253). *Obs.* a) y are zerouri cînd $1 - 4\lambda b \geqslant 0$ (v. fig. 250). b) Construcţia izotermelor : introducînd curbele (fig. 254)

$$u = (x - b)/x^2,\ v = 2\,(x - b)^2/x^3,\ w = 3\,(x - b)^3/x^4,$$

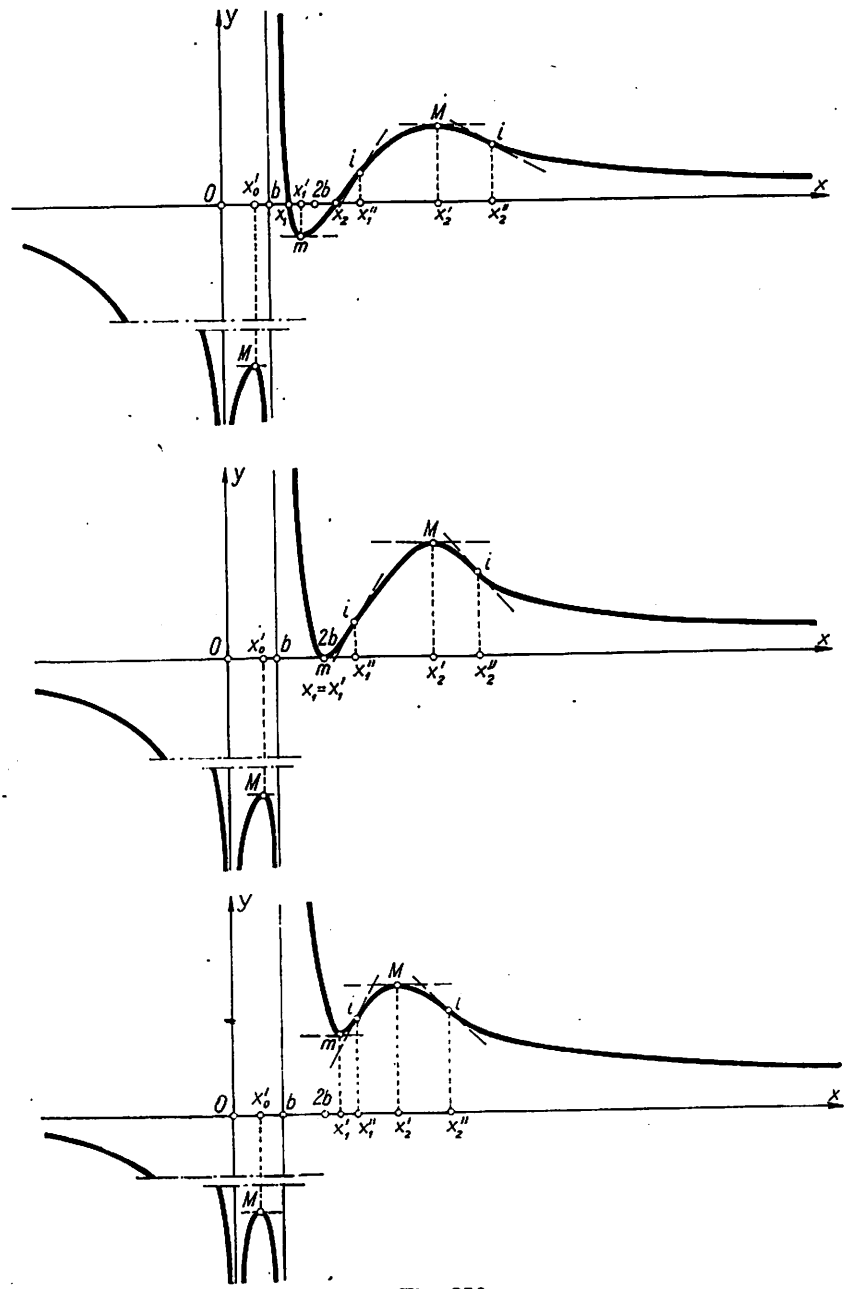


Fig. 250

Tabela 4:

x	$-\infty$		0	x_0'	b	x_1	x_1'	$2b$	x_1''	x_2	x_2'	x_2''	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$	M $-\infty$	$+\infty$	0	m		i	0	M	i	0
y'	$-$		$+$	0 $-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$		0	x_0' $(3-\sqrt{5})b$	b	$x_1=x_1'$ $2b$	x_1''	x_2' $(3+\sqrt{5})b$	x_2''	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$ M $-\infty$		$+\infty$	m 0	i	M	i	0
y'	$-$		$+$ 0 $-$		$-$	0 $+$	$+$	0 $-$	$-$	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$ $+$

x	$-\infty$		0	x_0'	b	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$ M $-\infty$		$+\infty$	m	i	M	i	0
y'	$-$		$+$ 0 $-$		$-$	0 $+$	$+$	0 $-$	$-$	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$ $+$

Tabela 5:

x	$-\infty$		0	x_0'	b	$x_2'=x_3'=x_1''$ $3b$	x_2''	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$ M $-\infty$		$+\infty$	i	i	0
y'	$-$		$+$ 0 $-$		$-$	0 $-$	$-$	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	0 $-$	0 $+$	$+$ $+$

x	$-\infty$		0	x_0'	b	x_1''	x_2''	$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$ M $-\infty$		$+\infty$	i	i	0
y'	$-$		$+$ 0 $-$		$-$	$-$	$-$	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	0 $-$	0 $+$	$+$

avem $y = -a(u-\lambda)/(x-b)$, $y' = a(v-\lambda)/(x-b)^2$, $y'' = -2a(w-\lambda)/(x-b)^3$; dreapta $\lambda = \text{const.}$ taie curbele u, v, w în zerourile lui y, y', y'' (fig. 255).

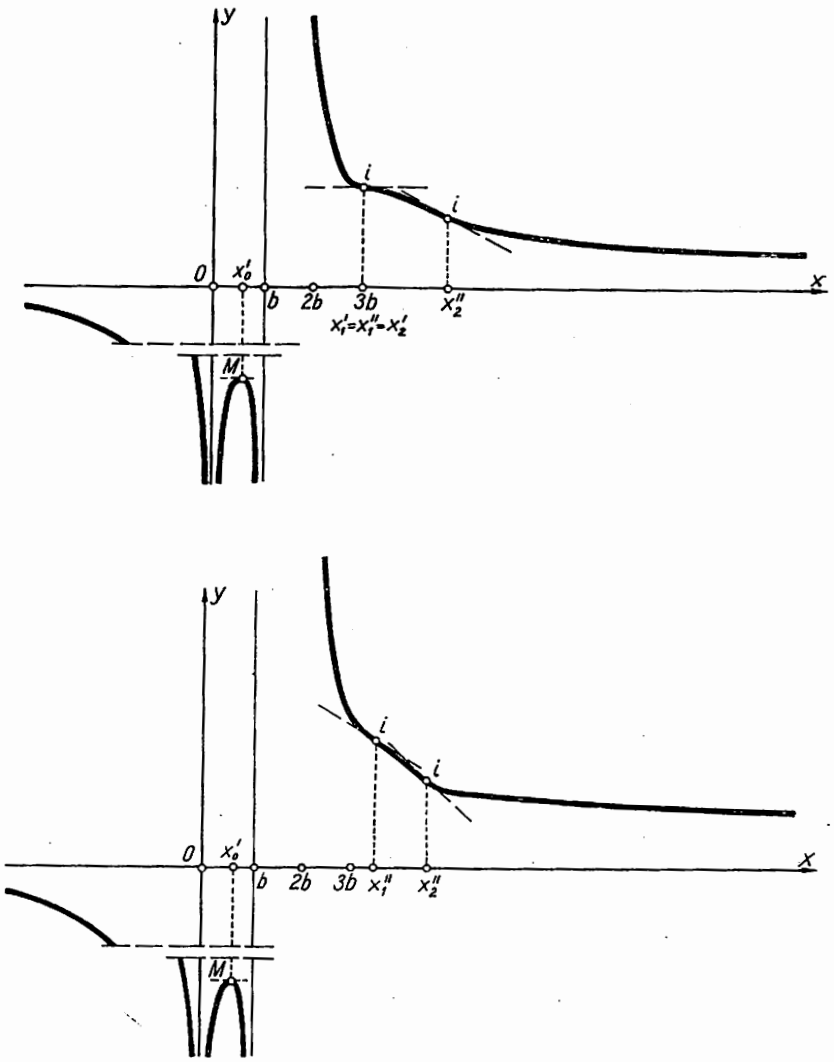


Fig. 251

88 Să se găsească condiția ca o curbă $C: x = x(t), y = y(t)$ să admită asimptote. *Apl.* cînd C (cu $a>0$): a) $x = (t^2-4)/t(t+1)$, $y = t^3/(t^2-1)$; b) $x=(t^2-1)/t$, $y=(3t+1)/t(t-1)$; c) $x = 2at^3/(t-3)^2(t-1)$, $y = at^2/(t-1)$; d) $x = t^2/(t-1)$, $y = t/(t^2-1)$; e) $x = 2/\sqrt[3]{(1-t^2)^2}$, $y = 2t/\sqrt[3]{(1-t^2)^2}$; f) $x = t^2/(1+t^2)$, $y=t^3/(1+t^2)$; g) $x=4at^2/(4-5t^2)$, $y=4at^3/(4-5t^2)$; h) $x=at^2/(t^2-2t+2)$, $y = at^3/(t^2-2t+2)$; i) $x=1/\sqrt[3]{(1-t^2)(1+t)}$, $y=t/\sqrt[3]{(1-t^2)(1+t)}$;

Tabela 6:

x	$-\infty$		υ	x_0'	b		$x_1''=x_2''$ $4b$		$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$	M	$-\infty$	$+\infty$	0		0
y'	$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$		$-$			$+$	0	$+$	$+$

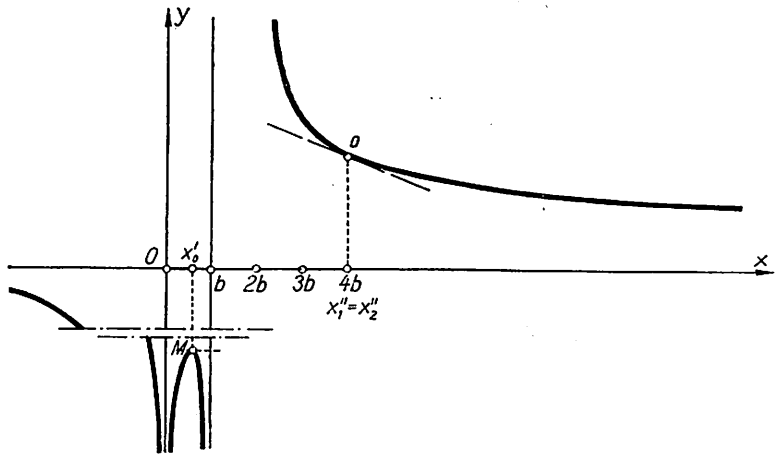


Fig. 252

Tabela 7:

x	$-\infty$		0	x'_0	b		$+\infty$
y	0	$-\infty$	$-\infty$	M	$-\infty$	$+\infty$	0
y'	$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$		$-$			$+$	$+$

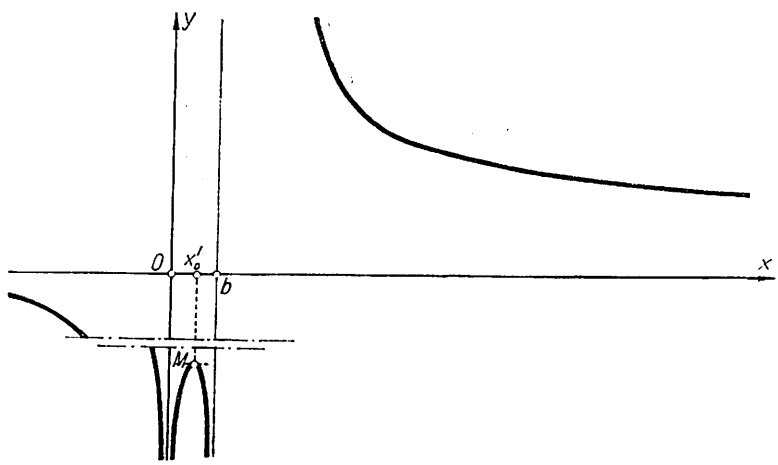


Fig. 253

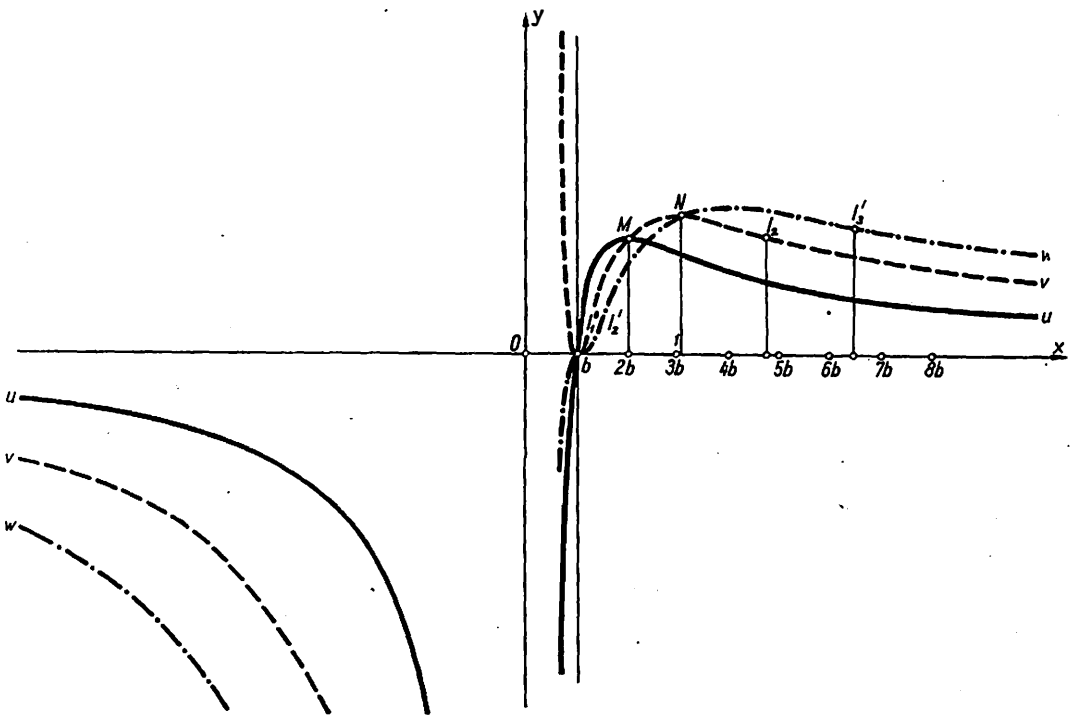
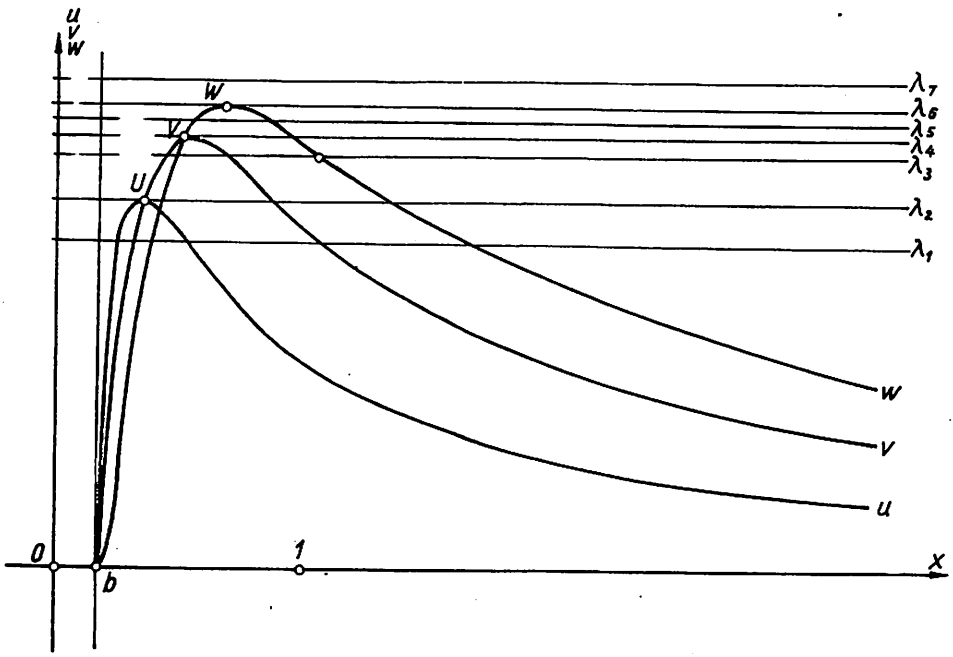
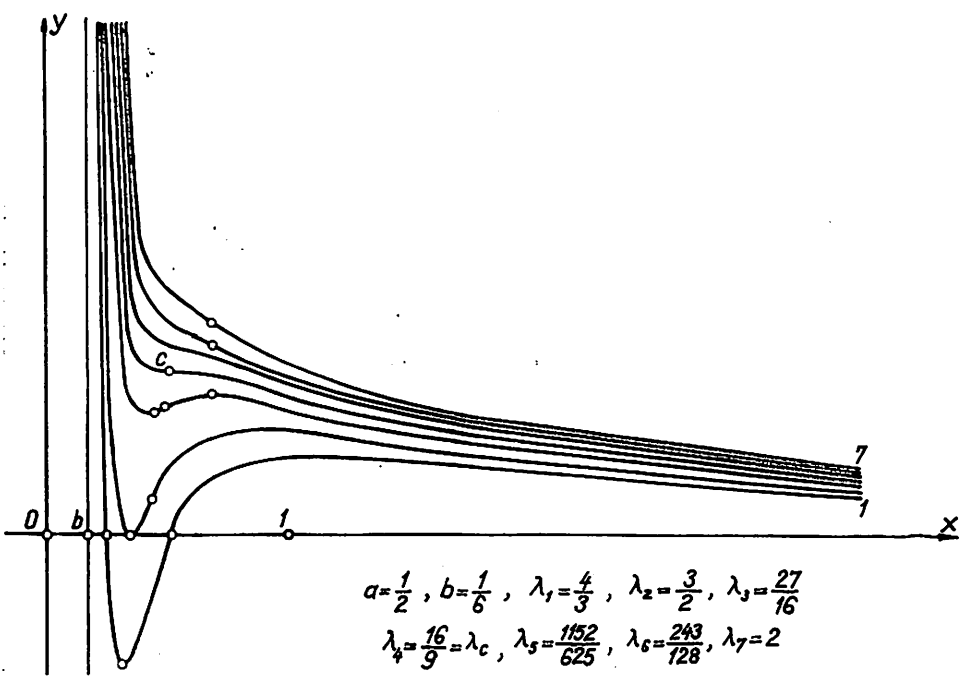


Fig. 254





$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{6},\ \lambda_1=\frac{4}{3},\ \lambda_2=\frac{3}{2},\ \lambda_3=\frac{27}{16}$$

$$\lambda_4=\frac{16}{9}=\lambda_c,\ \lambda_5=\frac{1152}{625},\ \lambda_6=\frac{243}{128},\ \lambda_7=2$$

Fig. 255

j) $x = t^2/(1+t^2)$, $y = t(1-t^2)/(1+t^2)$; k) $y = (1-1/x)^x$; l) $y = 1/(1+$ $+ e^{1/(x-1)})$; m) $y = \frac{1}{x}\sin x\ (x>0)$; n) $y = e^{2\sqrt{x}}$; o) $x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$; p) $8x^3 + y^3 - 3y^2 = 0$; q) $x^3 - x^2 y - xy + 2y = 0$; r) $y^x = 1 + x$; s) $(y - x)(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2 - xy) = 0$.

R. $P(t) \in C$ descrie *o ramură infinită* dacă $\lim_{t\to t_0} OP = \infty$. Deci: cînd

(154) $\lim_{t\to t_0} f(t) = a, \lim_{t\to t_0} g(t) = \infty$, respectiv $\lim_{t\to t_0} f(t) = \infty, \lim_{t\to t_0} g(t) = b$,

$x = a$, respectiv $y = b$, fiind o *asimptotă* (*verticală, respectiv orizontală*); cînd

(154′) $\lim_{t\to t_0} f(t) = \infty, \lim_{t\to t_0} g(t) = \infty$,

C admite *asimptota* (*oblică*)

(154″) $y = mx + n$ cu $m = \lim_{t\to t_0} \frac{g(t)}{f(t)} \neq 0,\ n = \lim_{t\to t_0} [g(t) - m f(t)]$.

O ramură infinită a lui C cu asimptotă e o *ramură hiperbolică* dacă rămîne de aceeași parte a asimptotei pentru $t \to t_0$. Dacă nu există a doua limită (154″), acea ramură se numește *ramură parabolică* a lui C. *Apl.* a) Ox, $x + 3/2 = 0$, $x - 1 = 0$, $y = x/6 - 25/12$ (fig. 256). b) Ox, Oy și $y = x - 4$ (fig. 257). c) $x = 2a$, $y = 9a/2$, $y = 2(x - a)$ (fig. 258). d) $x \pm y = 0$ (fig. 259). e) $y = 0$, $2x + 1 = 0$, $2x - 4y - 3 = 0$ (fig. 260). f) $x = 1$ (fig. 261). g) $5x + 4a = 0$, $5\sqrt{5y} = 10x - 4a$, $5\sqrt{5y} = -10x + 4a$ (fig. 262). h) $y = a$ (fig. 263). i) $x \pm y = 0$ (fig. 264). j) $x = 1$ (fig. 265). k) Luăm $x = t$; asimptota $y = 1/e$ (fig. 266). l) $2y = 1$ (fig. 267); găsim $A(1,0)$ și $B(1, 1)$. m) Ox e asimptotă, pe care C o taie în $A_k(k\pi, 0)$, $k \in Z - \{0\}$. $C \cap Oy = A(0, 1)$. C e limitată de hiperbolele Γ, Γ': $xy \pm 1 = 0$ (fig. 268). n) Ox (fig. 269). o) Se ia $y = tx$; $x = 1$, $y = \pm(x \pm 1)$. C trece prin $A(-1, 0)$ (fig. 270). p) Se ia $y = tx$; $2x + y - 1 = 0$ (fig. 271). q) Se ia $x = t$; $x = 1$, $x = -2$, $y = x - 1$ (fig. 272). r) Se ia $x = t$; $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ (fig. 273). s) Se ia $y = tx$ $y = x - a/2$ (fig. 274). C e o *concoidă circulară*; $A(3a/4, -3a/4)$ e vîrf.

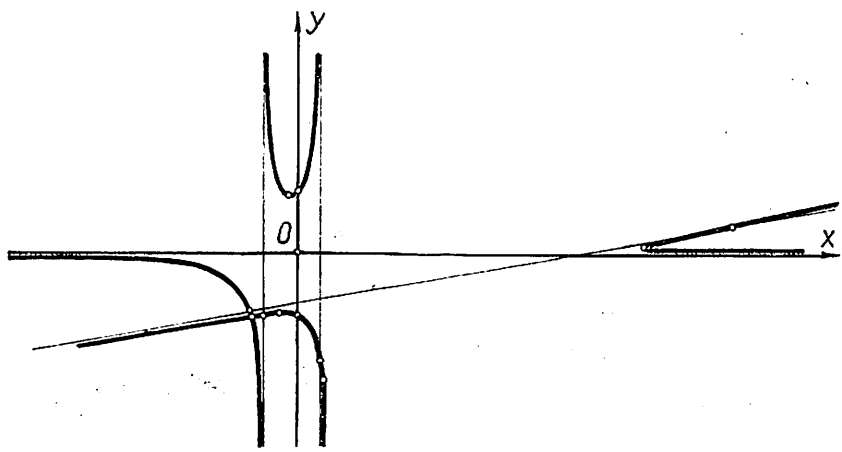


Fig. 256

89 Se cere un mod de construcție a asimptotei strofoidei oblice.

R. Pentru (65), asimptota $bx + ay + ab = 0$ e $B'D'$, simetrica față de O a lui DB ce unește proiecțiile lui A pe laturile unghiului drept (fig. 275; v. și fig. 95); C o taie în H, situat pe perpendiculara în O pe OA, poziția lui C fiind determinată de $y_c - y_a = (at + b)(bt + a)/a(1 + t^2)$.

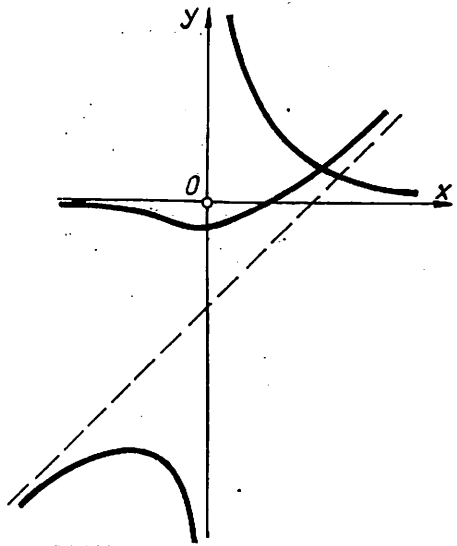


Fig. 257

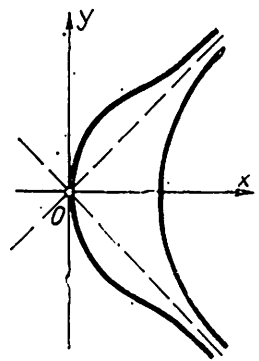


Fig. 259

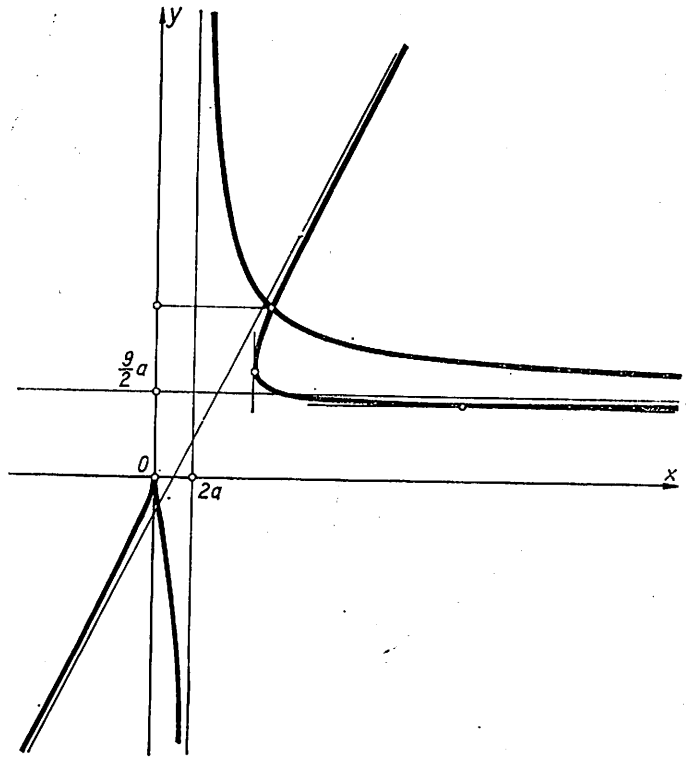


Fig. 258

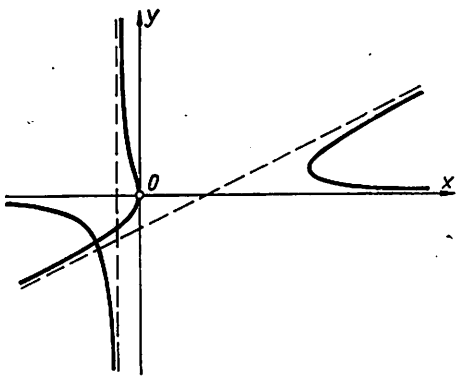


Fig. 260

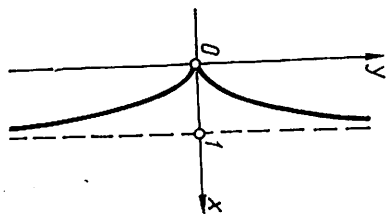


Fig. 261

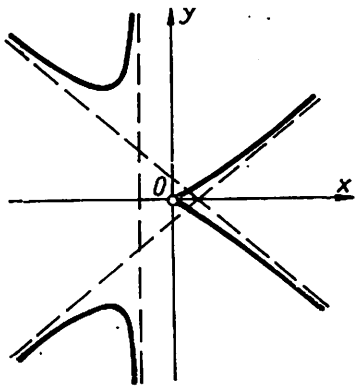


Fig. 262

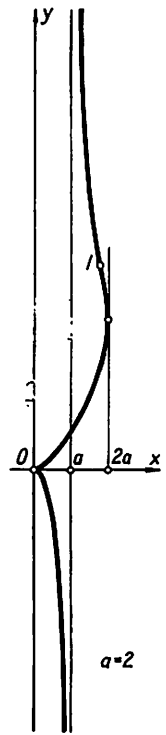


Fig.

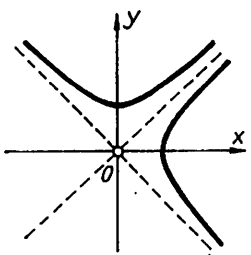


Fig. 264

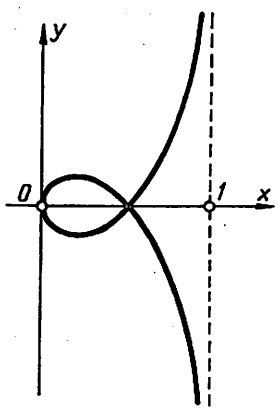


Fig. 265

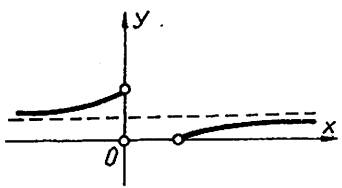


Fig. 266

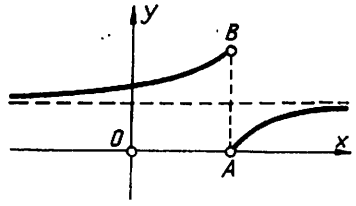


Fig. 267

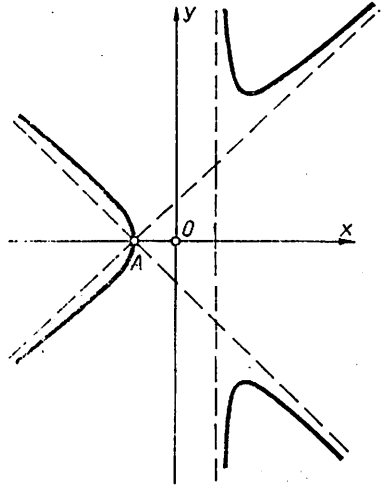


Fig. 270

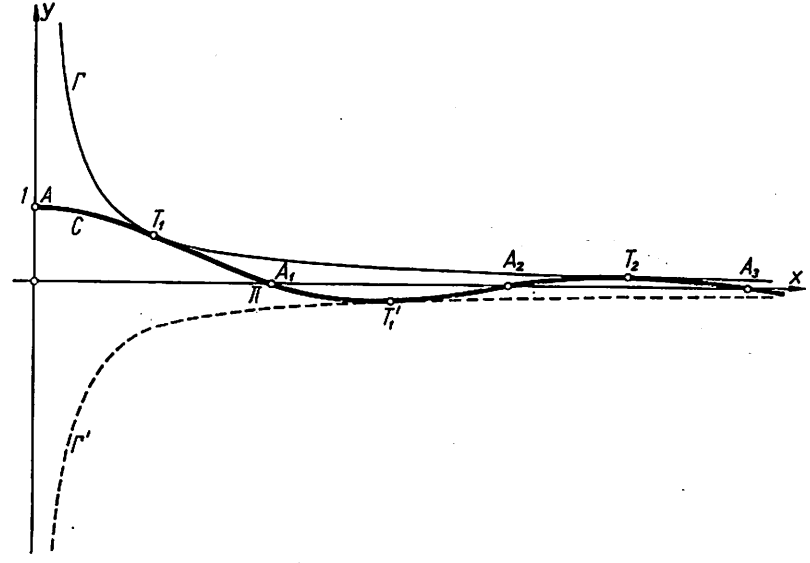


Fig. 268

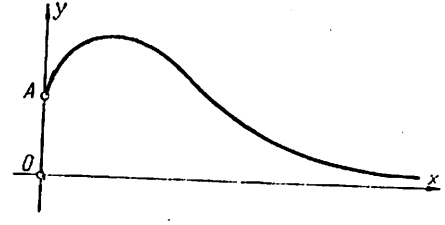


Fig. 269

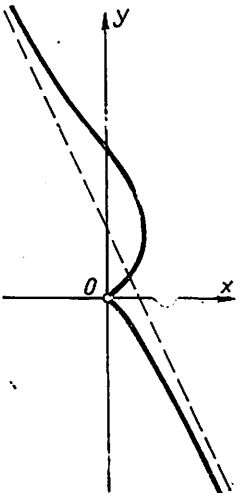


Fig. 271

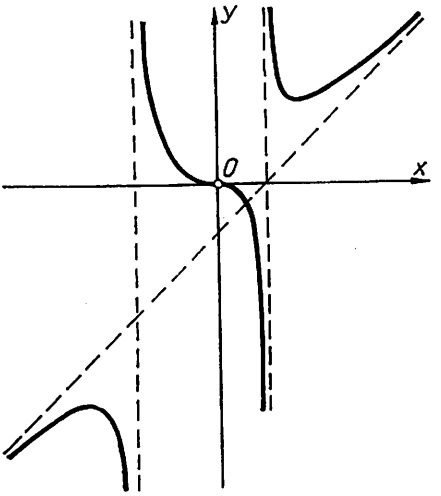


Fig. 272

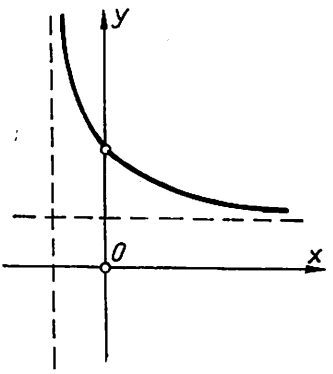


Fig. 273

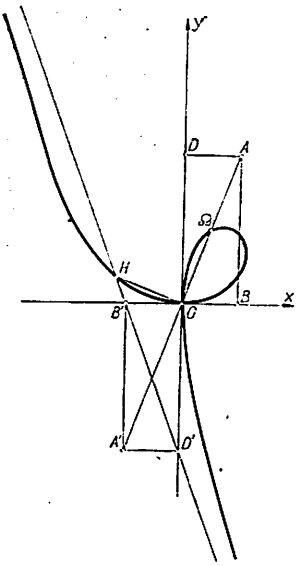


Fig. 275

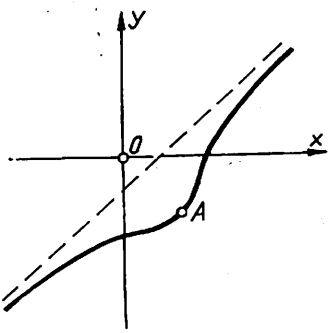


Fig. 274

90 Fie *sinusoida* $C: y=b\sin\frac{x}{a}$ ($a, b\in R$, care pot fi presupuse pozitive). Se cere: a) Să se găsească ecuaţia tangentei în punctele de inflexiune, reprezentîndu-se grafic curba. b) Să se arate că tangentele care conţin un punct P_0 din plan au punctele de contact situate pe o cuartică, admiţînd pe P_0 ca punct dublu.

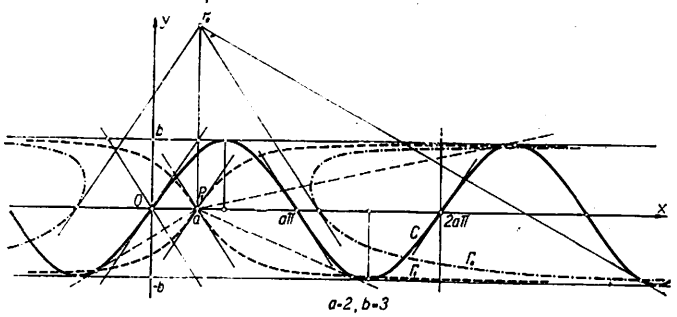


Fig. 276

R. a) Punctele de inflexiune $A_k(ak\pi, 0)$, $k\in Z$; tangenta în A_k e paralelă cu una din dreptele $y=\pm bx/a$ (fig. 276). b) Cuartica $\Gamma: (b^2-y^2)(x-x_0)^2-a^2(y-y_0)^2=0$ sau (translatînd O în P_0) $X^2Y^2+2y_0X^2Y-(b^2-y_0)X^2+a^2Y^2=0$. *Obs.* Cînd $P_0\in Ox$, obţinem *curba punctiformă*.

91 Date fiind o curbă C_0 şi un punct O, dacă M e un punct al unei curbe C, dreapta OM taie pe C_0 în M_0. Pe OM se ia punctul P astfel încît $\overline{M_0P}=\overline{OM}$, adică $\overline{OP}=\overline{OM}_0+\overline{OM}$. Cînd M descrie pe C, locul Γ al lui P se numeşte *nicăida de bază C în raport cu polul O şi directoarea C_0*. Să se studieze punctele multiple şi asimptotele nicăidei Γ atunci cînd C_0 e o dreaptă; în special, cazul cînd C e o curbă unicursală (în particular, cînd C e o dreaptă sau o conică).

R. În reperul polar de pol O şi axă polară Ox, avem (fig. 277)

(157) $\Gamma:\ \rho=\rho_0(\theta)+\varphi(\theta)$ cu $C_0:\ \rho=\rho_0(\theta)$ şi $C:\ \rho=\varphi(\theta)$.

Obs. Dacă pe OM se ia P_1 astfel încît $\overline{M_0P_1}=-\overline{OM}$, adică $\overline{OP_1}=\overline{OM}_0-\overline{OM}$, obţinem nicăida lui C_1 (C_1 fiind simetrica lui C faţă de O):

(157′) $\Gamma_1:\ \rho=\rho_0(\theta)-\varphi(\theta)$;

căci $\overline{OP_1}=\overline{OM}_0+\overline{OM}_1=\overline{OM}_0-\overline{OM}$. Se spune că Γ şi Γ_1 sînt *nicăidele lui C* (de pol O şi directoare C_0), una fiind *complementara* celeilalte. Fie $C_0: a_0x+b_0y+c_0=0$; cu O originea axelor şi $C: x=f(t), y=g(t)$, găsim

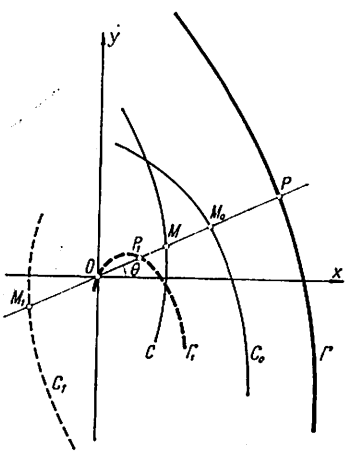


Fig. 277

(158) $$\Gamma: x=\left(1-\frac{c_0}{a_0f+b_0g}\right)f \qquad \left(1-\frac{c_0}{a_0f+b_0g}\right)g;$$

$$\rho=-\frac{c_0}{a_0\cos\theta+b_0\sin\theta}+\varphi(\theta),$$

căci $\varphi(\theta)=\sqrt{f^2+g^2}$. Fie $t_i (i=1,2,\ldots,s)$ rădăcinile ecuaţiei

(158′) $$a_0f(t)+b_0g(t)-c_0=0;$$

dacă $s\geqslant 2$, O *e punct multiplu de ordin s*: *nodal* — cînd t_i sînt rădăcini simple, *cu ramuri cuspidale* — pentru rădăcini multiple, sau *izolat* — pentru rădăcini imaginare. *Obs.* Pot exista şi alte

puncte multiple. Se arată uşor : *a) asimptotele lui C sînt asimptote ale lui* Γ ; b) C_0 *e asimptotă pentru* Γ (luată de r ori, r fiind numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $a_0 f(t) + b_0 g(t) = 0$; căci $m = -a_0/b_0$, $n = -c_0/b_0$). Cînd C e (72), avem

(159) $$x = f_1 (1 - c_0 f_3/(a_0 f_1 + b_0 f_2))/f_3, \; y = f_2 (1 - c_0 f_3/(a_0 f_1 + b_0 f_2))/f_3 ;$$

deci Γ e unicursală de grad $2n$ sau $2n - 1$, după cum $O \notin C$ sau $O \in C$ ($f_i = (\alpha t + \beta)\, \varphi_i$ cu φ_i ($i = 1, 2$) polinoame de grad $n - 1$). Ecuaţia (158′) fiind de grad n, O *e un punct multiplu de ordin*

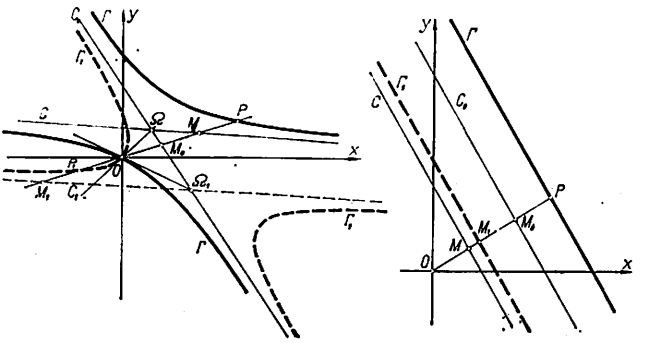


Fig. 278

n *al lui* Γ. Rezultă : *nicăida* Γ_{2n} *are* $\delta = (n - 1)(2n - 1)$ *puncte duble, din care* $n(n - 1)/2$ *sînt în* O *şi alte* $(n - 1)(3n - 2)/2$; *nicăida* Γ_{2n-1} *are* $\delta = (n - 1)(2n - 3)$ *puncte duble,* $n(n - 1)/2$ *fiind în* O *şi alte* $3(n - 1)(n - 2)/2$. Avem şi : Γ *admite (cel mult)* $n + 1$ *asimptote* ; căci C admite (cel mult) n asimptote reale. În particular, *cînd* C *e dreaptă (71),* Γ *e conică* (fig. 278)

160) $$a_0 a x^2 + (a_0 b + b_0 a)\, xy + b_0 b y^2 + (a_0 c + c_0 a)\, x + (b_0 c + c_0 b)\, y = 0.$$

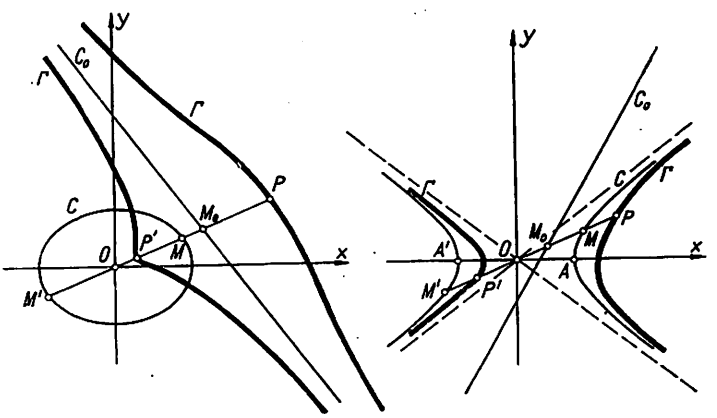


Fig. 279

Cînd C *e conică (61),* deci $O \notin C$, Γ_4 *e cuartică* (fig. 279—281)

161) $$(x^2/a^2 + \varepsilon y^2/b^2)(a_0 x + b_0 y + c_0)^2 = (a_0 x + b_0 y)^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Γ_4 e simetrică faţă de o axă a lui C cînd C_0 e perpendiculară pe acea axă. Din ecuaţia globală a tangentelor în O la Γ_4 : O e punct izolat, cuspidal sau nodal, după cum C_0 e exterioară, tangentă

sau secantă lui C ($\varepsilon a_0^2 a^2 + b_0^2 b^2 - \varepsilon c_0^2 \lessgtr 0$); tangentele în O la Γ_4 unesc pe O cu intersecțiile lui C_0 cu C. *Dacă C e cerc, Γ_4 e concoida lui Nicomede. Dacă* $C: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$ ($O \in C$), Γ_3 *e cubica* (fig. 282—284)

(162) $$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2)(a_0x + b_0y + c_0) + 2(a_{13}x + a_{23}y)(a_0x + b_0y) = 0.$$

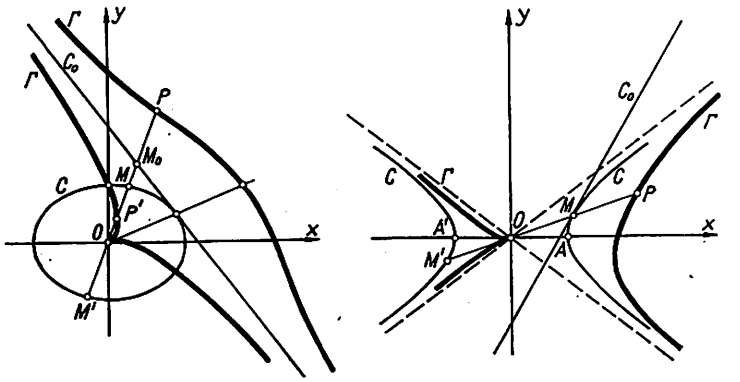


Fig. 280

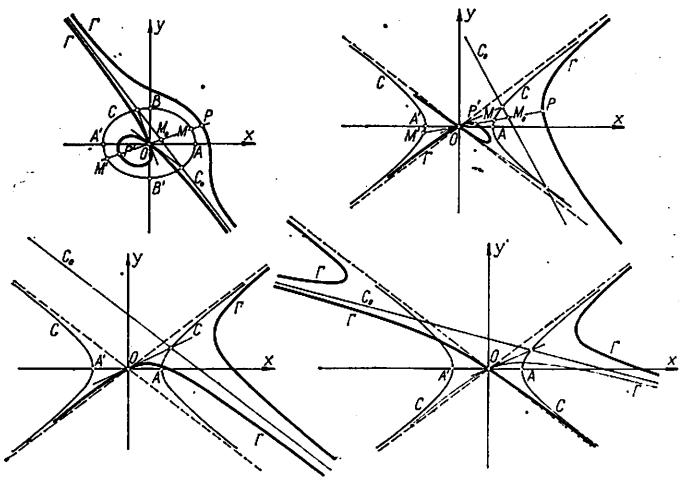


Fig. 281

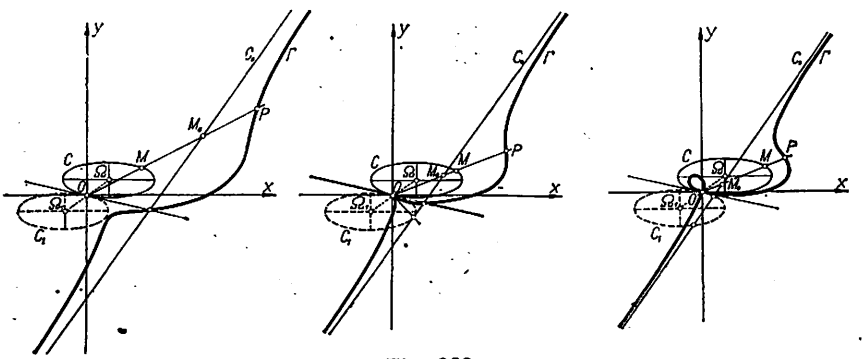


Fig. 282

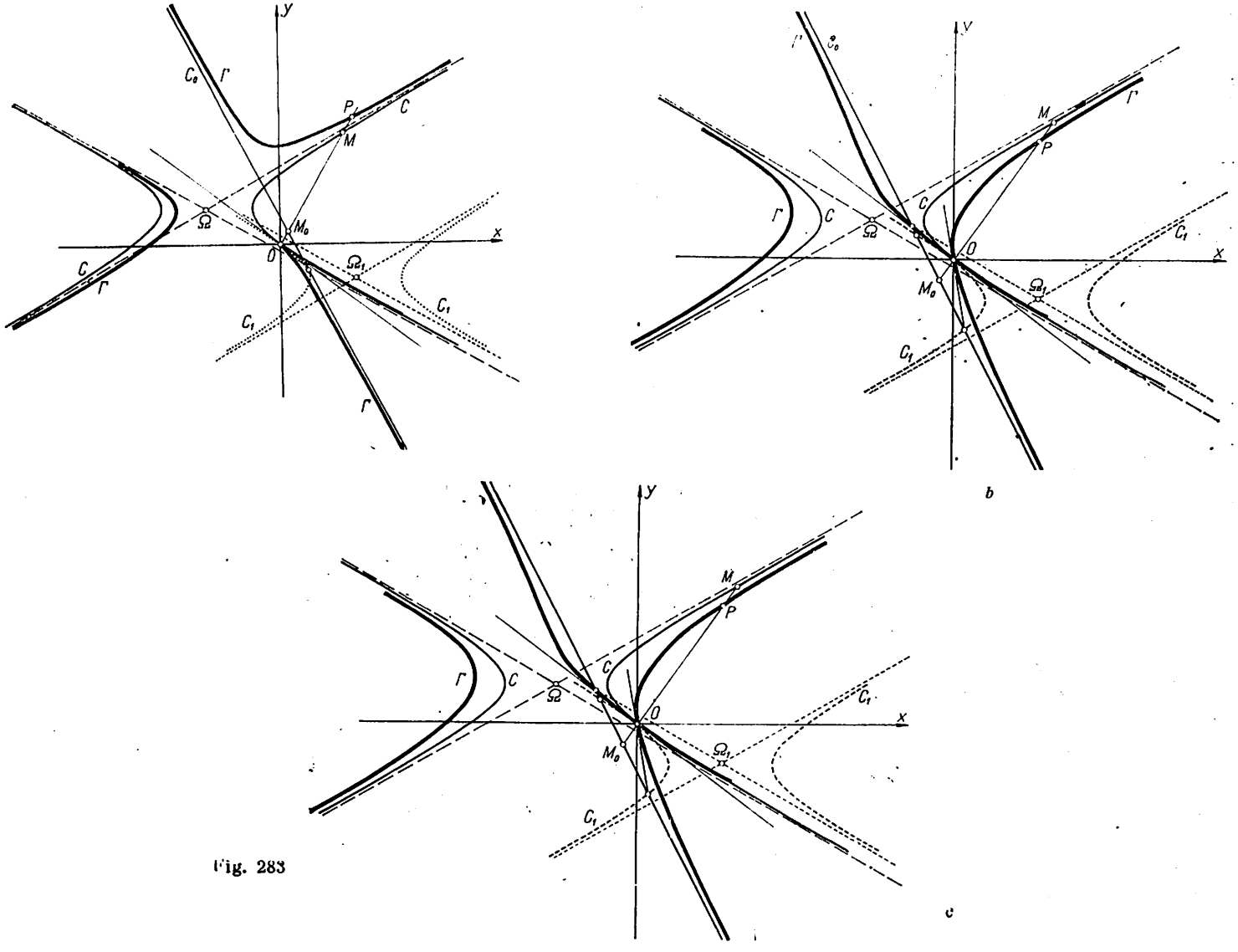


Fig. 283

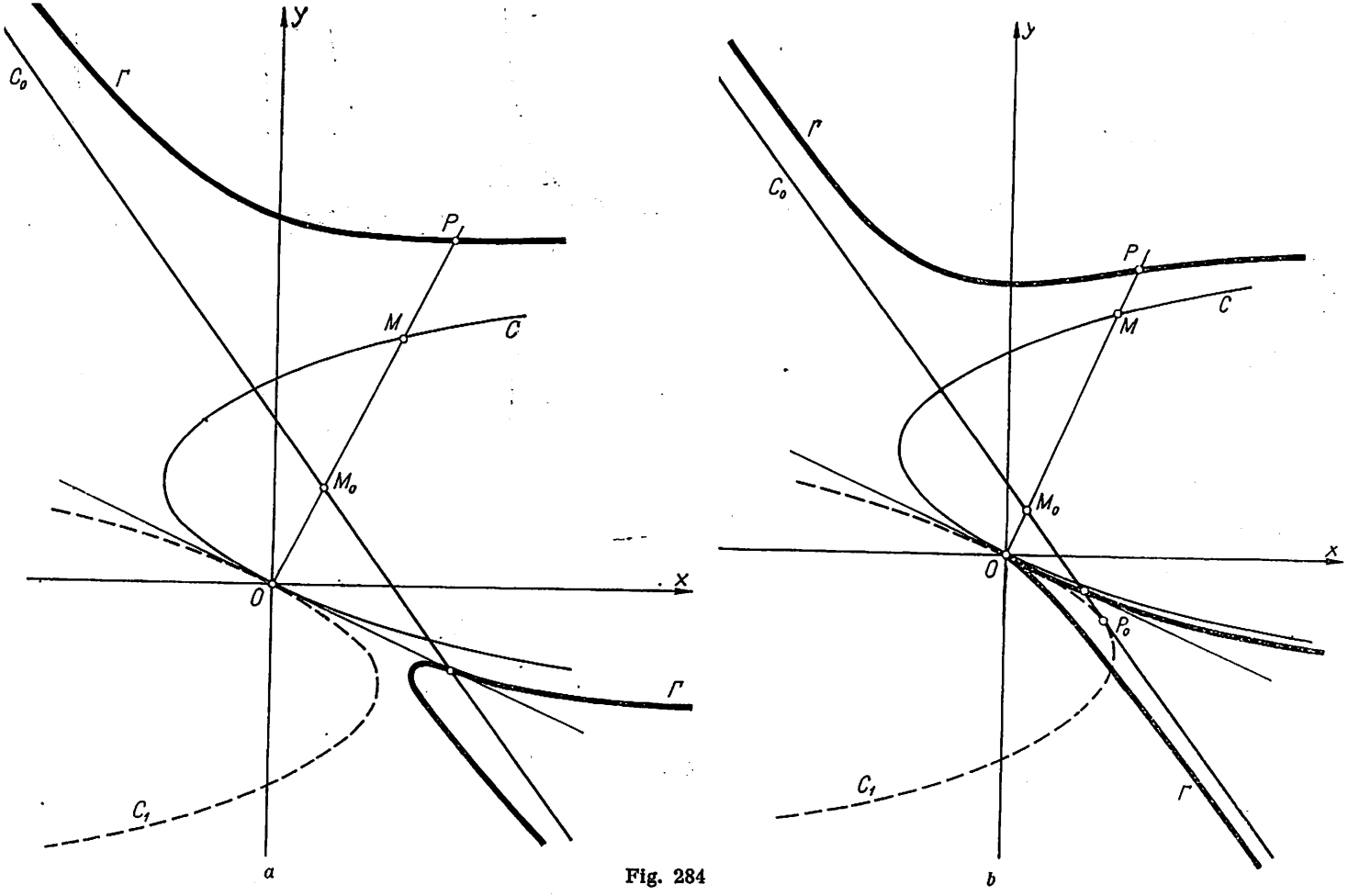


Fig. 284

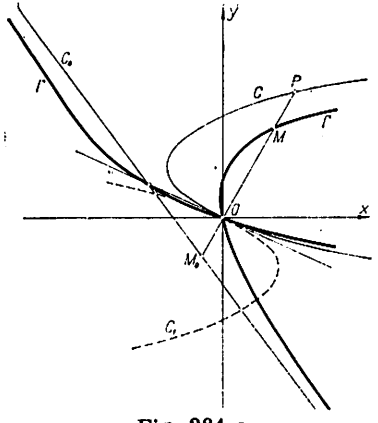


Fig. 284 *c*

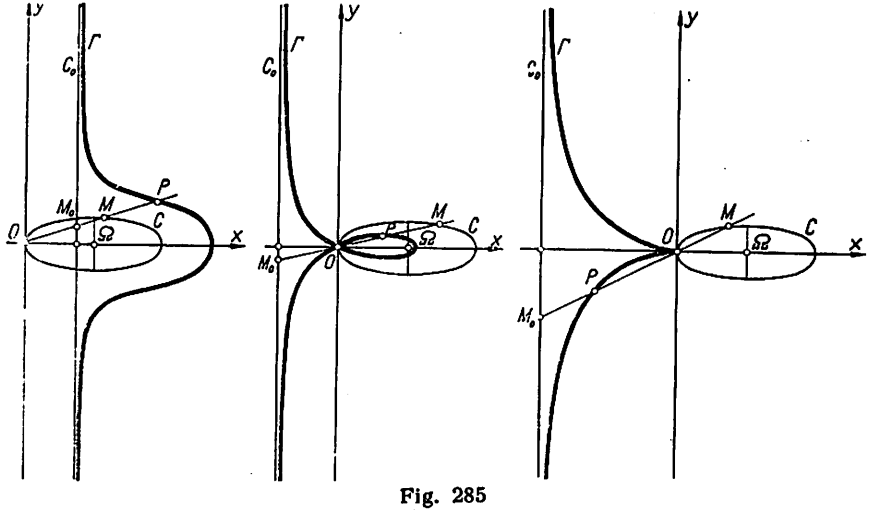


Fig. 285

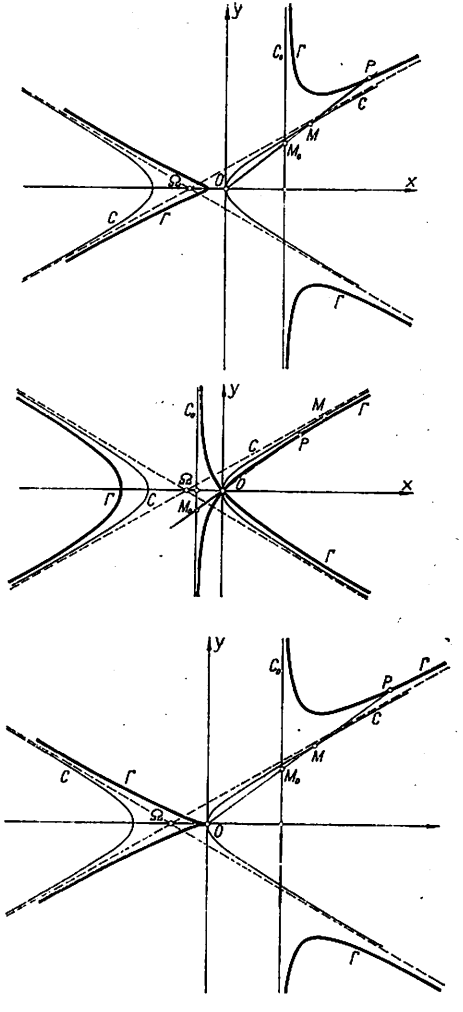


Fig. 286

Fie C_1 simetrica lui C față de O; din ecuația globală a tangentelor în O la Γ_3 : O e punct izolat, cuspidal sau nodal, după cum C_0 e exterioară, tangentă sau secantă lui C_1 : $((a_0a_{23}+b_0a_{13})^2-(c_0a_{11}+2a_0a_{13})(c_0a_{22}+2b_0a_{23})\gtreqless 0$). Tangentele în O la Γ_3 unesc pe O cu intersecțiile lui C_0 cu C_1. Γ_3 e simetrică față de o axă cînd C o admite ca axă cu O vîrf (C are ecuația (91)) iar C_0 e perpendiculară pe acea axă ($C_0 : x = a$); atunci Γ_3 are ecuația (fig. 285—287)

(162′) $(qx^3 - y^2)x + (2p - aq)x + ay^2 = 0$; $x = \dfrac{at^2 - aq + 2p}{t^2 - q}$, $y = \dfrac{(at^2 - aq + 2p)t}{t^2 - q}$.

Cînd C e un cerc ($q = -1$), se obține *curba lui Sluse* (fig. 288)

162″) $(x^2 + y^2)(x - a) - 2px^2 = 0$.

Cînd $a = -2p$ (C_0 e tangentă în A_1, diametralul opus lui O în C_1), Γ_3 e *cisoida* (27); dacă $a = -p$ (C_0 trece prin centrul Ω_1 al lui C_1), Γ_3 e *strofoida* (66); cînd $a = -p/2$ (C_0 trece prin mijlocul razei lui C_1 ce are extremitatea în O), Γ_3 e *trisectoarea* (*trisecanta*) *lui Maclaurin*

(162‴) $x(x^2 + y^2) = r(3x^2 - y^2)$; $\rho = \dfrac{r(4\cos^2\theta - 1)}{\cos\theta}$; $x = \dfrac{r(3 - t^2)}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{rt(3 - t^2)}{1 + t^2}$,

notîndu-se $r = p/2$ ($a = -r$). Curba e simetrică în raport cu Ox, are un nod în O (tangentele fac cu Ox unghiurile $\pi/3$ și $2\pi/3$); n-are puncte de inflexiune la distanță finită (fig. 289). $P_i(t_i) \in \Gamma_3$ ($i = 1, 2, 3$) sînt coliniare dacă $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$. Trisecțiunea unui unghi ascuțit dat se efectuează cu ajutorul centrului Ω ($2r$, 0) al lui C, o latură fiind ΩA : fie $\widehat{A\Omega Q} = \varphi$ (dat) și $\widehat{\Omega OQ} = \theta$; atunci $\theta = \varphi/3$. Alte generări : a) Dacă O, O_1 și O_2 sînt puncte coliniare cu $OO_1 = 3\,O_1O_2$ iar O_1 e interior lui OO_2, pe perpendiculara d în O_1 pe OO_2 se ia N (arbitrar); e locul intersecției P a perpendicularei în N pe O_2N cu paralela prin O la O_2N. O dreaptă prin O_1, diferită de O_1O, taie curba în alte 2 puncte R, R' cu $O_1R \cdot O_1R' = O_1O^2$ (fig. 289 b). b) E podara parabolei $y^2 = 4r(x - 3r)$, de focar O_2 și vîrf O_1, în raport cu O*) (fig. 289 c) c) Dacă C_1 e cercul de rază $2r$, tangent în O la Oy, și dreapta $C_0 : x + r = 0$ intersectînd pe C_1. o dreaptă prin O taie pe C_1 în M_1 și pe C_0 în M_0; e locul lui P astfel ca $\overline{OP} = \overline{M_1M_0}$ (fig. 289 d). *Obs. Cînd C e un cerc*, deci $a_{11} = a_{22}$ în (162), Γ_3 *e o cubică circulară cu punct dublu în O.* Orice astfel de cubică e susceptibilă să fie generată în modul indicat. De exemplu, pentru *ofiurida* (67): $a_{13} = -b/2$, $a_{23} = a/2$ și $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = b$ (fig. 290).

92 Să se afle și să se construiască locul geometric al proiecțiilor vîrfului O al unui unghi drept AOB pe axele parabolelor tangente celor 3 laturi ale triunghiului isoscel AOB.

R. Fie $A(a, 0)$ și $B(0, a)$. Parabolele tangente axelor : $(ux + vy - 1)^2 = 2uvxy$ sînt tangente lui AB dacă ecuația $\left(ux + vy - \dfrac{x + y}{a}\right)^2 = 4uvxy$ are rădăcini egale, adică $u + v = 1/a$. Eliminăm pe u, v între ecuația axei $uf_x = vf_y$ și ecuația perpendicularei prin O pe axă $vx + uy = 0$ (fig. 291; v. și fig. 10) :

(163) $(x^2 + y^2)^2 = a(x + y)(x - y)^2$; $(x^2 + y^2)^2 = 2a\sqrt{2}\,xy^2$, $\rho = 2a\sqrt{2}\sin^2\theta\cos\theta$

cînd locul C e raportat la tangentele în punctul triplu O (bisectoarele lui $\widehat{AOB}$). C e tangentă în A și B ipotenuzei AB. *Soluție geometrică* : Focarul F al unei parabole e pe cercul Γ circumscris triunghiului AOB; proiecțiile sale F' și F'' pe axe dă tangenta în vîrf. Axa parabolei e perpendiculara prin F pe $F'F''$. C e generată de proiecția P a lui F pe OF*, simetrica lui OF față de axe. Cu $O\Omega$ ca axă polară, $C : \rho = OF \sin 2\theta$. *Altă generare* : pe tangenta în O (fix) la cercul Γ se ia M astfel ca triunghiul OFM să fie isoscel cu baza OM ($F \in \Gamma$); C e locul piciorului P al perpendicularei din O pe FM.

---

*) Familia de drepte $NP : rx - \lambda y - 3r^2 + \lambda^2 = 0$, unde λ e ordonata lui N, admite ca înfășurătoare această parabolă.

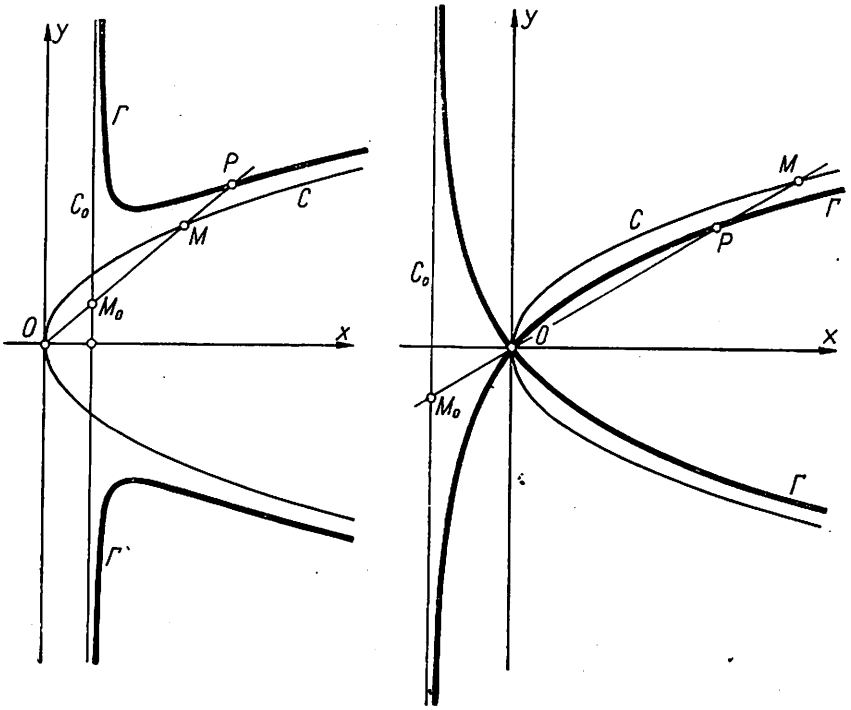


Fig. 287

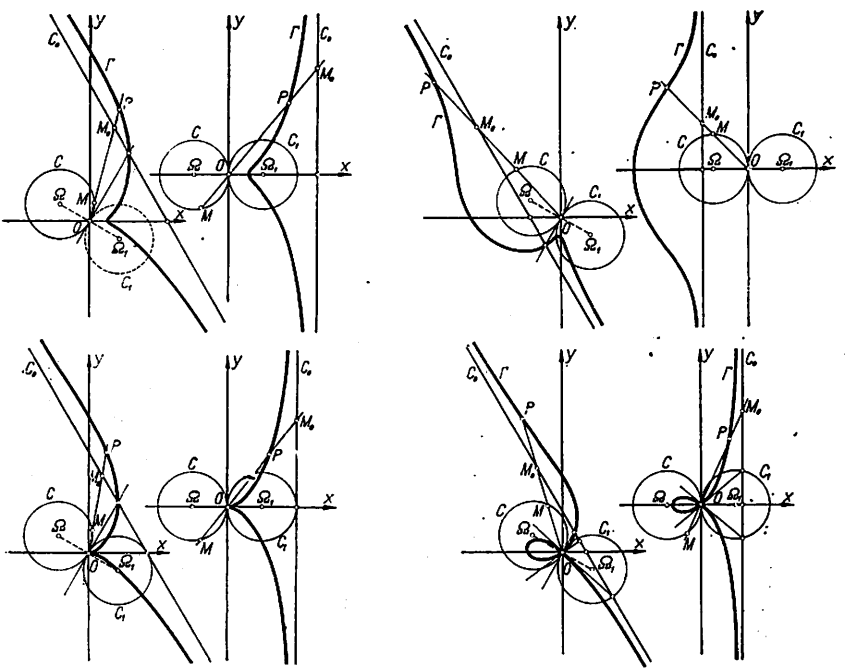


Fig. 288

93 *Cercul* $\Gamma(O\,;\,a)$ se numeşte *cerc asimptotic al curbei* C de ecuaţie (4) cînd C are o infinitate de spire care se înfăşoară în jurul lui Γ, de care se apropie oricît de mult; atunci

$$\lim_{\theta\to\infty}\rho(\theta)=a. \tag{164}$$

Dacă $a=0$, atunci $\Gamma=0$, polul O fiind un *punct asimptotic* al lui C.

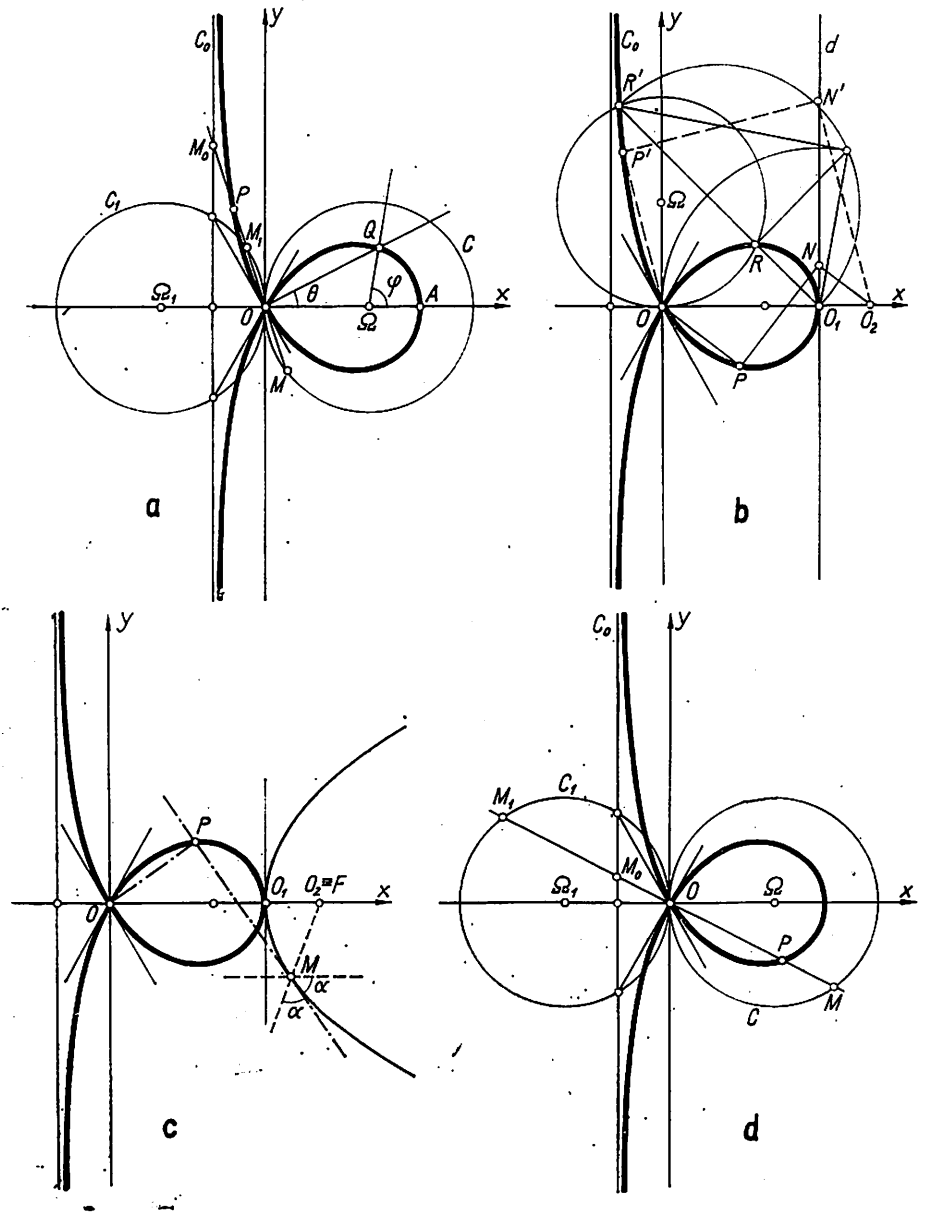


Fig. 289

Să se determine punctele şi cercurile asimptotice ale curbei C : a) spirala logaritmică (44) ; b) spirala hiperbolică (39) ; c) $\rho = a\theta/(\theta - 1)$, $a>0$; d) $\rho = (3\pi + \theta)/(\pi - \theta)$; e) tractricea polară (56) ; f) concoida spiralei hiperbolice $\rho = l + a/\theta$; g) spirala eituus (41).

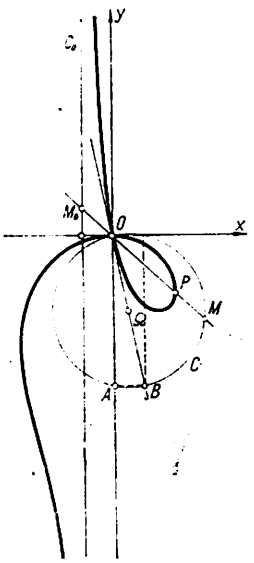


Fig. 290

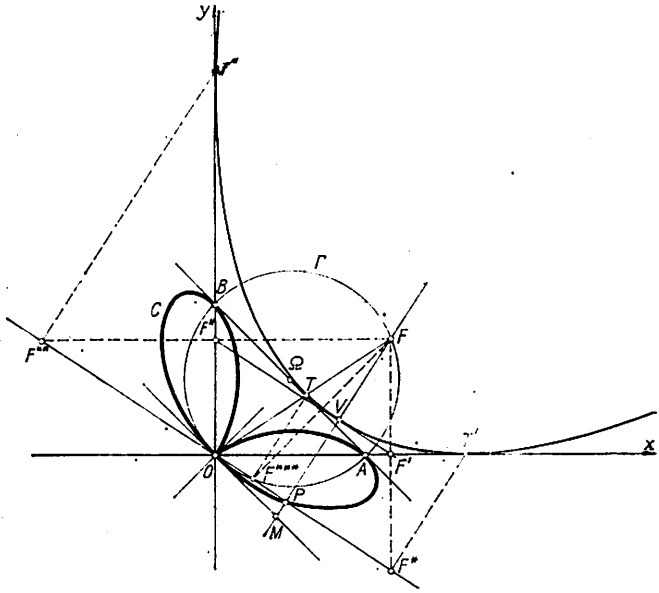


Fig .291

R. *a*, *b* şi e) : O e punct asimptotic. c) $\Gamma(O\,;\,a)$ e cerc asimptotic (fig. 292 ; $\rho \geqslant 0$ cînd $\theta \in (-\infty\ 0] \cup [1, \infty)$: C e linia plină). d) Deoarece $\rho \geqslant 0$ cînd $\theta \in [-3\pi, \pi]$, C n-are cerc asimptotic (v. fig. 67 ; C e linia plină). Cînd $\theta \in R$, $\Gamma\ (0\,;\,1)$ e cerc asimptotic. f) $\Gamma\ (O\,;\,l)$ e cerc asimptotic, $y = a$ e asimptotă (fig. 293). g) O e punct asimptotic ; axa Ox e o asimptotă.

94 Să se construiască graficul curbei Γ : a) $x = \sqrt{1 - t^2}$, $y = t^3 - t$, $t \in [-1, 1]$; b) $x = (t^2 - 1)/t$, $y = (3t+1)/t(t-1)$; c) $x = \ln \sin t - 2 \sin t$, $y = \sin 2t$, $t \in (0, \pi)$; d) $x = -2a\,(\cos^2 t + 1)\sin t$, $y = 2a \sin^2 t \cos t$; e) $x = te^{t^2}$, $y = te^{-t^2}$; f) $x = t(3 - t^2)$, $y = 3t^2$; g) $x = \dfrac{2a}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t e^{-t^2} dt$, $y = be^{-t^2}$; h) $(y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 1) = 0$; i) $x^4(x+1) - y^2 = 0$; j) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$; k) $(y^2 - x - 1)^2 (x - 1) = x^3$; l) $x^2y^2 + x - 2y = 0$; m) $x^5y^7 - y^4 + x^3 = 0$; n) $x^2y^2 - 4(x^3 + y^3) + 18xy - 27 = 0$; o) $16\,(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a^2)^2 = 0$; p) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$; q) $(y - x^2)^2 (x^2 + 1) + x^2 - a^2 = 0$; r) $x^3y^2 - xy^4 + x^3 + y = 0$; s) $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$; ş) $(x^2 + y^2 - 6x)^2 = x^2 + y^2$; t) $\rho = 1/\sqrt{2 + \sin 4\theta}$; ţ) $\rho = a\,|\sin 3\theta|\ (a>0)$; u) $\rho = 1/\sqrt{1 + \sin 4\theta}$; v) $\rho = 3\theta/(3\theta - \pi)$; w) $9a/\rho = 5 + 4\cos\dfrac{3\theta}{2}$; x) $\theta = \operatorname{arctg}(\rho - 1)^2$; y) $\rho = \dfrac{2h}{\sin\theta \sin 2\theta}$; z) $\rho = t(2 - t)$, $\theta = -\dfrac{\pi}{2}(t^3 + t^2 - 5t + 2)$.

R. a) $x\,(\pm 1) = y\,(\pm 1) = 0$: Γ e o curbă închisă $x'\,(t) = 0$ pentru $t = 0$ iar $A\,(1, 0)$ e un vîrf, $y'\,(t) = 0$ pentru $t = \pm 1/\sqrt{3}$ iar $B(\sqrt{2/3}, 2/3\sqrt{3})$ e un maxim şi $B'\,(\sqrt{2/3}, -2/3\sqrt{3})$ e un minim. $d^2y/dx^2 = 0$ pentru $t = \pm \sqrt{1 + \sqrt{11/3}/2} = \pm\,\alpha$ iar $C(t = -\alpha)$ şi $C'(t = \alpha)$ sînt puncte de inflexiune (tabela 8, fig. 294). b) $I = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. $t^2 - tx - 1 = 0$, $t^2y - t\,(y +$

Tabela 8 :

t	-1		$-\alpha$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		α		1
x'	|	+		+		+	0	−		−		−	|
y'		+		+	0	−		−	0	+		+	
$\frac{dy}{dx}$	0	+		+	0	−	−∞ | +∞	+	0	−		−	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	|	+	0	−		−	|	+		+	0	−	|
x	0	↗	$\frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{\frac{11}{3}}}$	↗	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	1	↘	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	↘	$\frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{\frac{11}{3}}}$	↘	0
y	0	↗	$\frac{(9-\sqrt{33})\alpha}{12}$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0	↗	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$-\frac{(9-\sqrt{33})\alpha}{12}$	↗	0
	O		C		B		A		B′		C′		O

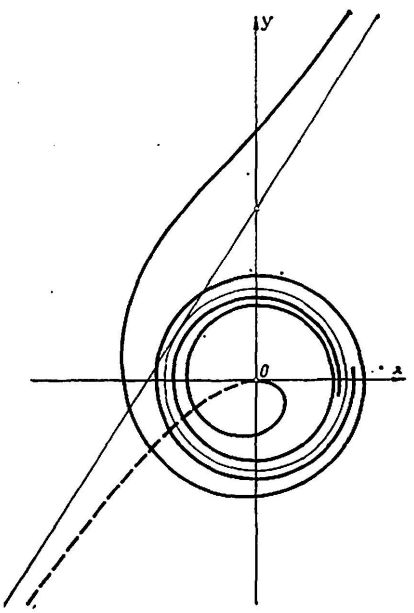


Fig. 292

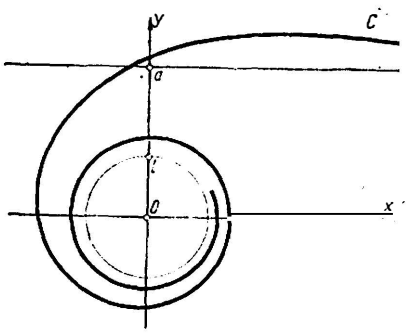


Fig. 293

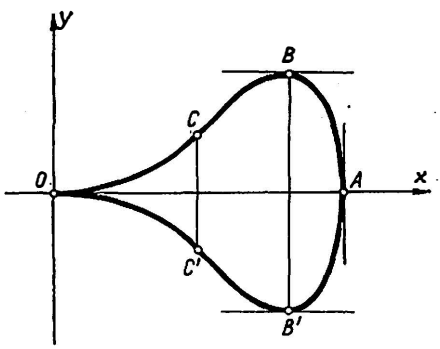


Fig. 294

+ 3) − 1 = 0 au aceleaşi rădăcini (t' şi t'') dacă $y = (y + 3)/x = 1$; nodul $A\,(4, 1)$. $d^2y/dx^2 = 0$ pentru $t = -1{,}95$. Asimptote : $x = 0$, $y = 0$, $x - y - 4 = 0$, ultima tăind pe Γ în $E\,(t = 5) = (24/5, 4/5)$; (v. tabela 9, fig. 295). c) Γ e simetrică faţă de Ox : $x(t) = x(\pi - t)$ şi $y(t) = -y(\pi - t)$. Ox e asimptotă la ramurile $t \to 0$ şi $t \to \pi$ (tabela 10, fig. 296). d) $x'(\alpha) = y'(\alpha) = 0$: Γ are puncte singulare (tabela 11, fig. 297). e) Tabela 12 şi fig. 298. f) Tabela 13 şi fig. 299. g) $t \in R$.

Tabela 9:

t	$-\infty$		$-1{,}95$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-1{,}43$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-0{,}84$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
			C		B_1		D				B_2				

Tabela 10:

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
x'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$-$	0	$+$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$-$	0	$+$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$-$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\sqrt{2}-\ln\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\sqrt{2}-\ln\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0
			B_1		C_1		A		C_2		B_2		

Tabela 11:

t	0		$\alpha\left(\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
x'		$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dx}$	0	$-$	$-\sqrt{2}$	$-$	$-$
x	0	$\searrow$	$-\frac{8a\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	$-2a$
y	0	$\nearrow$	$\frac{4a\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0
	O		A		B

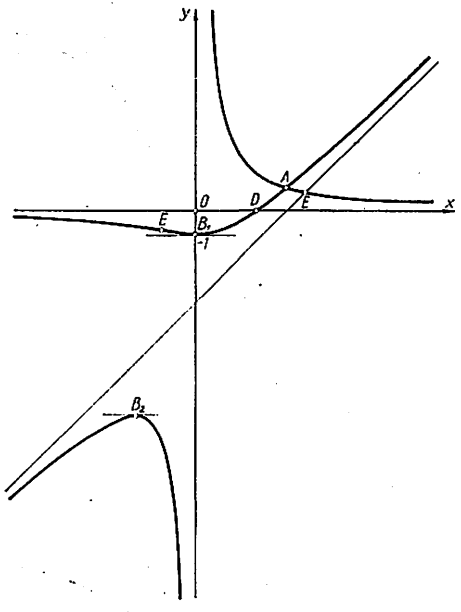


Fig. 295

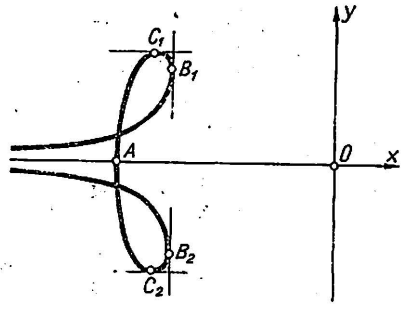


Fig. 296

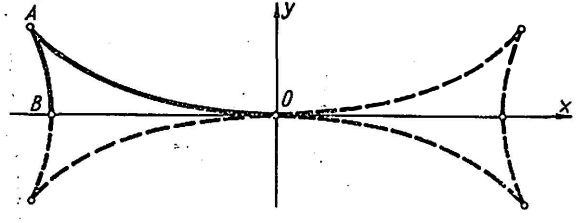


Fig. 297

Tabela 12 :

t	$-\infty$		$-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$		$+\infty$
x'	$+$		$+$			$+$	$+$		$+$		$+$		
y'	$-$		$-$		0	$+$	$+$	0	$-$		$-$		
$\frac{dy}{dx}$	$-$		$-$		0	$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	0	$+$			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}e^{\sqrt{3/4}}$	$\nearrow$	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}e^{\sqrt{3/4}}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}e^{-\sqrt{3/4}}$	$\searrow$	$\frac{-1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}e^{-\sqrt{3/4}}$	$\searrow$	0
			I'		A'		O		A		I		

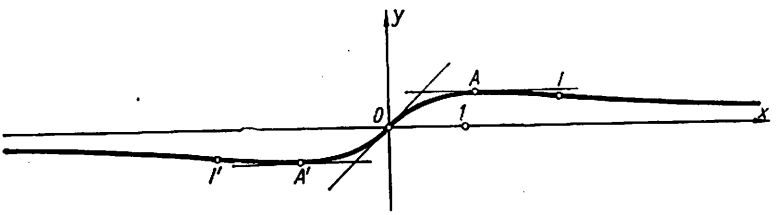


Fig. 298

Tabela 13

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		
y'	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$\frac{dy}{dx}$	$+$		$+$		$-$	0	$+$		$-$		$-$		
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	9	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$
			A		B'		O		B		A		

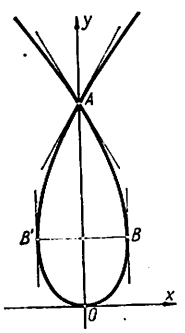


Fig. 299

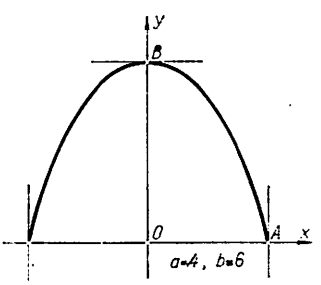


Fig. 300

$A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$ — puncte de oprire; $\Gamma \cap Oy = B(0, b)$. Curba transcendentă Γ se numeşte *ogivă* (fig. 300). h) Explicitată în y : $y = \pm\sqrt{x+1} \pm \sqrt{x-1}$; $I = [1, \infty)$. Γ fiind simetrică faţă de Ox, construim arcele $y_1 = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ şi $y_2 = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} y_1 = \infty$, $y_1' = y_1/2\sqrt{x^2-1} > 0$, $y_1'' < 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} y_2 = 0$, $y_2' = -y_2/2\sqrt{x^2-1} < 0$, $y_2'' > 0$ (fig. 301). Din explicitarea în x: parabola $x_0 = y^2/4$ e o *curbă asimptotă* a lui Γ. i) O e tacnod. Se explicitează în y. $|y|_{\max}$ pentru $5x + 4 = 0$ (fig. 302). j) Γ e definită de o funcţie periodică de perioadă $\omega = 2\pi$; y_{extrem} pentru $x = k\pi/2$ şi $x = (4h+1)\pi/4$; puncte de inflexiune pentru $x = (4h+3)\pi/4$ şi $x = \operatorname{arc\,tg}((3 \pm \sqrt{5})/2) + k_{1,2}\pi$. Fie $I_1 = [-\pi, \pi]$; deci $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ şi $h \in \{-1, 0\}$, încît $y_{\max}$ pentru $x = -3\pi/2, 0, \pi/2$, $y_{\min}$ pentru $x = -\pi, -\pi/2, \pi/4, \pi$; pentru $x = -\pi/4, 3\pi/2$ se obţin puncte de inflexiune (fig. 303). k) $A(0, 1)$ şi $A'(0, -1)$ — puncte de întoarcere de prima speţă, pantele tangentelor duble: $m = 1/2$ şi $m' = -1/2$. Asimptote: $x = 1$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Minim: $B(4/3, \sqrt{5})$, maxim: $B'(4/3, -\sqrt{5})$. Ox taie pe Γ în $C((1+\sqrt{5})/2, 0)$ şi $C'((1-\sqrt{5})/2, 0)$ (fig. 304). l) Asimptote: $x = 0$ şi $y = 0$. Tangenta e paralelă cu Ox în $A(-2, -1/2)$ şi cu Oy în $B(1, 1)$; tangenta în O: $x - 2y = 0$ (fig. 305). m) Din $F(x, y) = 0$, definind pe y ca funcţie de x, avem $F_y(x, y) = y^3(7x^5y^3 - 4)$ şi $F_y(x, y) = 0$ cînd $y = 0$ sau $y = \sqrt[3]{4/7x^5} = \alpha$. În tabela 14, $\beta = F(x, \alpha) = (7^2x^9\sqrt[3]{7x^2} - 3 \cdot 2^2\sqrt[3]{4})/7^2x^6\sqrt[3]{7x^2} \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$ după cum $0 < x < 0$, $x = 0$ sau $x > a$ cu $a = \sqrt[29]{3^3 4^4/7^7}$. Deci, ecuaţia în y are: o rădăcină negativă cînd $x < 0$; rădăcinile $y = 0$ (de 4 ori) şi $y = \infty$ (de 3 ori) pentru $x = 0$; o rădăcină negativă şi 2 rădăcini pozitive cînd $0 < x < a$; o rădăcină negativă şi

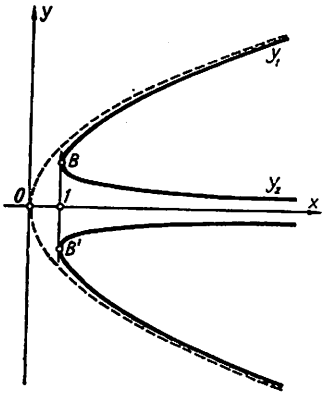


Fig. 301

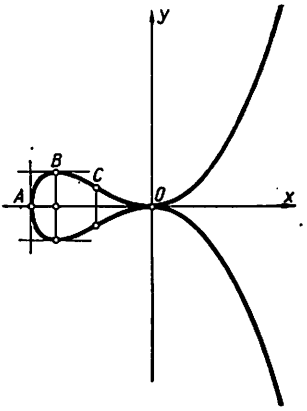


Fig. 302

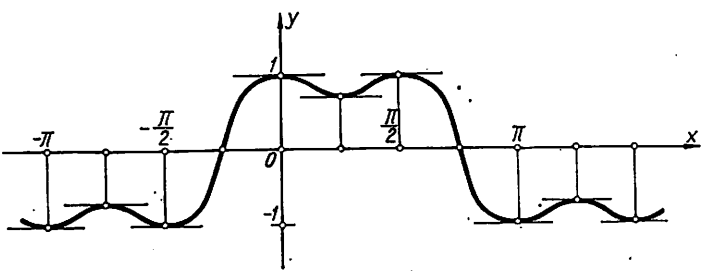


Fig. 303

Tabela 14

$x<0$, y	$-\infty$	α	0	$+\infty$	$x>0$, y	$-\infty$	0	α	$+\infty$
F_y		0	0		şi F_y		0	0	
sign F	$+\infty$	$-$	$-$	$-\infty$	sign F	$-\infty$	$+$	β	$+\infty$

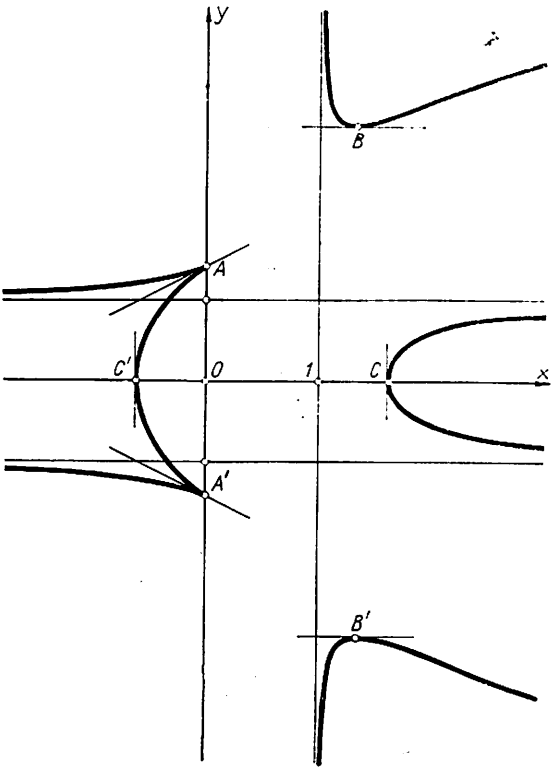


Fig. 304

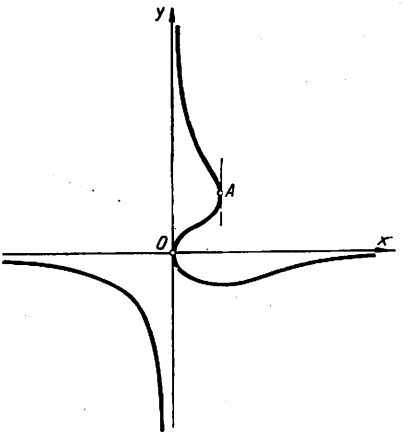


Fig. 306

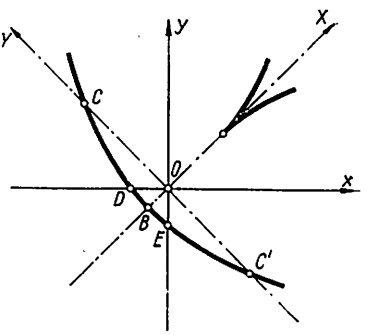


Fig. 307

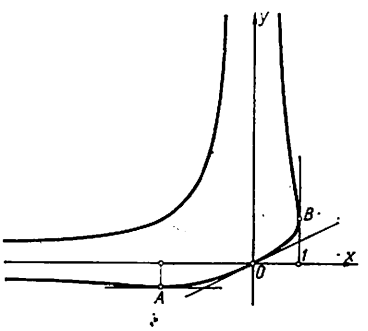


Fig. 305

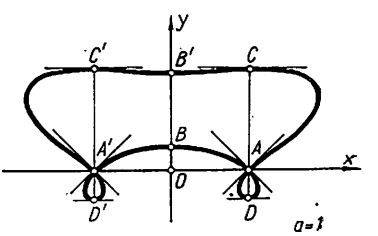


Fig. 308

o rădăcină pozitivă dublă ($b = \sqrt[3]{4\sqrt{7a^5}}$) cînd $x = a$; o rădăcină negativă dacă $x > a$ (fig. 306). Asimptote: Ox și Oy. Tangenta în A (a, b) e paralelă cu Oy. n) A (3, 3) e punct cuspidal, cu tangenta (prima bisectoare) axă de simetrie, ce retaie pe Γ în B $(-1, -1)$. A doua bisectoare taie pe Γ în C $(-4, 4; 4, 4)$ și C' $(4, 4; -4, 4)$. În $D(-3\sqrt[3]{4}, 0)$ și E $(0, -3\sqrt[3]{4})$, Γ e tăiată de Ox și Oy (fig. 307). o) $a(1 - \sqrt{3}) \leqslant y \leqslant a(1 + \sqrt{3})$. A $(2a, 0)$ și $A'(-2a, 0)$ sînt noduri, cu tangentele de pantă $\pm 1/\sqrt{2}$. Oy taie pe Γ în B și B'; C $(2a, a(1 + \sqrt{3}))$ și C' $(-2a, a(1 + \sqrt{3}))$ — maxime, iar D $(2a, a(1 - \sqrt{3}))$ și D' $(-2a, a(1 - \sqrt{3}))$ — minime (fig. 308). *Obs.* Ordonatele lui B și B' sînt ordonatele intersecțiilor P și P' ale curbelor $\Gamma: x = y^2 - 2ay - 2a^2$ și $\Gamma_2: xy^2 + a^4 = 0$; pentru $a = 1$ (fig. 309): P $(-2, 7; 0{,}59)$ și P' $(-1{,}5; 2{,}69)$. p) O e punct triplu. Asimptote: $8y = 1 \pm 4x\sqrt{2}$. Tangente paralele cu Ox în O, A $(1, 1)$ și A' $(-1, 1)$, iar cu Oy în B $(\sqrt{27/32}, 9/8)$ și B' $(-\sqrt{27/32}, 9/8)$. Parabolă asimptotă: $y = 2x^2 - 1/4$ (fig. 310). q) Se explicitează în y (fig. 311); găsim A $(0, a)$, A' $(0, -a)$, B (a, a^2) și B' $(-a, a^2)$. r) Tangenta paralelă cu Ox în O,

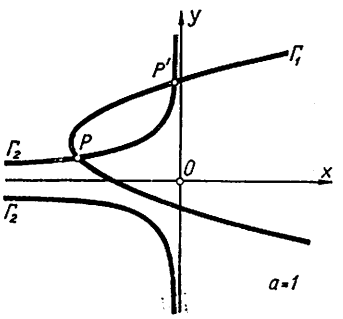


Fig. 309

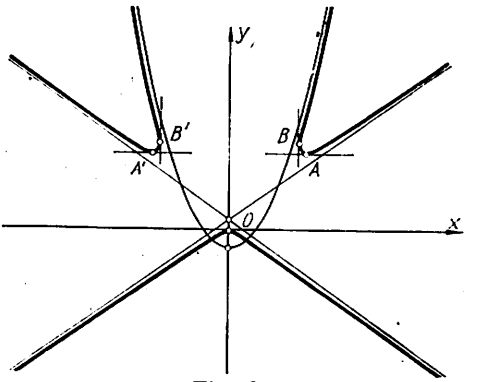
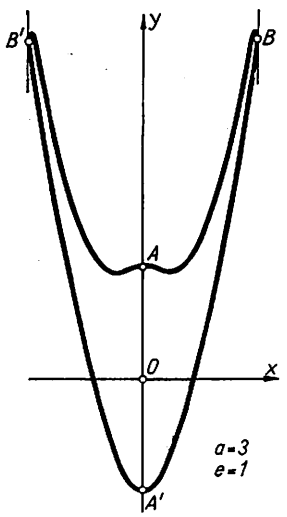


Fig. 310



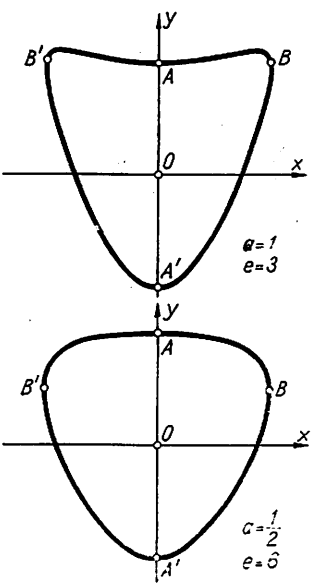


Fig. 311

$A\,(0,6;1{,}3)$ şi $A'\,(-0,6;\ -1,3)$. Asimptote : $x=0$, $y=\pm x$ (fig. 312). Forma curbei se poate determina prin *metoda regiunilor* : Scriem $x^3\,(y^2+1)=y\,(xy^3-1)$. Deoarece $x^2\,(y^3+1)>0$, considerăm numai curbele Ox, Oy şi $\Gamma_1 : xy^3-1=0$; regiunea delimitată de ele (haşurată oblic) e interzisă lui Γ, căci în regiunea dintre ramurile lui Γ_1 avem $\Gamma_1(P)<0$. Scriind $xy^2\,(y^2-x^2)=y+x^3$, fie curbele Oy, $\Gamma_2 : y^2-x^2=0$ şi $\Gamma_3 : y+x^3=0$; avem $\Gamma_2(P)\gtrless 0$ după cum P se

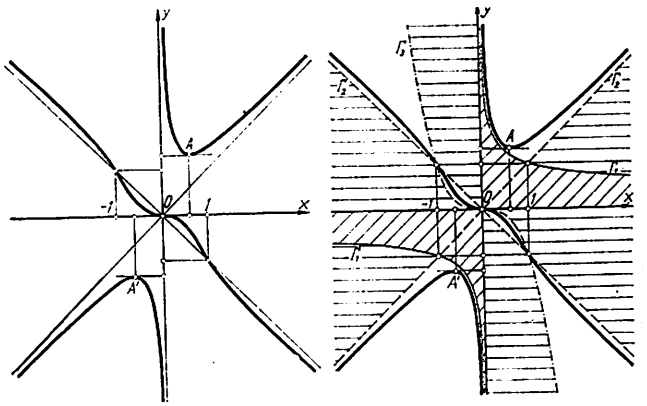


Fig. 312

găseşte sau nu în unghiul dintre bisectoare care conţine pe Oy, iar $\Gamma_3(P)\gtrless 0$ după cum P se găseşte deasupra sau dedesuptul lui Γ_3, încît regiunea haşurată orizontal e interzisă lui Γ. Se ţine seama de poziţia ramurilor faţă de asimptote. s) $A_{1,2}(\pm 2,0)$ — noduri (fig. 313). Tangente paralele cu Ox în $B_{1,2}(0,\pm\sqrt{2})$, $B_{3,4}(0,\pm 2\sqrt{2})$, $B_{5-8}(\pm 2,\pm\sqrt{10})$ iar cu Oy în $C_{1-4}(\pm 3,\pm\sqrt{5})$. ş) O e nod cu tangentele $y=\pm\sqrt{35}\,x$ (fig. 314). Tangente paralele cu Ox în $A_{1,2}$ $(21/8,\pm 7\sqrt{7}/8)$ şi $A_{3,4}(10/3,\pm 5\sqrt{5}/3)$, iar cu Oy în $B_1(5,0)$ şi $B_2(7,0)$. t) $I=(-\infty,\infty)$. Funcţia $\rho(\theta)$ e periodică cu perioada $\pi/2$. Fie $I_1=[0,\pi/2]$ (tabela 15); în $A,\cdots,E$ avem $\operatorname{tg} V=$

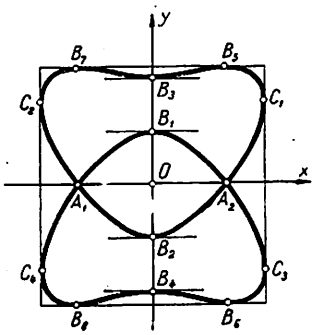


Fig. 313

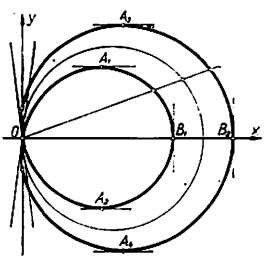


Fig. 314

Tabela 15

θ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
ρ	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
	A		B		C		D		E

$=-1,0,1,0,1$ (v. fig. 315). ţ) $I \in R$; $\rho(\theta)$ e periodică cu $\omega=\pi/3$. Fie $I_1=[0,\pi/3]$, cînd $\rho(\theta)=a \sin 3\theta$ şi din al cărui grafic rotit cu $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, respectiv cu $5\pi/3$ se obţine graficul lui Γ (fig. 316). u) $\rho(\theta)$ nu-i definită pentru $\theta=-\pi/8+k\pi/2$; e periodică cu $\omega=\pi/2$. Fie $\theta \in (-\pi/8, 3\pi/2)$. Asimptote: $y=x\,\mathrm{tg}(-\pi/8)+1/\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ (ramura spre $-\pi/8$) şi $y=x\,\mathrm{tg}(3\pi/2)-(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1})/2\sqrt[4]{2}$ (ramura spre $3\pi/2$) (tabela 16); prin rotaţii de $\pi/2$, π şi $3\pi/2$, obţinem graficul

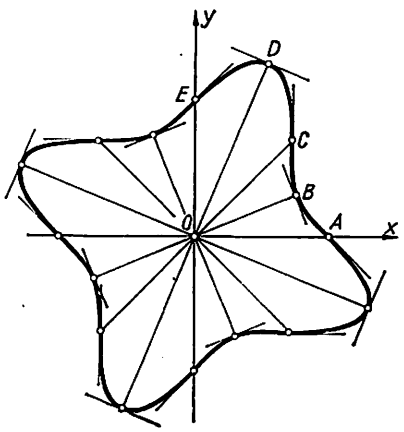


Fig. 315

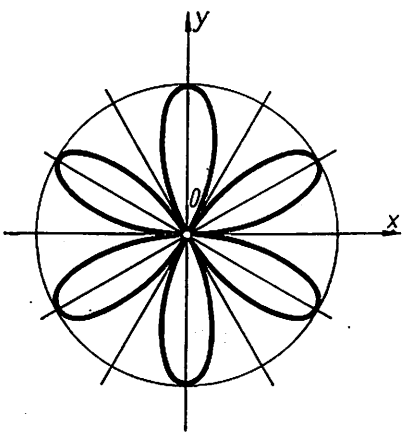


Fig. 316

Tabela 16

θ	$-\frac{\pi}{8}$		0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$
ρ'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
ρ	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
			A (1,0)		B		$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$		

lui Γ (fig. 317). v) Asimptotă: $\rho \sin(\theta-\pi/3)=\pi/3$. Cercul asimptotic γ $(0;1)$ taie pe Γ în A $(-1, \pi/6)$. Ecuaţia $3\theta^3-\pi\theta^2-2\pi=0$ dă un punct de inflexiune B ($\sim$2,5; $\sim$111°). Punctele duble se determină prin condiţia $3\theta/(3\theta-\pi)=-3(\theta+(2k+1)\pi)/[3(\theta+(2k+1)\pi)-\pi]$, adică $\theta=-2(3k+1)\pi/6\pm\sqrt{9(2k+1)^2+1}$ iar $\rho=-1/3(2k+1)\mp 1/\sqrt{1+9(2k+1)^2}$; cînd $k\to\pm\infty$, punctele duble tind către γ, iar pentru $k=0$ se obţin punctele duble $A_0(-(1+\sqrt{10})/3, -(2-\sqrt{10})\pi/6)$ şi $A_0'((-1+\sqrt{10})/3, -(2+\sqrt{10})\pi/6)$; (fig. 318). w) $\rho(\theta)$ are perioada $\omega=4\pi$. Graficul (fig. 319) se deduce prin două rotaţii succesive de $4\pi/3$ ale arcului $\theta \in [0, 4\pi/3]$ (tabela 17). x) $I=[0,\infty)$ cu $\rho \geqslant 0$. Tangenta în O (punct de oprire): $\theta=\pi/4$, iar în A $(\rho=1)$: $\theta=0$; căci $\mathrm{tg}\,V(0)=\rho\theta'/\rho'|_{\rho=0}=0$ şi $\mathrm{tg}\,V(1)=0$. Asimptotă: $x=0$, căci $\lim\limits_{\rho\to\infty}\theta(\rho)=\pi/2$ iar $x=\lim\limits_{\rho\to\infty}\cos\theta(\rho)=0$ (tabela 18, fig. 320). y) $\Gamma: y^2x=a^2(x^2+y^2)$ cu $h=a^2$; O e punct dublu izolat, asimptotă: $x=a^2$ (fig. 321). Explicitată în y, deducem $I=(a^2,\infty)$; tangenta e paralelă cu Ox în $A(2a^2, 2a^2)$ şi $A'(2a^2, -2a^2)$. z) $I=[0,2]$ cu $\varphi \geqslant 0$ (tabela 19, fig. 322; găsim $\mathrm{tg}V(0)=\rho(0)\,\theta'(0)/\rho'(0)=0$, $\lim\limits_{t\to 1}\mathrm{tg}V(t)=2$, $\mathrm{tg}\,V(2)=0$; deci tangenta în O: $\theta=-\pi$ pentru $t=0$ şi $\theta=0$ pentru $=2$, iar panta ei în A: $\mathrm{tg}(V(2)+\theta)=-1/2\pi$.

95 Fie cubica $\Gamma: y^3-x^2-3xy+y^2-3x+6y=0$. Se cere: a) O reprezentare parametrică a curbei. b) Găsirea coordonatelor celuilalt punct în care tangenta în O la Γ o retaie. c) Graficul curbei Γ.

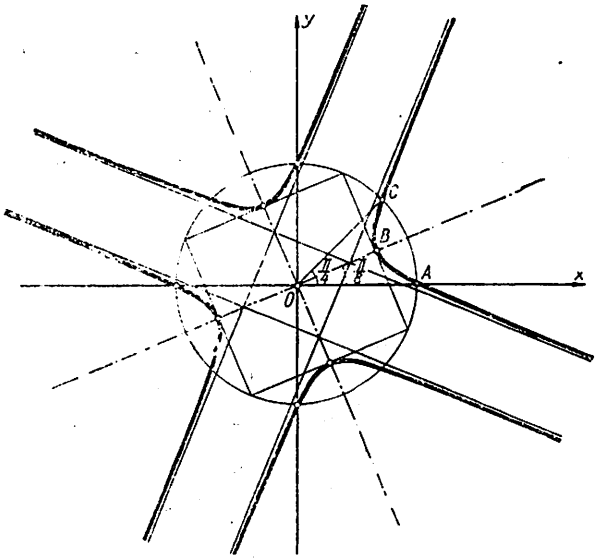


Fig. 317

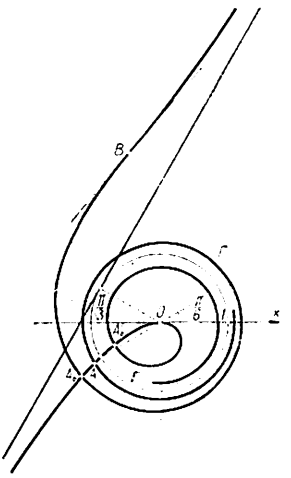
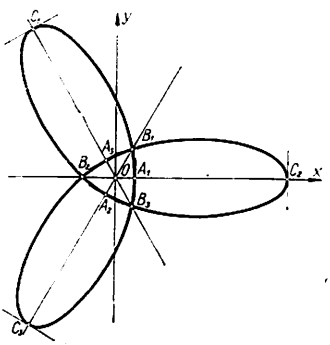


Fig. 318



Fig, 319

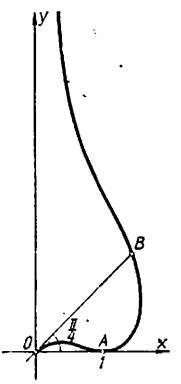


Fig. 320

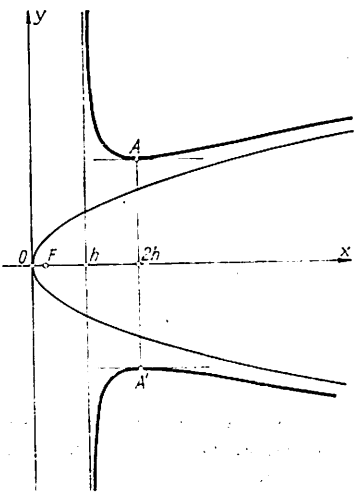


Fig. 321

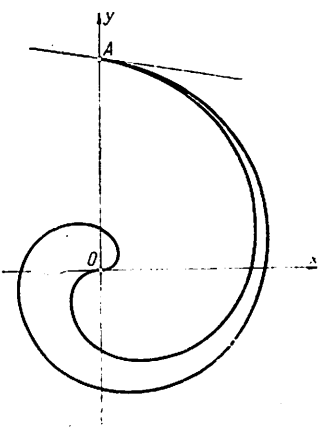


Fig. 322

Tabela 17

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$
ρ'	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
ρ	a		$\frac{9a}{5}$		$9a$		$\frac{9a}{5}$		a
	A_1		B_1		C_1		B_2		A_2

Tabela 18

ρ	0		1		2		$+\infty$
θ'		$-$	0	$+$		$+$	
θ	$\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
	O		A		B		

Tabela 19

t	0		1		2
$\rho'(t)$		$+$	0	$-$	
$\theta'(t)$		$+$	0	$-$	
$\frac{d\rho(t)}{d\theta(t)}$		$+$	$\vert$	$+$	
$\rho(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\theta(t)$	$-\pi$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-2π
	0		A		0

R. a) $\Omega(3, -3)$ c punct dublu izolat. Dreapta prin $\Omega: y + 3 = m(x - 3)$ retaie pe Γ în $P((m+1)(3m^2+2m+1)/m^3, (m+1)(2m+1)/m^2)$; cu $t = (m+1)/m$, rezultă $\Gamma: x = t^3 + 2t$, $y = t^2 + t$. b) $A(12, 6)$. c) Tabela 20, fig. 323.

Tabela 20

t	$-\infty$		-2		$\frac{-3-\sqrt{33}}{6}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-3+\sqrt{33}}{6}$		1		2		$+\infty$
x'		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{d^2x}{dx^2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\nearrow$	$-5{,}8$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$0{,}5$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}1$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$
					B_2		D		C		O		B_1				A		

96 Se dă, într-un sistem cartezian ortogonal Oxy, un cerc C tangent în origine unei axe. Tangenta în punctul curent M la C taie aceeași axă în N. Locul Γ al centrelor cercurilor înscrise și exînscrise triunghiului OMN se numește *scifoidă*. Să se construiască curba Γ.

R. $C: x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Centrele $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ se găsesc la intersecția bisectoarelor unghiurilor NOM și ONM; primele descriu pe C, iar celelalte pe Γ: $x^4 - y^4 + 4axy^3 = 0$ sau $x = 4at^2/(t^4-1)$, $y = 4at^3/(t^4-1)$. O e punct triplu (fig. 324); asimptote $x \pm y + a = 0$. $A_{1,2}(1 \pm \sqrt{2})$ și $A_{3,4}(-1 \pm \sqrt{2})$.

97 Să se construiască locul Γ al centrelor conicelor trecînd prin extremitățile unui diametru al cercului $C(O; a)$, tangente unei tangente la C paralelă cu acel diametru și intersectînd diametrul perpendicular pe acesta în P și Q astfel încît $PO \cdot OQ = -a^2$.

R. Cu diametrul dat Ox, familia de conice: $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + a\lambda^2 y - a^2 = 0$. $\Gamma: 2y(x^2 - y^2) - ax^2 = 0$, simetrică în raport cu Oy; O e punct cuspidal, cu tangenta Oy. Asimptote: $y = a/2$, $y = \pm x - a/4$ (fig. 325; v și fig. 245).

98 Fiind dat un triunghi ABC dreptunghic în A, se consideră hiperbolele echilatere circumscrise acestui triunghi. Se cere locul Γ al picioarelor normalelor duse din A la aceste conice.

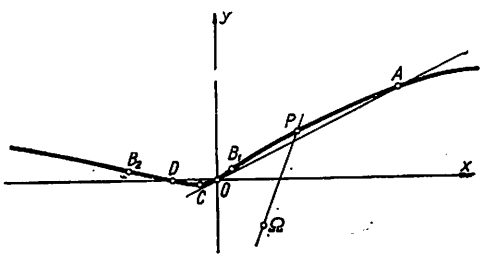


Fig. 323

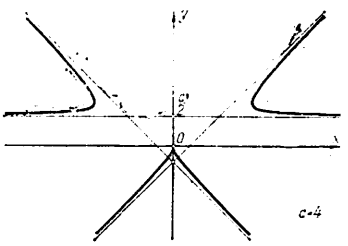


Fig. 325

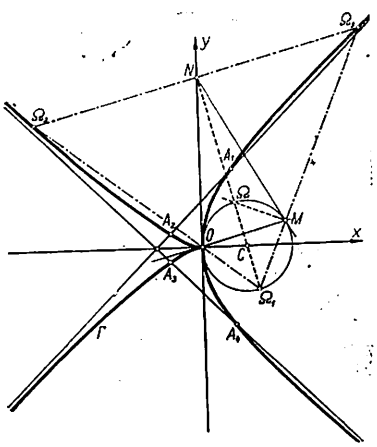


Fig. 324

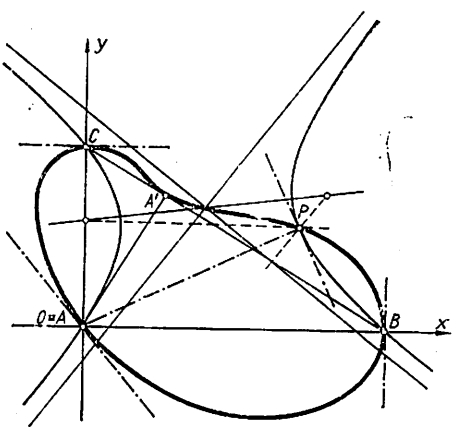


Fig. 326

R. Cu $A = O$, $B(a, 0)$ și $C(0, b)$, fasciculul: $x^2 + 2\lambda xy - y^2 - ax + by = 0$; picioarele normalelor sînt pe curba $x(2\lambda x - 2y + b) = y(2\lambda y + 2x - a)$. Eliminînd pe λ, $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = ax^3 + by^3$ sau $\rho = a\cos^3\theta + b\sin^3\theta$. O e punct triplu cu o tangentă reală (de pantă $\sqrt[3]{a/b}$). Avem $\rho' = 0$ dacă $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ (maxim) și $\operatorname{tg}\theta = b/a$ (minim, cînd ρ e dirijată după înălțimea AA'). Γ e tangentă în A' ipotenuzei BC (fig. 326).

99 Să se construiască locul Γ al mijlocului unei coarde de lungime constantă înscrisă într-o parabolă.

R. Mijlocul P al coardei $P_1P_2 = l$ e la intersecția acesteia cu diametrul său conjugat; eliminînd pe m și n între $y = mx + n$, $y = p/m$, $m^4l^2 = 4p\,(1 + m^2)\,(p - 2mn)$, Γ: $x = (4l^2 + p^2l^2/(l^2 + p^2))/8p$, $y = l.x' = 0$ dacă $l = 0$ sau $2\,(l^2 + p^2) = lp$; rezultă cazurile $l > 2p$ și $l \leqslant 2p$ (tabela 21).

Tabela 21:

α) $l > 2p$

l	0		$l_0 = \sqrt{\frac{p}{2}(l - 2p)}$		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
x	$\frac{l^2}{8p}$	$\searrow$	$x_0 = \frac{1}{2}(l - p)$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$y_0 = l_0$	$\nearrow$	$+\infty$

β) $l \leqslant 2p$

l	0		$+\infty$
x'		$+$	
x	$\frac{l^2}{8p}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dacă $M\,(x_1, y)$ e pe parabolă: $MP = x - x_1 = pl^2/8\,(l^2 + p^2) > 0$; deci $MP \to 0$ cînd $l \to \infty$, Γ fiind în interiorul parabolei și parabola o curbă asimptotă pentru Γ (fig. 327). *Obs.* Pentru $l = 2p$, Γ trece prin focarul F al parabolei.

100 Inversa unei rodonee se numește *curba spicului* (sinonim: *curba lui Stammer*). Se cere: a) Să se studieze curba spicului. b) Fie *trisectoarea lui Longchamps*: pe un cerc orientat γ de rază a, raportat la 2 diametri ortogonali AA' și BB', se consideră un punct arbitrar M, determinat de unghiul $AOM = 2\alpha$, și punctul asociat N prin relația $AON = 2\pi - \alpha$; e locul intersecției P a tangentelor în M și N la γ, cînd M descrie cercul γ. Să se arate că trisectoarea e o curbă spic.

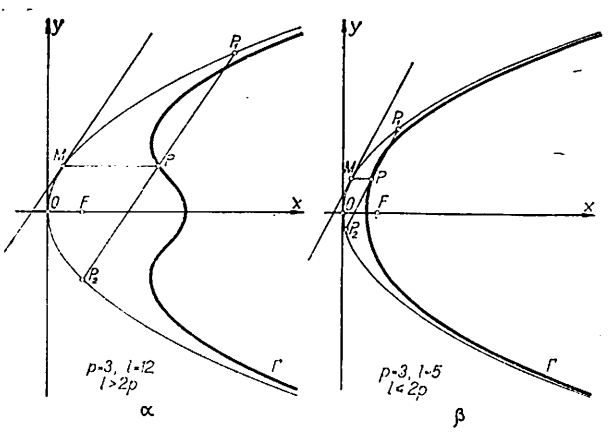


Fig. 327

R. a) În raport cu un reper polar, *curba spicului de indice n* e

(165) $$\Gamma_1 : \rho = a/\sin n\theta \quad \text{sau} \quad \Gamma_2 : \rho = a/\cos n\theta.$$

Γ_1 se transformă în Γ_2 prin $\overline{\theta} = \pi/2 - \theta$. Γ_1 e formată din ramuri egale cu cea din $I = [0, \pi/n]$, care admite dreptele $\theta = 0$ și $\theta = \pi/n$ ca asimptote, iar dreapta $\theta = \pi/2n$ ca axă de simetrie

(fig. 328). Dacă n *e număr irațional,* Γ *e o curbă transcendentă* și e formată dintr-o infinitate de ramuri. Dacă $n = p/q$, Γ *e o curbă algebrică* și e formată din p sau $2p$ ramuri după cum p și q sînt ambele impare sau de parități diferite (fig. 329). *Obs.* Polara reciprocă a epicicloidei (47) cu $l = a + r$, în raport cu un cerc concentric cercului fix și de rază p^2, e o curbă spic de indice $n = r/(r + 2a)$ ($\alpha = p^2/2\,(r + a)$). *Cazuri particulare*: I) $n=1$: o *dreaptă*; II) $n = 1/2$: *trisec-*

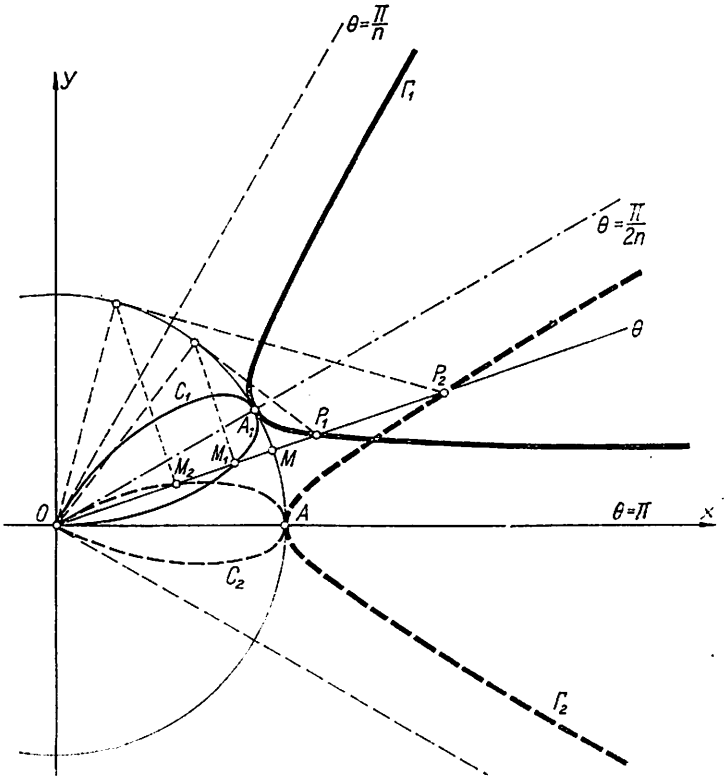


Fig. 328

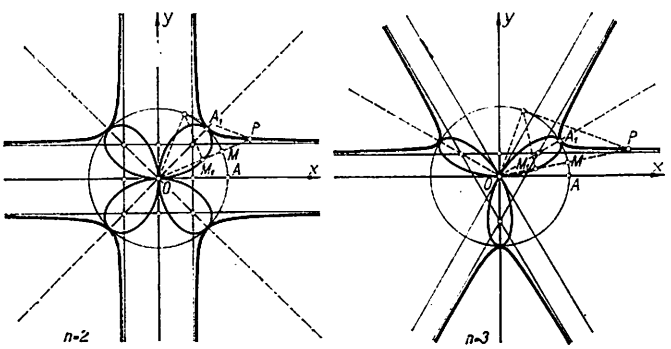


Fig. 329

toarea lui Delanges (fig. 330; v. și fig. 71); III) $n = 1/3$: *trisectoarea lui Maclaurin* (fig. 331; v. și fig. 289). b) Cu AA' și BB' axe, *trisectoarea Longchamps* e cubica (fig. 332)

(166) $$x(x^2 - 3y^2) = a(x^2 + y^2); \quad x = \frac{a(1 + t^2)}{1 - 3t^2}, \quad y = \frac{at\,(1 + t^2)}{1 - 3t^2}; \quad \rho = a/\cos 3\theta,$$

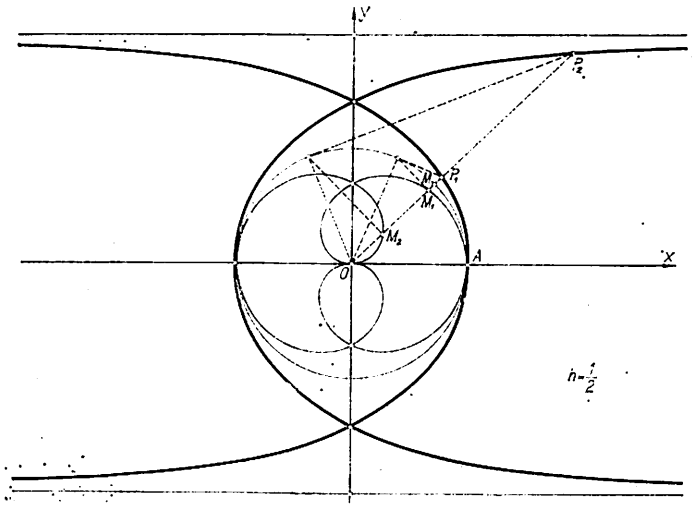


Fig. 330

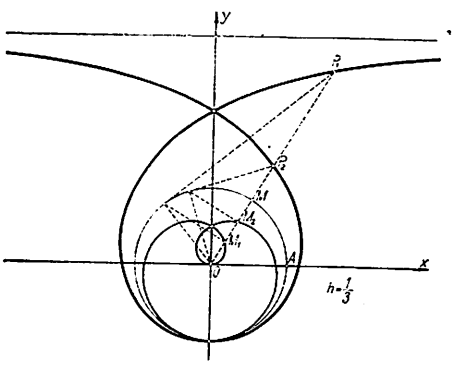


Fig. 331

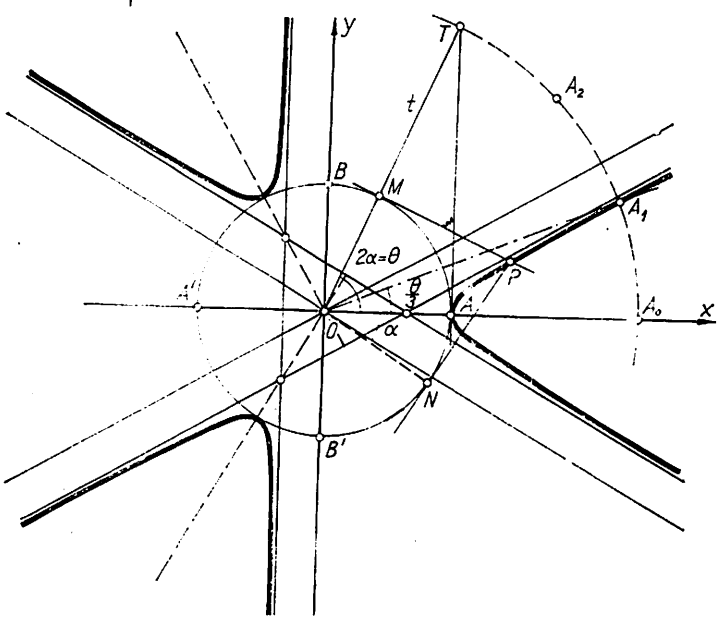


Fig. 332

fiind o curbă spic de indice $n=3$. O e punct dublu izolat; punctele comune ale asimptotelor $x \pm \sqrt{3}\, y - 2a/3 = 0$, $3x + a = 0$ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, bisectoarele lui fiind axele de simetrie ale lui Γ. *Obs.* Fiind dat $\widehat{xOt}$ (ascuţit), fie $T = Ot \cap$ (tangenta în A la γ); cercul de centru O şi trecînd prin T taie în Q ramura lui Γ din $\widehat{xOt}$, iar $\widehat{xOQ} = \widehat{xOt}/3$.

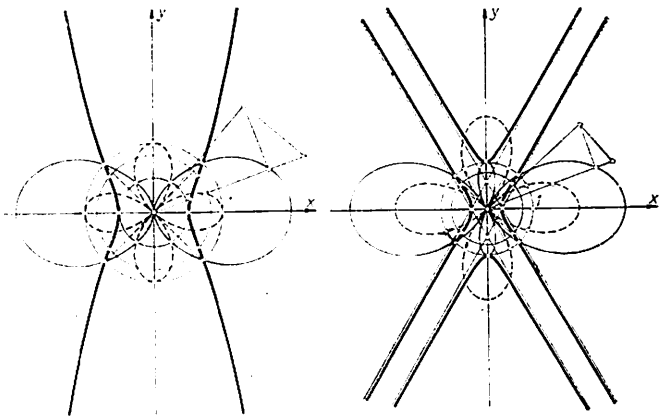
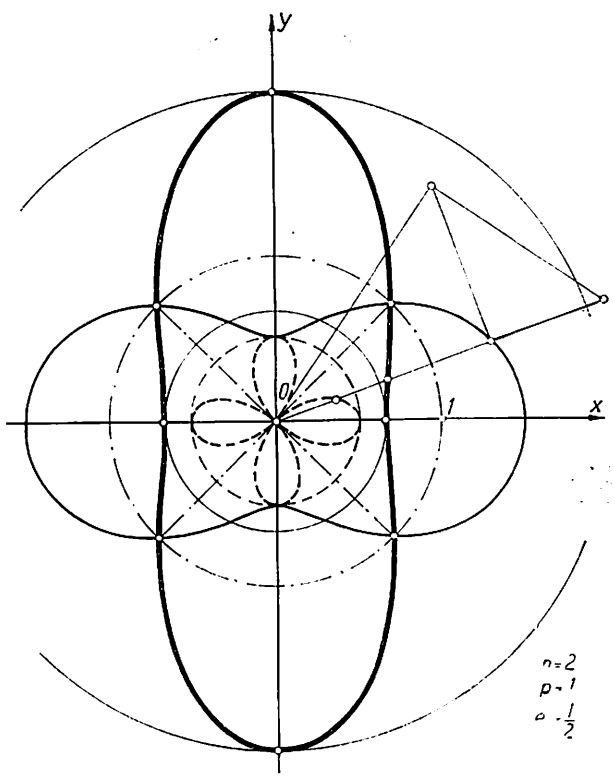


Fig. 333



Fgi. 334

101 Inversa concoidei unei rodonee se numeşte *poligasteroidă.*

R. Într-un reper polar, curba Γ e reprezentată de ecuaţia

$$\rho = p/(1 + e\cos n\theta) \text{ cu} \tag{167}$$
$$n \in N \text{ şi } p, e \in R \text{ iar } p > 0.$$

Dacă $|e| \geqslant 1$, Γ are ramuri infinite; asimptotele sînt tangente unui aceluiaşi cerc cu centrul în O (fig. 333). Dacă $|e| < 1$, Γ e situată în interiorul unei coroane de centru O şi de raze $p/|1 + e|$ şi $p/|1 - e|$ (fig. 334). Punctele comune curbei şi cercului $(O; (n^2 - 1)p/n^2)$ sînt puncte de inflexiune pentru Γ. Poligasteroidele sînt curbe algebrice de ordinul $2n$; după cum n e par sau impar, curba are ecuaţia

$$(167')\{e[x^n - C_n^2 x^{n-2}y + \ldots] + (x^2 + y^2)^{n/2}\}^2 - p^2(x^2+y^2)^{n-1} = 0$$

sau

$$(167'')\{e[x^n - C_n^2 x^{n-2} y + \ldots] - p(x^2+y^2)^{(n-1)/2}\}^2 - (x^2+y^2)^n = 0.$$

O e punct multiplu de ordinul $2(n-1)$, tangentele fiind dreptele izotrope; dacă n e par, Γ are n puncte duble situate pe dreapta improprie, iar dacă n e impar, toate punctele improprii ale lui Γ sînt puncte simple. Cazuri particulare: I) $n=0$: un cerc cu centrul în O; II) $n=1$: o conică cu unul din focare în polul O.

102 Să se construiască locul Γ al punctelor de unde se pot duce două normale ortogonale la o conică cu centru.

R. Fie conica (61); notăm $c^2 = a^2 - \varepsilon b^2$ ($\varepsilon = \pm 1$). Γ e sextica circulară

(168) $(a^2+\varepsilon b^2)(x^2+y^2)(b^2x^2+\varepsilon a^2y^2)^2 = c^4(b^2x^2-\varepsilon a^2y^2)^2$.

O e punct cuadruplu cu tangente reale: $y = \pm bx/a$ (pentru $\varepsilon = 1$) sau imaginare (pentru $\varepsilon = -1$). *Obs.* Cînd $\varepsilon=-1$, Γ e reală dacă $a>b$ (ceea ce presupunem). Construcţia graficului se face uşor în reprezentarea polară; Γ:

(168′) $$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+\varepsilon b^2}} \cdot \frac{b^2\cos^2\theta - \varepsilon a^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta + \varepsilon a^2\sin^2\theta}.$$

Cum $\rho(\pi+\theta) = \rho(\theta)$ şi $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, fie $I_1 = [0, \pi/2]$, restul lui Γ obţinîndu-se prin simetrie faţă de Ox şi O (v. tabela 22 cu $\operatorname{tg}\alpha = b/a$; fig. 335 — 336); $\operatorname{tg} V(0) = \operatorname{tg} V(\pi/2) = 0$. În cazul $\varepsilon = -1$, Γ are asimptota $\rho\sin(\alpha-\theta) = p$, cu $p = \lim_{\rho\to\infty} \rho\sin(\alpha-\theta) = ab/\sqrt{a^2-b^2}$; căci $\lim_{\rho\to\infty} \theta = \alpha$ iar $\cos\alpha = a/c$ şi $\sin\alpha = b/c$. *Obs.* Pe semidreapta d de unghi $\alpha - \pi/2$ se ia $H \in d$ astfel ca $OH = p$

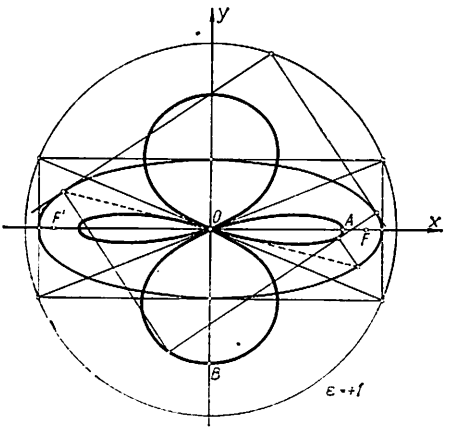


Fig. 335

Tabela 22:

α) $\varepsilon = +1$

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	−		−	θ
ρ	$\frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	↘	0	↘	$\frac{-c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$
	A		O		B

β) $\varepsilon = -1$

θ	0		α			$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	+			+	0
ρ	$\frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗		$\frac{-c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$
	A		A′	B′		B

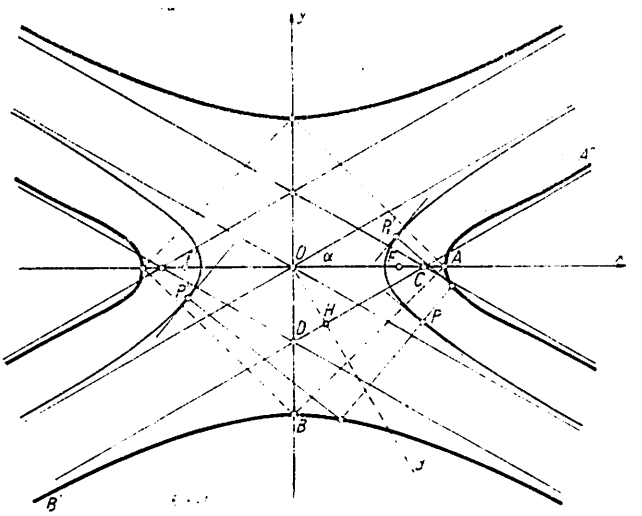


Fig. 336

(cu sens); perpendiculara în H pe d e asimptota. Ea taie axele în $C(\theta = 0)$, $D(\theta = \pi/2)$ şi $OC = ac/\sqrt{a^2 - b^2} < OA$, $OD = -bc/\sqrt{a^2 - b^2} > OB$ $(a < c)$. Poziţia lui Γ faţă de asimptote: fie $\delta = p - \rho \sin(\alpha - \theta) = c^2 f(\theta)/\sin(\alpha + \theta)\sqrt{a^2 - b^2}$, $f(\theta) = \sin\alpha \cos\alpha \sin(\alpha+\theta) - (\sin^2\alpha \cos^2\theta + \cos^2\alpha \sin^2\theta)$. Cum $\sin(\alpha + \theta) > 0$, semnul lui δ e determinat de semnul lui $f(\theta)$; avem $f'(\theta) = \sin\alpha \cos\alpha \cos(\alpha + \theta) - \cos 2\alpha \sin 2\theta$ iar $f'(\alpha) = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha < 0$ pentru $\alpha < \pi/4$. $f(\theta)$ fiind descrescătoare pentru $\theta < \alpha$ (deci $\delta > 0$) şi crescătoare pentru $\theta > \alpha$ (deci $\delta < 0$), arcele AA' şi BB' sînt respectiv deasupra şi sub asimptotă.

103 Dacă O e un punct fix al unui cerc Γ, să se construiască locul intersecţiei tangentei în M (punct curent) $\in \Gamma$ cu bisectoarele unghiului AOM, A fiind diametralul opus lui O în cercul Γ.

R. Fie $OA = Ox$; Γ are centrul $\Omega(a, 0)$. Locul e $(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) = a(x^2 - y^2)^2$ sau $\rho = a\cos^2 2\theta/\cos 3\theta$, căci $OP/OM = \sin\widehat{OMP}/\sin\widehat{OPM}$, $OP = OA \cos 2\theta$, $\widehat{OMP} = 2\theta + \pi/2$, $\widehat{OPM} = \pi - \theta - (2\theta + \pi/2)$. Cum $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ şi $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, fie $I_1 = [0, \pi/2]$; găsim $\operatorname{tg} V(0) = 0$ (tabela 23; fig. 337). Curba are 2 asimptote, cînd $\alpha_1 = \pi/6$ şi $\alpha_2 = \pi/2$; avem $p_1 = a/12$ iar $\delta_1 < 0$ pentru $\theta < \alpha_1$, $\delta_1 > 0$ pentru $\theta > \alpha_1$ şi $p_2 = -a/2$ iar $\delta_2 > 0$. $B(a/2, 0)$, $C(0, -a/6\sqrt{3})$, $D(-a/3, 0)$.

Tabela 23:

θ	0		$\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$
ρ	a	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
	A						

104 Fie A (punct fix) şi M (punct curent) $\in \gamma(O; r)$. Se cere locul intersecţiei dreptei AM cu perpendiculara în O pe OM.

R. Cu O ca pol şi OA ca axă polară, locul Γ are ecuaţia

$$\rho = ka\cos\theta/(k - \sin\theta); \quad k^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = y^2(x^2 + y^2) \quad (k = r/a).$$

Fie $I_1 = [-\pi/2, \pi/2]$; căci $\rho(\theta + 2h) = \rho(\theta)$ şi $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$. $\rho(\theta)$ e discontinuă pentru $k \leqslant 1$; atunci există $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ cu $\sin\alpha = k$, deci asimptota $\rho \sin(\alpha - \theta) = ka$, care taie axele în $A(a, 0)$ şi $B(0, -ka/\sqrt{1 - n^2})$. Cînd $k < 1$, A e exterior lui γ (tabela 24, fig. 338). Pentru $k = 1$, $A \in \gamma$ (tabela 25, fig. 339). Cînd $k > 1$, A e interior lui γ (tabela 26, fig. 340).

Tabela 24:

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		α		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0
	O		A				O

Tabela 25:

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\alpha = \frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$
	O		A		

Tabela 26:

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\alpha = \arcsin\frac{1}{k}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$+$		$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$\rho(\alpha)$	$\searrow$	0
	O		A		B		O

105 Într-un reper polar, fie A (punct fix) $\in Ox$, o conică variabilă γ cu focarul în O, cu directoarea corespunzătoare d trecînd prin A și de excentricitate e. Să se construiască locul Γ al intersecției lui γ cu simetrica OA' a lui OA în raport cu axa focală $O\Omega$.

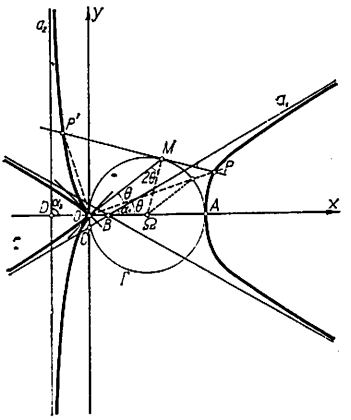


Fig. 337

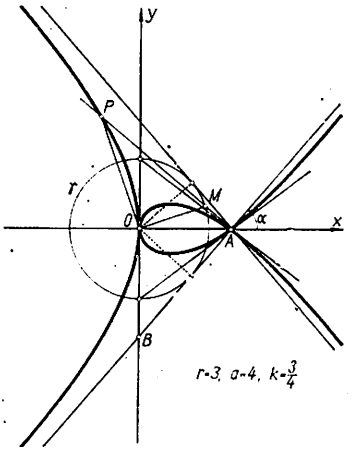


Fig. 338

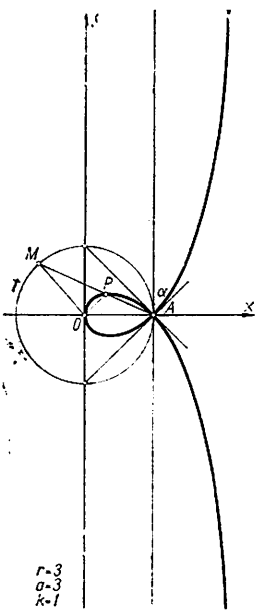


Fig. 339

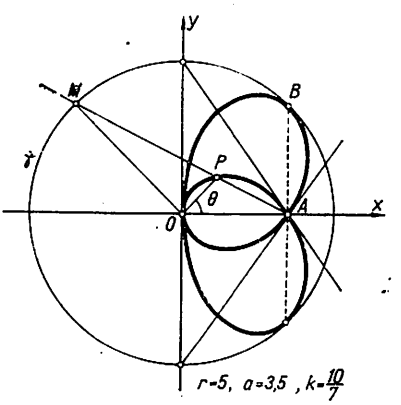


Fig. 340

R. Fie $OA = a$ și $k = 1/e$; cu $P \in \Gamma$, din definiția lui γ, avem $OP/PP' = e$ iar $PP' = PA' \sin\frac{\theta}{2} = (a + \rho)\sin\frac{\theta}{2}$ (fig. 341). Deci locul Γ are ecuația

$$\rho = \frac{a \sin\frac{\theta}{2}}{k - \sin\frac{\theta}{2}}; \quad (x^2 + y^2)[(2k - 1)(x^2 + y^2) + a(2x - a)]^2 = [(x^2 + y^2)(2a - x) - a^2x]^2. \tag{169}$$

Obs. Putem avea (v. fig. 341 b) $PP' = PA' \cos\frac{\theta}{2} = (a-\rho)\cos\frac{\theta}{2}$; schimbînd pe θ în $\theta - \rho$ şi ρ în $-\rho$, obţinem $PP' = (a+\rho)\sin\frac{\theta}{2}$. Fie $I_1 = [-\pi, \pi]$. Puncte duble cînd $\rho(\theta_1) + \rho(\theta_2) = 0$; cum $\theta_2 = \theta_1 - \pi$ şi $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ (căci $\theta \in I_1$), θ_i satisface

(169′) $\qquad \sin^2\theta + k^2 \sin\theta - k^2 = 0$, respectiv $\sin^2\theta - k^2 \sin\theta - k^2 = 0$.

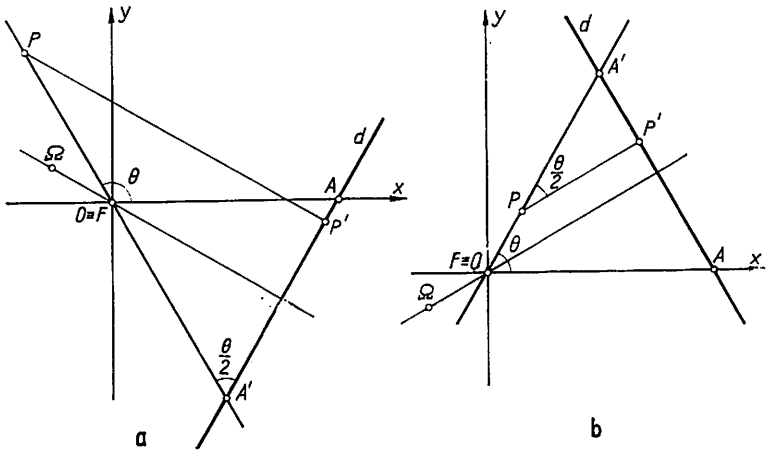


Fig. 341

Aceste ecuaţii admit cîte o rădăcină pentru $\theta \in [0, \pi/2]$ (prima — pentru orice k, a doua — pentru $k<1/\sqrt{2}$); deci Γ are un punct nodal H, respectiv şi un al doilea punct nodal K pentru $k<1/\sqrt{2}$ (tabela 27). Tangentele în M şi N sînt paralele cu Oy, iar în O coincide cu Ox. $\rho(\theta)$ e discontinuă dacă

(169″) $\qquad \sin\frac{\theta}{2} - k = 0$, adică $e \geqslant 1$ $(k \leqslant 1)$.

Tabela 27:

θ	$-\pi$		θ_1		$-\frac{\pi}{2}$		0	θ_2	$\frac{\pi}{2}$		π
ρ	$-\frac{a}{k+1}$	$\nearrow$	M	H	$-\frac{a}{k\sqrt{2}+1}$	$\nearrow$	A	O	H	$\frac{a}{k\sqrt{2}-1}$	$\nearrow$ B	$\frac{a}{k-1}$	N

Deci: a) Dacă $e<1$ (elipsă), Γ e o curbă închisă (fig. 342). b) Dacă $a>1$ (hiperbolă), ecuaţia (169″) admite o soluţie $\alpha \lessgtr \pi/2$ după cum $k \lessgtr 1/\sqrt{2}$; are asimptota $\rho \sin(\alpha - \theta) = 2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, care taie pe Ox în $I\left(a/\cos^2\frac{\alpha}{2}, 0\right) \in MN$ şi pe Oy în $J\left(0, -2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}/\cos\alpha\right)$ (fig. 343). c) Dacă $e=1$ (parabolă), (169″) dă $\alpha = \pi$; ramura infinită e parabolică ($p \to \infty$ cînd $\theta \to \alpha$) (fig. 344).

106 Se numeşte *curba sectoare* orice curbă folosită în problema împărţirii unui unghi într-un număr dat de unghiuri egale; cînd curba intervine în „trisecţiunea unghiului", obţinem o *curbă trisectoare*. Să se arate că sînt astfel de curbe: a) *Curbele isociclotomice* (sinonim: *curbele Plateau*): Fiind

date 2 puncte fixe A, A' ($AA' = 2a$), determinînd axa d prin vectorul director $\overline{A'A}$, locul Γ al punctelor astfel încît

(170) $\widehat{MAd}/n = \widehat{MA'd}/n'$ ($n, n' \in N$, fără divizori comuni; fig. 345).

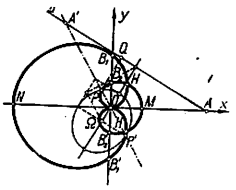


Fig. 342

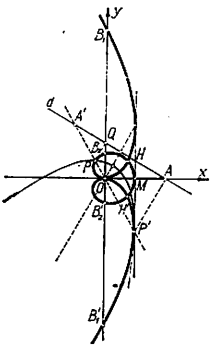


Fig. 344

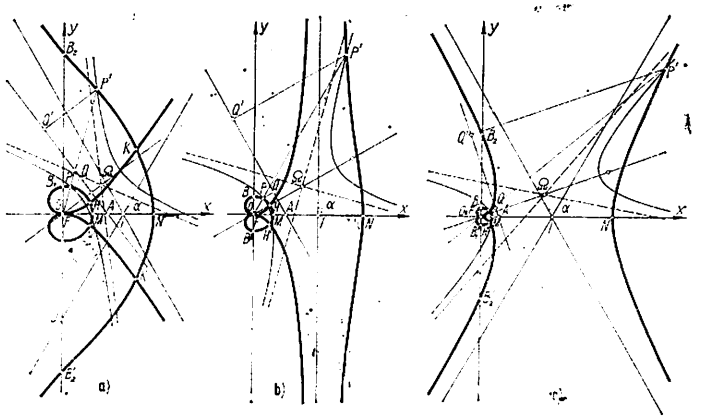


Fig. 343

b) *Curbele Delanges* : Fie o familie de cercuri concentrice de centru O, o semidreaptă fixă Ox prin O și un număr pozitiv a ; pe un cerc arbitrar $\gamma\,(O\,;\,r)$ din familie, din $A = \gamma \cap Ox$, se construiesc coardele $AA_2 = A_2A_4 = A_4A_6 = \ldots = 2a$, mijloacele $A_1, A_3, A_5, \ldots$ ale arcelor $\widehat{AA_2}$, $\widehat{A_2A_4}$, $\widehat{A_4A_6}, \ldots$ și mijloacele $B_1, B_3, B_5, \ldots$ ale coardelor respective ; locurile Γ_n, Γ'_n ale lui A_n, respectiv B_n, de pe cercurile familiei, pentru un același indice n (fig. 346).

R. a) Cu $Ox = d$ și Oy mediatoarea lui $A'A$, obținem curba rațională Γ :

$$(170') \qquad x = a\,\frac{\sin(n+n')\varphi}{\sin(n-n')\varphi},\quad y = 2a\,\frac{\sin n\varphi \sin n'\varphi}{\sin(n-n')\varphi},$$

cu φ — valoarea rapoartelor (170) ; $A_0(a(n+n')/(n-n'), 0)$, $\lim\limits_{\varphi\to 0}(A'M'/AM') = n/n'$. În reperele polare $(A\,;\,Ox)$ și $(A'\,;\,Ox)$, Γ are ecuația

$$(170'') \qquad \rho = 2a\sin\frac{n'}{n}\theta/\sin\left(1-\frac{n'}{n}\right)\vartheta,\ \text{respectiv}\ \rho' = 2a\sin\frac{n}{n'}\,\theta'/\sin\left(\frac{n}{n'}-1\right)\theta'.$$

Pentru $n' = 1$ se obține o *curbă sectoare propriu-zisă* : fiind dat unghiul în A cu Ax ca latură, cealaltă latură taie pe Γ în n puncte M, unul din unghiurile $\widehat{MA'A}$ fiind $(\alpha + k\pi)/n$. Cînd $n = 2$, Γ e *cercul* $(A\,;\,2a)$; cînd $n = 3$, se obține *trisectoarea Maclaurin* (fig. 345 c ; v. și fig. 289). Pentru $n' = 2$, $n = 3$, rezultă *sescvisectoarea* (fig. 345 e ; v. și fig. 173) :

$$x = 2(16\sin^4\varphi - 20\sin^2\varphi + 5),\quad y = 4a\sin\varphi\cos\varphi(3 - 4\sin^2\varphi).$$

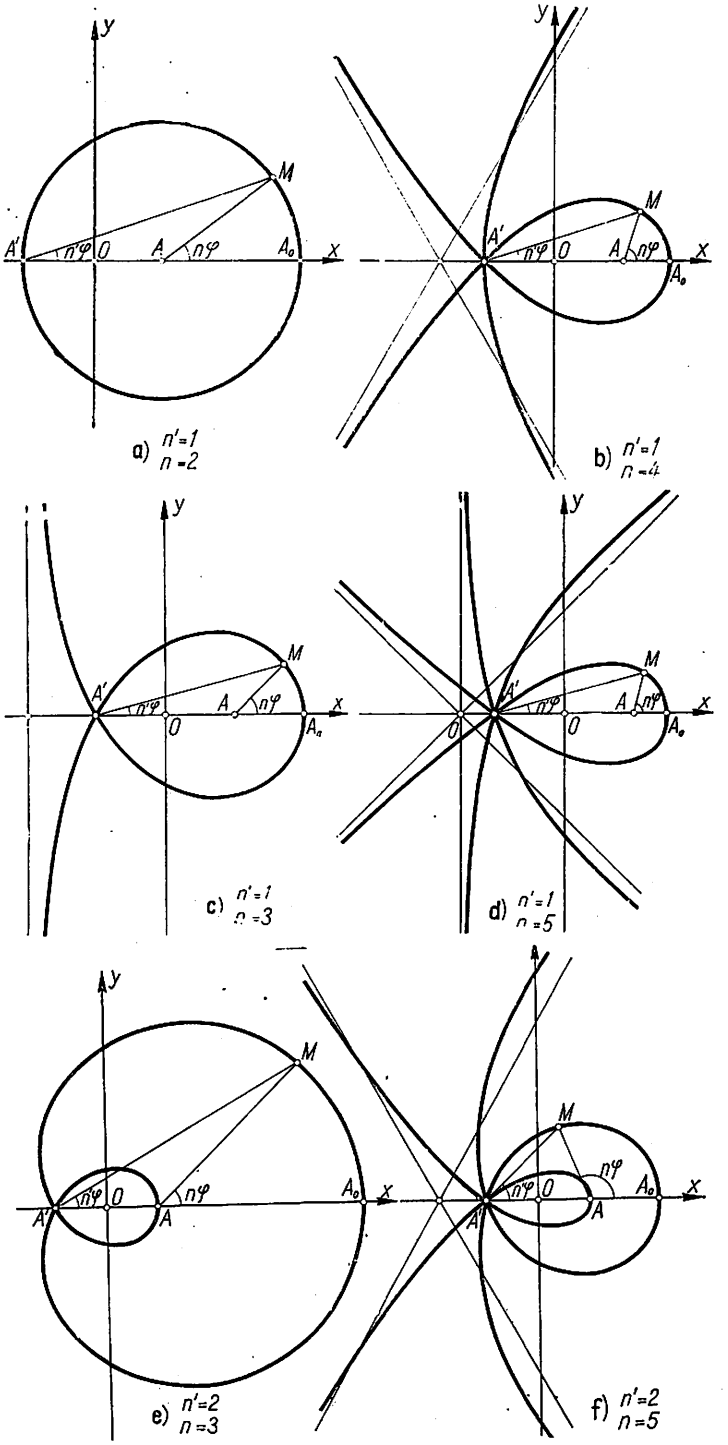

y
x
M
A'
A
A_0
O
$n'\varphi$
$n\varphi$
a) $n'=1$ $n=2$
b) $n'=1$ $n=4$
c) $n'=1$ $n=3$
d) $n'=1$ $n=5$
e) $n'=2$ $n=3$
f) $n'=2$ $n=5$

Fig. 345

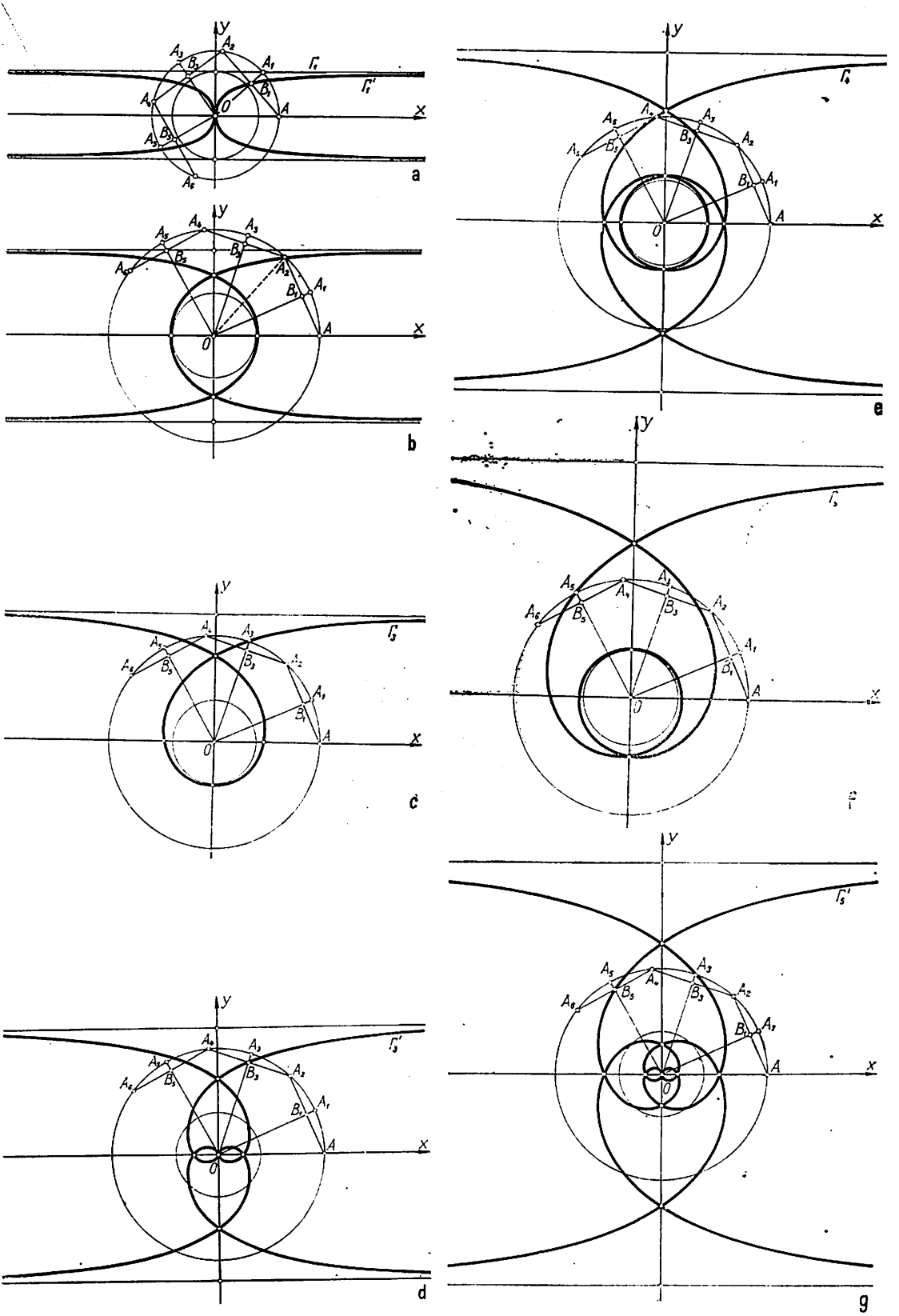


Fig. 346

b) Există relația $\widehat{A_nOA} = \theta$, $\widehat{A_nOA_{n-1}} = \theta/n$. Obținem curbele

(171) Γ_n: $\rho \sin\frac{\theta}{n} = a$ (curbă spic de indice $\frac{1}{n}$) și Γ_n': $\rho \operatorname{tg}\frac{\theta}{n} = a$,

având asimptota $y = na$; sînt curbe algebrice: Γ_n e de grad n sau $2n$. după cum n e impar sau par, iar Γ_n' e de grad $2(n+1)$. *Cazuri*: b_1) $n = 1$, Γ_1 e *dreapta* $y = a$, iar Γ_1' se numește *curba kappa* (sinonim: *curba lui Gutschoven*) (fig. 346 a). Generarea uzuală a curbei kappa: locul punctelor de contact ale tangentelor duse dintr-un punct fix al unei drepte d la cercurile de rază a, cu centrele pe dreapta d; deci (fig. 347)

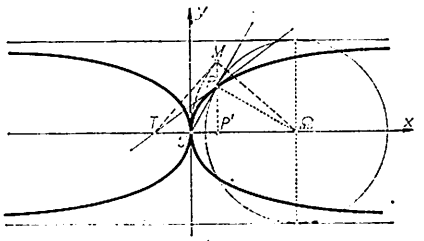


Fig. 347

(172') Γ_1': $\rho = \pm a \operatorname{ctg}\theta$; $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$.

O e un punct dublu tacnodic. Γ_1' e de clasă 6. Perpendiculara în $P \in \Gamma_1'$ pe OP taie pe d în Ω astfel că $P\Omega = a$; Ω e centrul cercului de rază a care admite pe OP ca tangentă în P. Tangenta în P la Γ_1' taie pe d în T iar $T\Omega \cdot P'\Omega = OP^2$, P' fiind proiecția lui P pe d; căci $O\Omega = M\Omega$. b_2) $n = 2$, Γ_2 e *trisectoarea lui Delanges* (fig. 346 b; v. și fig. 71). b_3) $n = 3$, Γ_3 e *trisectoarea lui Maclaurin* (fig. 346 c; v. și fig. 289 sau 345 c).

6. LUNGIMEA UNUI ARC DE CURBĂ

107 Fie drumul d: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$. Dacă Δ: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$ e o diviziune oarecare a lui $[a, b]$, punctele $P_\alpha(t_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n)$ determină o linie poligonală Σ înscrisă în imaginea Γ a lui d, de lungime

$$l(\Sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}.$$

Drumul d se numește *rectificabil în sensul lui Jordan* dacă mulțimea $\{l(\Sigma)\}$ e majorată; marginea superioară a acestei mulțimi se numește *lungimea drumului* d și se notează $l(\Gamma) = \sup_{\Delta} \{l(\Sigma)\}$. Fie $a < c < b$ și drumurile rectificabile d, d': $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, c]$ și d'': $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [c, b]$; să se arate că $l(\Gamma) = l(\Gamma') + l(\Gamma'')$. *Apl.* a) Drumul

$$d: \; x = \int_t^1 \cos\frac{\pi}{2\tau^2}\,d\tau, \; y = \int_t^1 \sin\frac{\pi}{2\tau^2}\,d\tau, \; t \in [0, 1]$$

e rectificabil; să se calculeze lungimea lui. b) Nu e rectificabil:

$$d: \; x = f(t), \; y = f(t), \; t \in [0, 1] \text{ cu } f(t) = \begin{cases} (1-t)\left|\sin\dfrac{\pi}{2(1-t)}\right|, & t \in [0, 1) \\ 0, & t = 1. \end{cases}$$

c) Drumurile d_1: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$ și d_2: $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in [0, 1]$ au aceeași imagine și sînt rectificabile, dar lungimile lor nu sînt egale. d) Fie drumurile d: $x = t$, $y = 0$, $t \in [0, 1]$ și d_n: $x_n = t$, $y_n = \dfrac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}$, $t \in [0, 1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Să se arate că șirul $\{d_n\}$ converge uniform către d, dar $l(\Gamma_n)$ nu converge către $l(\Gamma)$.

R. Dacă diviziunea Δ a lui $[a, b]$ nu conține pe c, formăm diviziunea Δ_c, obținută prin adăugarea lui c la Δ; deci $\Delta_c : a=t_0<\ldots<t_{i-1}<c=t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=b$. Notăm cu Δ' diviziunea lui $[a, c]$ formată cu toate punctele lui Δ_c din $[a, c]$ și cu Δ'' diviziunea lui $[c, b]$ formată cu toate punctele lui Δ_c din $[c, b]$. Avem $l(\Sigma)\leqslant l(\Sigma_c) = l(\Sigma') + l(\Sigma'')$, dacă ținem seama de axioma triunghiului aplicată punctelor P_{i-1}, P_i și P_{i+1}. Trecînd la marginea superioară (după Δ), obținem $l(\Gamma)\leqslant l(\Gamma')+l(\Gamma'')$. Fie un număr $\varepsilon>0$. Conform definiției lungimii unui drum, rezultă că există o diviziune $\Delta'(\varepsilon)$ a lui $[a, c]$ și o diviziune $\Delta''(\varepsilon)$ a lui $[c, b]$ astfel încît $l(\Gamma')<l(\Sigma'(\varepsilon)) + \varepsilon/2$, $l(\Gamma'')< <l(\Sigma''(\varepsilon)) + \varepsilon/2$. Cu $\Delta(\varepsilon)=\Delta'(\varepsilon)\cup\Delta''(\varepsilon)$, obținem $l(\Gamma')+l(\Gamma'')<l(\Sigma'(\varepsilon))+l(\Sigma''(\varepsilon))+\varepsilon = l(\Sigma(\varepsilon))+ + \varepsilon \leqslant l(\Gamma) + \varepsilon$. Cum $l(\Gamma')$, $l(\Gamma'')$ și $l(\Gamma)$ nu depind de ε, rezultă că $l(\Gamma') + l(\Gamma'')\leqslant l(\Gamma)$. *Obs.* a) *Criteriul de rectificabilitate al lui Jordan*: Un drum d e rectificabil dacă și numai dacă f și g sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$. b) *Reprezentarea integrală a lungimii unui drum* d: dacă funcțiile din ecuațiile (29_1), respectiv (2) sau (4), au derivată integrabilă pe domeniul lor de definiție, atunci

$$l(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt, \text{ respectiv } l(\Gamma) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(173)

$$\text{sau } l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Apl. a) Integralele din d sînt absolut convergente, căci $\left|\cos\frac{\pi}{2\tau^2}\right|\leqslant 1$ și $\left|\sin\frac{\pi}{2\tau^2}\right|\leqslant 1$; deci $x(t)$ și $y(t)$ sînt cu variație mărginită. $x(t)$ și $y(t)$ sînt derivabile și admit derivate continue pentru $t\neq 0$; ele sînt derivabile și pentru $t = 0$: $x'(0) = y'(0) = 0$, căci pentru drumul d(t) cu $t\in(0,1]$ avem $l(t) = 1 - t$. Deci $l(\Gamma) = 1$. b) f(t) e continuă, dar nu este cu variație mărginită. c) Ambele drumuri au drept imagine porțiunea din dreapta $x + y=1$ pentru care $0\leqslant x\leqslant 1$; ele sînt rectificabile, căci funcțiile din ecuațiile lor sînt de clasă C^1. După (173_1) : $l(d_1)=4\sqrt{2}$ și $l(d_2) = \sqrt{2}$. d) $x_n = t$ și $y_n \to 0$ uniform în raport cu t; căci $|0 - y_n| \leqslant \frac{1}{2n} \to 0$. Avem $l(d) = 1$ și $l(d_n) = =\int_0^{2n\pi}\frac{1}{2n\pi}\sqrt{1 + \cos^2\tau}\, d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1 + \cos^2\tau}\, d\tau$. Cum $\sqrt{1 + \cos^2\tau}\geqslant 1$ pentru $\tau\in(0, \pi)$: $\lim\limits_{n\to\infty} l(d_n)>1$.

108 Să se calculeze lungimea drumului : a) $y + \ln\cos x = 0$, $x\in[0, \pi/6]$; b) $x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$, $y = \sqrt{1 + t^2}$, $t \in [0, 1]$; c) $y = \ln((e^x + 1)/(e^x - 1))$, $x \in [1, 2]$; d) $x = \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $y = \ln\sqrt{(1 + \sin t)/(1 - \sin t)}$, $t \in [\pi/6, \pi/3]$; e) $x = =5\sin t-\sin 5t$, $y=5\cos t+\cos 5t$, $t\in[0, 2\pi]$; f) $\rho=a\cos^4\frac{\theta}{4}$, $\theta\in[0, 8\pi]$; g) $\theta= =(\rho^2 + 1/\rho^2)/4$, $\rho\in[1, 2]$.

109 Să se calculeze lungimea curbei : a) $4(x^2 + y^2) - a^2 = 3a^{4/3}y^{2/3}$; b) $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$; c) $\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}$; d) $\rho = 2a\sin\theta$.

110 Să se afle lungimea unui segment de dreaptă P_1P_2, aplicînd formula care dă lungimea unui arc de curbă plană.

111 Să se afle lungimea circumferinței unui cerc de rază r.

112 Curba $C : x = at^3$, $y = 3a(t^2 - 1)^2/8$ are un punct cuspidal A. Să se calculeze lungimea arcului dintre A și un punct oarecare $P\in C$.

113 Curba $C : x = 3t/(1 - t^2)^2$, $y = (3t - 1)/(1 - t)^2$ prezintă o buclă. Să se calculeze lungimea arcului care formează bucla.

114 Să se calculeze lungimea arcului : a) parabolei cubice $ay^2 = x^3$ de la origine pînă la punctul de abscisă $5a$; b) tractricei polare (56) de la punctul P_0, de pe raza vectoare ρ_0, la punctul curent P.

R. a) Cum $y'=3\sqrt{x/a}/2$, găsim $s=325/27$. b) Scriind $PT^2=a^2$ sub forma $\rho^2\left[1+\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2\right]=$ $=a^2$ și deoarece $ds^2=(\rho^2+\rho'^2)\,d\theta^2=\left[1+\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2\right]d\rho^2$, atunci $ds=a\frac{d\rho}{\rho}$, adică $s-s_0=a\ln\frac{\rho}{\rho_0}$.

115 Să se calculeze lungimea elipsei: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

R. $s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$. Fiind uniform convergentă, seria $\sqrt{1-e^2\cos^2 t}=1-\frac{1}{2}e^2\cos^2 t-\ldots-\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}e^{2n}\cos^{2n}t-\ldots$ poate fi integrată termen cu termen. Deoarece $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, calculul aproximativ al lungimii elipsei e dat de

$$s=2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\ldots-\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^{2n}e^{2n}/(2n-1)-\ldots\right].$$

Rectificarea se face cu ajutorul funcțiilor eliptice. Prin $\cos t=u$, lungimea elipsei e dată de integrala eliptică $s=2a\int_{-1}^{1}\frac{(1-e^2u^2)\,du}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}$.

116 Fie parabola (62). Să se calculeze lungimea arcului limitat de: a) punctele P_1 și P_2; b) o coardă focală.

R. a) Cu $y=t$ și $t^2+p^2=t^2u^2$, găsim $s=\frac{p}{2}\left(\frac{t\sqrt{t^2+p^2}}{p^2}+\ln\frac{\sqrt{t^2+p^2}+t}{p}\right)_{t_1}^{t_2}$; de exemplu: $t_1=0$ (vîrf) și $t_2=y$ (punct curent). b) Coarda focală: $y=m(x-p/2)$ taie parabola în $P_i(t_i)$ $(i=1,2)$ iar t_i sînt rădăcinile ecuației $mt^2-2pt-mp^2=0$; cum $t_1t_2=-p^2$, arcul $P_1OP_2=\frac{p}{2}\left(\ln\frac{(\sqrt{t^2+p^2}+t)(\sqrt{t^2+p^2}+p)}{pt}+\frac{(t^3+p^3)\sqrt{t^2+p^2}}{p^2t^2}\right)$. Cînd $P_1P_2\perp Ox$: $t=p$ și $s=p[\sqrt{2}+\ln(1+2)]$.

117 Să se calculeze lungimea arcului cicloidei (45) de la începutul unei arcade pînă la punctul curent al arcadei.

R. $ds=\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\theta}\,d\theta=\sqrt{p^2-(p^2-q^2)\cos^2 t}\,dt$ cu $a+l=p/2$, $|a-l|=q/2$, $\theta=2t$; el coincide cu cel al elipsei $x=p\cos t$, $y=q\sin t$, încît rectificarea cicloidei se reduce la cea a elipsei. Pentru cicloida normală ($a=l$): $ds=2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$, rectificarea făcîndu-se cu ajutorul funcțiilor elementare; pentru arcada $\theta\in[0,2\pi]$, $s=4a\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)=8a\sin^2\frac{t}{4}$. *Obs.* Lungimea arcadei e $8a$.

118 Să se afle lungimea unei arcade a curbei ciclice normală. *Apl.* a) În cazuri particulare. b) La o cardioidă, unghiul razei vectoare cu normala (orientată exterior) e jumătate din unghiul polar.

R. Fie curba ciclică (47′′′) de modul $h=a/r$; $ds^2=\frac{a^2(h\pm 1)^2}{h^2}(1+\lambda^2-2\lambda\cos h\theta)\,d\theta^2$. Cînd $\lambda=1$ (curbă normală), pentru arcada $\theta\in[0,2\pi/h]$: $s=\frac{2a|h\pm 1|}{h}\int_0^{\theta}\sin\frac{h\theta}{2}\,d\theta=$ $=\frac{8a|h\pm 1|}{h^2}\sin^2\frac{h\theta}{4}$, adică $s=\frac{8a|h\pm 1|}{h^2}$. *Apl.* a) Cardioida: $16a$; nefroida: $2.6\,a=12a$;

hipocicloida Steiner : $3 \cdot \frac{16a}{9} = 16a/3$; astroida : $4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a$. *Obs.* Arcul astroidei limitat de punctul cuspidal $A(a, 0)$ şi $P(x, y)$ e dat de $\frac{3}{2}(ay^2)^{1/3}$. b) Fie cardioida $\rho = a(1 + \cos\theta)$; arcul dat de $A(2a, 0)$ şi $P(\rho, \theta)$ e $s = 4a \sin\frac{\theta}{2}$. Deci lungimea cardioidei (fig. 348) : $2.\widehat{APO} = 8a$, cu $O(0, \pi)$. Avem $\operatorname{tg} V = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}(\pi/2 + \theta/2)$, deci normala şi raza vectoare fac unghiul $\varphi = V - \pi/2 = \theta/2$. *Obs.* Pentru cardioida $\rho = a(1 - \cos\theta_1)$ găsim $V_1 = \theta_1/2$.

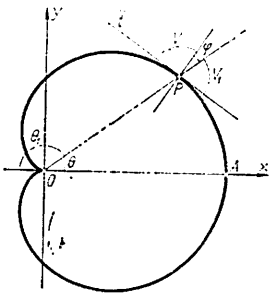


Fig. 348

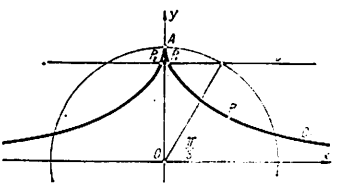


Fig. 349

119 Fie tractricea (54). Se cere : a) Să se calculeze lungimea arcului determinat de dreapta $y = a\sqrt{3}/2$. b) Cu $A(\pi/2) = (0, a)$ origine a arcelor, suma $s + x$ a lungimii arcului tractricei şi a abscisei punctului $P(\theta > \pi/2) \in$ (54) tinde către o limită finită, cînd P tinde către infinit.

R. a) Ecuaţia $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ admite soluţia $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$; deci d taie pe C în $P_1(\theta_1 = \pi/3)$ şi $P_2(\theta_2 = 2\pi/3)$; cum arc $P_1AP_2 = 2$ arc P_1A, găsim (fig. 349) : $s = 2a \ln \sin\theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = a \ln \frac{4}{3}$. b) Fie $s = \text{arc}\, AP = a \ln \sin\theta = a \ln \frac{y}{a}$. Deci $s + x = a[\ln(1 - \cos\theta) + \cos\theta] \to a(-1 + \ln 2)$ cînd $\theta \to \pi$.

120 Se dă curba lănţişor (52) ; fie P' şi P'' proiecţiile pe axe ale lui $P \in (52)$, Q proiecţia lui P' pe tangenta în P, iar T_0 punctul de contact al tangentei din P'' la cercul $\Gamma\,(O\,;\,OA)$, paralelă cu tangenta în P la lănţişor, A fiind vîrful curbei (fig. 350). Dacă vîrful A se ia ca origine a arcelor, să se arate : a) Lungimea arcului AP e

$$s = s(\widehat{AP}) = a \operatorname{tg}\theta, \tag{174}$$

unde θ e unghiul format de tangenta în P la lănţişor cu axa Ox. b) $s(\widehat{AP}) = s(\overline{QP})$. c) Locul punctului Q e o tractrice.

121 Normala în P la o parabolă Γ şi perpendiculara în focarul ei F pe FP se taie în Q ; simetricul M al lui F faţă de mijlocul M' al lui PQ, cînd P descrie pe Γ, generează o parabolă divergentă, numită *trisectoarea Catalan* (sinonim : *cubica Tschirnhausen*). Se cere : a) Să se afle lungimea buclei acestei curbe. b) Să se arate că arcul curbei e funcţie raţională de coordonatele punctului curent. c) Dacă o cubică unicursală C_3 e o curbă de tip Salmon, atunci C_3 e cubica Tschirnhausen. d) Curba normalelor unei parabole în raport cu axa şi cu punctul ce se află la o treime de vîrf din distanţa focală.

R. Fie $\Gamma: y^2 = 2p\,(x + p/2)$; atunci (fig. 351)

(175) $$(x + 2p)^3 = \frac{27\,p}{2}\,(x^2+y^2);\ 2\rho\cos^3\frac{\theta}{3} = -p;\ x = \frac{3t^2 - p^2}{2p},\ y = \frac{(3p^2 - t^2)t}{2p^2},$$

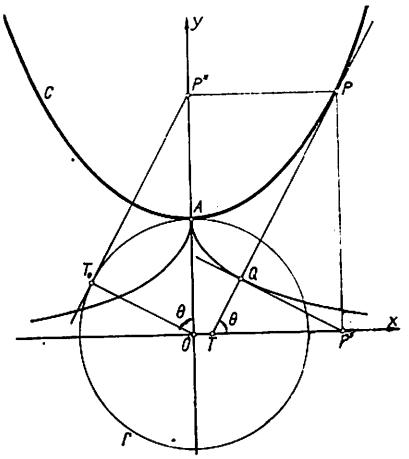


Fig. 350

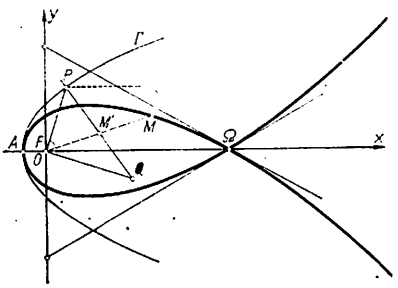


Fig. 351

fiind o parabolă divergentă de tipul $y^2 = a(x - \alpha)^2\,(x - \beta)$ cu $3a(\alpha - \beta) = 1$. Are un nod în $\Omega(4p, 0)$. cu tangentele $y = \pm\sqrt{3}(x - 4p)/3$; mai taie axa de simetrie Ox în $A(-p/2, 0)$. *Obs.* Prin $x = -X + 4p,\ y = -Y$, rezultă $(a = 9p/2)$

(175′) $$x^3 = a(x^2 - 3y^2);\ x = a(1 - 3t^2),\ y = at(1 - 3t^2),$$

ce poate fi ușor reprezentată grafic (tabela 28, fig. 352). a) Pentru (175): $ds = \frac{3}{2p^2}\,(t^2+p^2)\,dt$; deci $s = 2\left(\frac{3}{2p^3}\left|p^2t + \frac{t^3}{3}\right|_0^{p\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3}\,p$. *Obs.* Pentru (175′): $ds = a\,(1 + 9t^2)\,dt$; deci $s =$

Tabela 28:

t	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
x'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y'		$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{dx}$		$-$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+$
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$	
x	$-\infty$	$-a$	0	$\frac{2a}{3}$	a	$\frac{2a}{3}$	0	$-a$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\sqrt{\frac{2}{3}}a$	0	$-\frac{2a}{9}$	0	$\frac{2a}{9}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}a$	$-\infty$
		C′	O	B′	A	B	O	C	

$= 2\int_{-1/\sqrt{3}}^{0} ds = \frac{4a}{3}$. b) Pentru (175'), cum $t = \frac{y}{x}$, găsim $s = (2a - x)\, y/x$. c) C_3 are un punct dublu; deci C_3: $F(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fy^2 = 0$. Luînd $F_x^2 + F_y^2 = \lambda(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x)^2$ și $af \neq 0$, deducem $b = c = d = 0$ și $f = -3$ *e.* d) Cu O în punctul considerat, deci $F(p/3, 0)$. parabola: $y^2 = 2px + p^2/3$; deci $X = x$, $Y = -x/y'$, încît $X^3 = -p(X^2 - 3Y^2)/6$, adică (175').

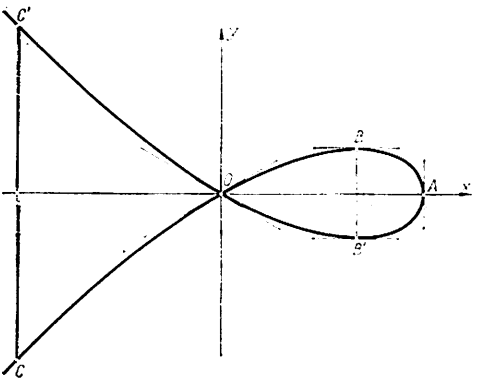


Fig. 352

122 Se numește *curbă Serret* o curbă plană rațională al cărei arc se exprimă prin integrale eliptice sau hipereliptice. Se cere: a) Ecuația diferențială satisfăcută de coordonatele unui punct P al curbei Serret. b) Numind *curbe eliptice de clasa I* curbele definite de

$$x + iy = Ce^{i\omega}\int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\bar{a})(z+\bar{a})^{n+1}}\,dz \text{ cu} \tag{176}$$

$$\frac{(a+\bar{a})^2}{4a\bar{a}} = \frac{a}{n+1}\ (C, \omega \text{ —const.}),$$

cu $a, \bar{a}$ complex conjugate, să se arate că ele sînt curbe Serret.

R. a) Fie $P(x = x(z), y = y(z))$; atunci $dx^2 + dy^2 = Z(z)\,dz$, unde $Z(z)$ e o funcție rațională de z. *Obs.* Cînd $Z = C^2z^2/\sqrt{(z-a)(z-\bar{a})(z-b)(z-\bar{b})}$, arcul se exprimă printr-o integrală eliptică în raport cu z, iar x și y sînt funcții dublu periodice de arc. b) Se obține parametrizarea unei curbe raționale al cărei arc e exprimat de integrala $C\int (dz/\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\bar{a}^2)})$. *Obs.* Pentru $n = 1$, se obține lemniscata.

123 Se numește *curbă de lărgime constantă* (sinonim: *curbă de egală lățime*) o curbă închisă care e paralelă cu ea însăși; o astfel de curbă, cînd e convexă, se zice *orbiformă*.

Se consideră o semielipsă situată de o parte a axei mari. În fiecare punct M al ei se ia pe normală, în partea concavității, o lungime MN egală cu axa mare. Locul lui N împreună cu semielipsa formează o curbă închisă Γ. Se cere: a) Să se arate că Γ e o curbă de egală lățime. b) Condiția pe care trebuie să o îndeplinească axa mică pentru ca Γ să fie orbiformă. c) Lungimea acestei curbe depinde numai de lățimea ei, adică e aceeași pentru toate curbele paralele de aceeași lățime (formată după procedeul arătat).

R. Fie $x = a\cos t$, $y = b\sin t (0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Cu $MN = k$, N e dat de (fig. 353)

$$X = a(1 - 2b\mu)\cos t,\ Y = (b - 2a^2\mu)\sin t,\ \mu = 1/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}.$$

a) Notînd $\sigma = 1 - 2a^2b\mu^3$, avem $X' = -a\sigma\sin t$, $X'' = -a\sigma\cos t - a\sigma'\sin t, \ldots$; atunci $X'/x' = Y'/y'$, deci tangentele în M și N la arcele descrise sînt paralele, distanța dintre ele fiind lungimea normalei comune: $2a$. b) Conform problemei 36, fie $\eta'' = (X'Y'' - X''Y')/X' = -b\sigma/\sin t$. Însă minimul fracției din σ (în intervalul fixat avem $\sin t > 0$) e obținut pentru maximul lui $1/\mu^2 = b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t$; deci devine a^2 pentru $t = \pi/2$ iar fracția devine $2b/a$. Dacă $2b \geqslant a$: $-\sigma > 0$; dacă $2b < a$: există valori ale lui t pentru care se schimbă semnul. Deci, dacă $a \leqslant 2b$, Γ e convexă (căci $\eta'' > 0$); ramura descrisă de N are concavitatea spre Oy. c) $X'^2 + Y'^2 = \sigma^2/\mu^2$. Elementul de arc al ramurii descrise de N: $-ds' = ds - 2a^2b\mu^2\,dt$; de unde

$$s + s' = 4a\int_0^{\pi/2} d\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right)\Big/\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 t\right) = 4a\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right)_0^{\pi/2} = 2a\pi.$$

124 Se numeşte *curbă de urmărire* (sinonimă : *curba cîinelui*), relativă la o curbă dată Γ, traiectoria unei particule M ce se mişcă (în planul curbei Γ) cu o viteză de modul constant, astfel încît în fiecare moment al mişcării se îndreaptă spre o particulă P, care se mişcă pe Γ tot cu o viteză de modul

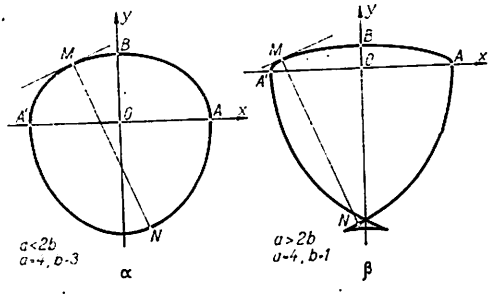


Fig. 353

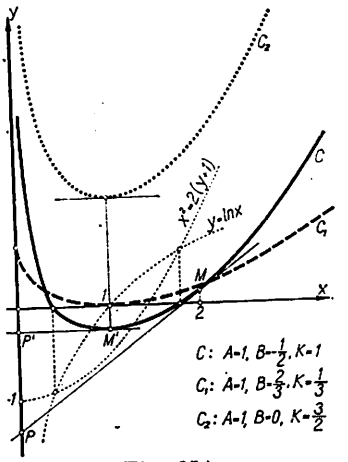


Fig. 354

constant. Se cere : a) Să se arate că o astfel de curbă e o integrală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea

$$f(x, y, y', y'') = 0. \tag{177}$$

b) Să se cerceteze cazul cînd curba Γ e o dreaptă.

R. Fie $\Gamma : F(x, y) = 0$ şi $C : y = y(x)$. Tangenta în $M(x, y)$ la C

$$Y - y = y'(X - x) \tag{178}$$

trece prin $P(X(x), Y(x)) \in \Gamma$. Cu v şi V modulele vitezelor lui M şi P :

$$dS/V = ds/v, \text{ adică } (dX/dx)^2 + (dY/dx)^2 = k^2[1 + (dy/dx)^2],\ k = V/v. \tag{178'}$$

Eliminînd X, Y, dX/dx, dY/dx din ecuaţia lui Γ, (178), derivatele lor şi (178'), obţinem (177). b) Cu $\Gamma = Oy$, deci $\Gamma : X = 0$, ecuaţia (177) se scrie

$$x^2y''^2 = k^2(1 + y'^2). \tag{177'}$$

Cu $y' = \operatorname{sh} t$, deducem $t = \ln Cx^k$ şi (177') devine $y' = (Cx^k - 1/Cx^k)/2$. Pentru $k = 1$: $y = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}x^2 - \frac{1}{A}\ln x\right) + B$. Pentru $k \neq 1$: $y = \frac{1}{2}(Ax^{k+1}/(k+1) + 1/(k-1)\,Ax^{k-1}) + B$; sînt curbe algebrice cînd k e raţional, fiind parabole de ordin superior cînd k e număr întreg (fig. 354).

125 Dacă $\bar{\rho} = \rho\bar{e}$ este vectorul de poziţie al punctului P de pe curba C, unde $\bar{e} = \text{versor}\ \bar{\rho} = \cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$ cu $\theta = \sphericalangle(\bar{i}, \bar{\rho})$, să se deducă elementul de arc în coordonate polare. *Apl.* Să se calculeze lungimea arcului spiralei lui Arhimede de la pol la punctul curent.

126 Fiind dată o spirală logaritmică, să se arate : a) Arcul spiralei de la pol la un punct P al curbei e proporţional cu raza vectoare a lui P. b) Lungimea arcului P_1P_2 al spiralei e egală cu diferenţa tangentelor polare în P_1 şi P_2.

7. CONTACTUL A DOUĂ CURBE PLANE

127 Să se determine ordinul de contact dintre curbele:
a) $C_1 : y = \sin x$ şi $C_2 : y = \operatorname{tg} x$ în origine;
b) $C_1 : y = \sin x$ şi $C_2 : (x - \pi/2)^2 + y^2 = 1$ în punctul comun $A(\pi/2, 1)$;
c) $C_1 : y = ax^3$ şi $C_2 : y = x \sin x$ în origine.

R. a) $C_i : y = y_i(x)$ au contact de ordin n în punctul $P_0(x_0, y_0)$ dacă

(179) $$y_1^{(\alpha)}(x_0) = y_2^{(\alpha)}(x_0),\ y_1^{(n+1)}(x_0) \neq y_2^{(n+1)}(x_0)\ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Curbele date sînt în contact de ordinul doi. b) $C_1 : x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $C_2 : F(x, y) = 0$ sînt în contact de ordin n în punctul $P_0(t_0)$ dacă

(179') $$\Phi^{(\alpha)}(t_0) = 0,\ \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0 \text{ cu } \Phi(t) = F(x(t), y(t))\ (\alpha = 0, 1, \ldots, n).$$

$C_i (i = 1, 2)$ — contact de ordin trei. c) Contact de ordinul întîi.

128 Să se determine punctul comun şi ordinul de contact dintre curbele: a) $y = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 3$ şi $y = 2x^4 - 1$; b) $y = e^x$ şi $y = x^2/2 + x + 1$; c) $y = x^4$ şi $y = x^2 \sin^2 x$; d) $y = 1/(x^2 + 1)$ şi $y = 1 - x^2$.

129 Se numeşte *curbă binomă* o curbă C pentru care tangenta în P la C determină cu 2 drepte ortogonale fixe (de intersecţie O) un triunghi OTT' a cărui arie e proporţională cu aria triunghiului $OP'P''$, unde P' şi P'' sînt proiecţiile lui P pe dreptele fixe. Se cere: a) Să se afle ecuaţia carteziană a unei astfel de curbe. b) Să se arate că C e determinată prin 2 puncte ale ei; să se deducă de aici o construcţie a curbei. c) Să se găsească curbele binome de arie constantă. d) Folosind subtangentele relative la cele 2 drepte fixe să se dea o construcţie a tangentei. e) Notînd cu H proiecţia lui O pe normala în P la C, să se arate că centrul Ω al cercului osculator în P (la C) e a doua intersecţie a normalei PH cu cercul Γ_1 circumscris triunghiului $TT'H$.

R. a) Cu dreptele fixe ca axe (fig. 355), fie $C : y = y(x)$. Tangenta în $P(x, y) \in C$ le taie în $T((xy' - y)/y', 0)$ şi $T'(0, y - xy')$. Din egalitatea ariilor $S_{OTT'} = k S_{OP'P''}$: $x^2y'^2 + (k - 2)xyy' + y'^2 = 0$ sau $y'_i = m_i y/x$ cu $m_1 m_2 = 1$, $m_1 + m_2 = 2 - k$ $(i = 1, 2)$; ceea ce înseamnă că sînt 2 curbe binome pentru un k dat. Deci

(180) $$C : y = ax^m\ (a, m \in R \text{ cu } m \neq 0 \text{ şi } 1;\ k = -(m - 1)^2/m).$$

C e o curbă transcendentă sau algebrică, după cum m e iraţional sau raţional. Dacă $m > 0$, C e o curbă *binomă parabolică* (v. probl. 78). Dacă $m < 0$, C se numeşte *curbă binomă hiperbolică* (sinonim: *hiperbolă generalizată de indice m, hiperbolă de ordin superior sau de ordinul m*); C nu trece prin O şi are aximtotele Ox şi Oy (fig. 355 b). De exemplu, în teoria gazelor perfecte se obţin *curbele adiabatice*, date de legea lui *Poisson*: $pv^k = \text{const.}$ (p — *presiunea*, v — volumul şi $k = 1{,}41$ pentru aer); în teoria maşinilor cu aburi se folosesc astfel de curbe, numite *curbe de expansiune*. Pentru $m = -p/q$ cu $p + q = 1$ $(p, q > 0)$, C se numeşte *curbă politropă*; cu $p = \cos^2\alpha$, $q = \sin^2\alpha$ şi A_1, A_2 punctele în care normala în P la C taie cercul Γ_2 circumscris triunghiului OTT' (fig. 355 a), avem $\widehat{A_1OT} = \widehat{TOA_2} = \alpha$ sau $\pi - \widehat{A_1OT} = \widehat{TOA_2} = \alpha$, deci A_1 şi A_2 aparţin unor drepte fixe $d_1 = OA_1$ şi $d_2 = OA_2$, numite *axele curbei politrope*. Deci $P \in C$ e mijlocul segmentului determinat de punctele comune normalei în P la C cu axele lui C. În A comun lui C şi d_2, tangenta la C e perpendiculară pe d_2; A e *vîrf* al lui C. Curbele politrope sînt curbe W (v. probl. 21).

b) Fie $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1) \in C$; avem $a = \dfrac{y_0}{x_0}$, $m = \left(\ln \dfrac{y_0}{y_1}\right) \Big/ \left(\ln \dfrac{x_0}{x_1}\right)$, $P_n(x_1^{n+1}/x_0, y_1^{n+1}/y_0) \in C (n \in Z)$. Construcţia grafică (fig. 335 c): Fie Ou şi Ov (arbitrare); paralele prin P_0 şi P_1 la Oy taie pe Ox şi Ou în P'_0, P'_1 şi U_0, U_1; paralela prin U_1 la $U_0P'_1$ taie pe Ox în P'_2; la fel, cu ajutorul lui Ov, construim pe P''_2: P'_2 şi P''_2 sînt proiecţiile lui P_2 pe Ox şi Oy. Iterînd, se obţin

y
x
C
0
P
A
T
T*
H
H*
A_1
A_2
A_1^*
A_2^*
d_1
d_2
Ω
$Γ_1$
$Γ_2$
$Γ_2^*$

a

y
x
C
v
u
0
V_0
V_1
U_0
U_1
P_{-1}
P_0
P_1
P_2

c

Fig. 355

y
x
a
-a
-1
0
1
α
β
γ
δ
a=4
α; m=-2
β; m=-1/2
γ; m=-3
δ; m=-1/3

b

alte puncte ale lui C. c) $S_{OTT'} = k\, S_{OP'P''} = \text{const.}$ dacă $xy = \text{const.}$: *hiperbola echilateră e singura curbă binomă de arie constantă. Obs.* c_1) La parabola $C: y^2 = 2px$, $k = -1/2$. c_2) Pentru cercul $C(O; a)$: $S_{OTT'} = k/S_{OP'P''}$ cu $k = a^4/4$. d) $P'T = -x/m$, $P''T' = -my$. *Obs.* Cazurile parabolei ($m = 1/2$) şi al hiperbolei echilatere ($m = -1$) sînt cunoscute. e) Cum $H((x + yy')/(1+y'^2), y'(x+ + yy')/(1 + y'^2))$, obţinem $PT.PT' = xy(1 + y'^2)/y'$, $PH.P\Omega = (1 + y'^2)|y - yx'|/y''$. Pentru C de ecuaţie (180): $PT.PT' = PH.P\Omega = x^2(1 + y'^2)/m$. *Obs.* e_1) $R = PT.PT'/PH$. e_2) Pentru o curbă politropă: $R = p^2q^2t^3/xy$ cu $t^2 = x^2/\cos^4\alpha + y^2/\sin^4\alpha = TT'^2$.

130 Să se găsească cercul osculator Γ al curbei C în punctul ordinar P_0 ştiind că Γ are cu C cel puţin trei puncte confundate în P_0. *Apl.* Cercul Γ: $(x - 3a)^2 + (y - 3a)^2 = 8a^2$ şi parabola $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$ au un contact de ordinul 3 în punctul comun $A(a, a)$.

R. Cu dezvoltarea în serie Taylor a lui (29) într-o vecinătate a lui $P_0(t_0) \in C$, ecuaţia eliminant între (29) şi (90) se scrie (omiţînd indicele o) $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma + 2(t - t_0)(xx' + yy' + \alpha x' + \beta y') + (t - t_0)^2(xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2 + \alpha x'' + \beta y'') + \ldots = 0$; ecuaţia are rădăcina triplă $t = t_0$ (3 puncte confundate în P_0) dacă

$$2\alpha x + 2\beta y + \gamma = -(x^2 + y^2),\ \alpha x' + \beta y' = -(xx' + yy'),\ \alpha x'' + \beta y'' = -(xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2).$$

Ultimele 2 ecuaţii permit determinarea lui α şi β, iar din prima ecuaţie deducem pe γ. *Apl.* Eliminînd y, obţinem $(x - a)^4 = 0$.

131 Se numesc *curbe sintrepente* două curbe C şi C^*, astfel încît fiecare din ele să admită o mişcare de rotaţie în jurul cîte unui punct, O pentru C şi O^* pentru C^*, în cursul căreia să fie în contact fără să alunece una pe cealaltă. Se cere: a) Fiind dată una din curbele sintrepente C şi C^*, să se găsească cealaltă curbă. b) Numind *curbe isotrepente* curbele care sînt sintrepente cu ele însele, să se arate că ele sînt reprezentate de o ecuaţie de forma

$$\theta = \int \frac{F(\rho, k-\rho)}{\rho}\, d\rho,\ F\text{-funcţie simetrică în } \rho \text{ şi } k - \rho\ (k\text{-const.}).$$

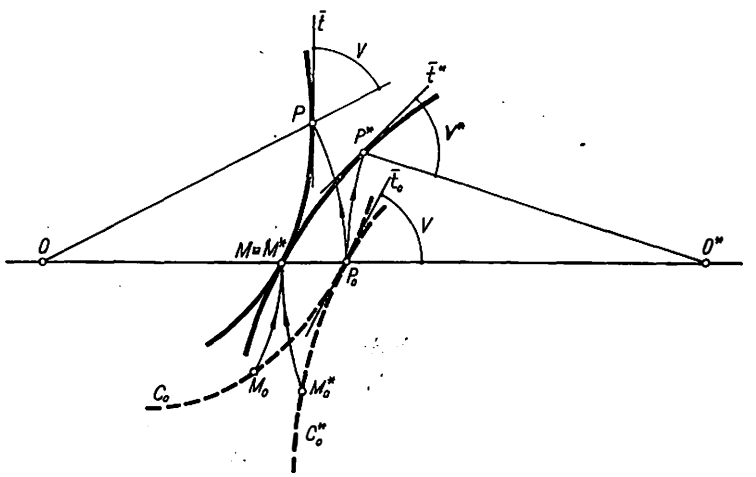


Fig. 356

R. a) Pentru 2 puncte corespondente P şi P^*, avem (fig. 356)

$$OP + O^*P^* = OO^*,\ V = V^*,\ \text{adică}\ \rho + \rho^* = k,\ \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \rho^*\frac{d\theta^*}{d\rho^*}$$

dacă raportăm curbele la 2 repere polare cu OO^* ca axă polară comună și cu polii în O și O^*. Dacă $C:\theta = \varphi(\rho)$ și $C^*:\theta^* = \psi(\rho^*)$, atunci

$$\rho\varphi'(\rho) = -(k-\rho)\psi'(k-\rho);\ \text{deci}\ \varphi(\rho) = -\int \frac{(k-\rho)\psi'(k-\rho)}{\rho}\,d\rho.$$

b) Sînt determinate de ecuația diferențială $\rho\psi'(\rho) = -(k-\rho)\psi'(k-\rho)$. De exemplu: cercul, elipsa; pentru $F = k$ se obține spirala logaritmică $\rho = ae^{\theta/k}$.

132 Să se afle dreapta osculatoare în punctul curent al unei curbe. *Apl.* a) Se cere relația între coeficienții parabolei cubice $y = x^3 + px + q$ pentru ca să fie tangentă axei Ox. b) Să se găsească parabola de ordinul 5: $y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$ care să fie în contact de ordinul 2 cu dreptele $y = h$ și $y = -h$ în punctele (a, h) și $(-a, -h)$. c) Pentru valoare a lui a, curba $y = a^x$ e tangentă dreptei $y = x$?

R. Fie $C: y = f(x)$ și $d: y = mx + n$. Conform cu (179'), condițiile de contact în P_0 dau $m = f'(x_0)$, $n = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$: *dreapta osculatoare e tangenta la curbă.* Dacă tangenta are cu C un contact $n>1$, d e *supraosculatoare* (sinonim: *tangentă staționară*). Cu $f(x)$ dezvoltată după formula lui Taylor, distanța de la $P \in C$ la tangenta în P_0 la C e

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x_0)}}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots\right] = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!\sqrt{1+f'^2(x_0)}}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$$

dacă $f^{(k)}(x_0) = 0$ pentru $k = 2, 3, \dots, n$. Cum $f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$ păstrează același semn (f e de clasă C^{n+1}), semnul lui δ depinde de semnul lui $(x-x_0)^{n+1}$. Deci: *Un punct P_0 cu tangentă staționară e punct de inflexiune sau de ondulație, după cum contactul e de ordin par sau impar. Apl.* a) Din (179'): $\Phi(x) = (3x^2 + p)x - 2x^2 + q = 0$, $\Phi'(x) = 3x^2 + p = 0$; deci $x = \sqrt[3]{q/2}$ și $4p^3 + 27q^2 = 0$. b) $y = h\,[3(x/a)^5 - 10(x/a)^3 + 15(x/a)]/8$. c) $\Phi(x) = a^x - x = 0$, $\Phi'(x) = a^x \ln a - 1 = 0$; deci $a = e^{1/e}$ și $(x = e, y = e)$ — punct de contact.

133 Fiind date curba $C: x = x(t), y = y(t)$ și familia de parabole Γ: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, să se determine: a) parabola osculatoare în punctul curent; b) parabolele supraosculatoare. *Apl.* Să se afle: a) parabola osculatoare Γ în punctul $(\pi/2, 1)$ la sinusoida $C: y = \sin x$; b) parabolele supraosculatoare Γ ale elipsei C: $x = a\cos t, y = b\sin t$.

R. a) C și Γ au (în P) un contact de ordinul 2. b) $\Phi'''(t) = 0$ dă valorile lui t cărora le corespund punctele de contact ale parabolelor *Apl.* a) $y = -x^2/2 + \pi x/2 + 1 - \pi^2/8$. b) În vîrfurile $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$ obținem $y = -bx^2/2a^2 + b$ și $y = bx^2/2a^2 - b$.

134 Dacă d e o dreaptă fixă iar n e un număr dat, se numește *curbă Ribaucour de directoare d și indice n* o curbă C astfel încît

$$PN = nP\Omega, \tag{181}$$

unde Ω e centrul cercului osculator în P (arbitrar) $\in C$, N e punctul comun normalei în P la C cu d. Să se studieze o astfel de curbă.

R. Cu $d = Ox$, o curbă Ribaucour de indice n e dată de ecuația diferențială

$$y(x'y'' - x''y') = nx'(x'^2 + y'^2);\ yy'' = n(1 + y'^2)\ \text{cu}\ x = \int_0^y dy/\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}, \tag{181'}$$

cînd $O \in C$ (c — constantă arbitrară). Dacă $1/n \in Z$, integrala se efectuează prin funcții elementare; astfel, punînd $n = -1/(m+1)$, se obține

$$x = (m+1)c\int_0^\varphi \sin^{m+1}\varphi\,d\varphi,\ y = c\sin^{m+1}\varphi. \tag{181''}$$

Curbele Ribaucour (181″) se împart în 4 clase : I) Dacă $m+1$ e un număr întreg pozitiv impar, C e o curbă raţională de ordin $2(m+1)$, simetrică faţă de $d = Ox$, punctele ciclice fiind multiple de ordin $m+1$. Pentru $m = 0$, C e un cerc. II) Cînd $m+1$ e un întreg pozitiv par, C e transcendentă, cu o infinitate de arce de forma celor de cicloidă. Pentru $m=1$, se obţine însăşi cicloida. III) Dacă $m+1$ e un întreg impar negativ, C e transcendentă. Pentru $m=-2$, se găseşte lănţişorul. IV) Cînd $m+1$ e un întreg par negativ, C e unicursală de ordin $m+1$. Pentru $m=-3$, C e o parabolă.

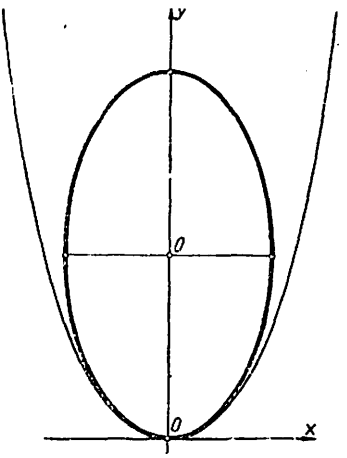


Fig. 357

135 Să se afle conica osculatoare Γ într-un punct P la o curbă C. *Apl.* a) În vîrful lănţişorului. b) Pentru o cisoidă. c) Pentru o spirală logaritmică.

R. Conica Γ, depinzînd de 5 parametri, e osculatoare dacă are cu C un contact de ordinul 4. Luînd $O \in C$ şi tangenta în O la C ca Ox, deci $x_0 = y_0 = 0$ şi $y_0' = 0$, cu (29_1) în (77), din (179′) deducem sistemul ce determină coeficienţii conicei Γ. De exemplu pentru $C : y = y(x)$, obţinem

$$9y_0''^4x^2 + 6y_0''^2y_0'''xy - (4y_0'''^2 - 3y_0''y_0^{IV})y^2 - 18y_0''^3y = 0.$$

Apl. a) $C : y = a\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a} - 1\right)$ cu vîrful O; Γ (elipsa) : $3x^2 + y^2 - 6ay = 0$ (fig. 357). b) Γ e totdeauna o elipsă. c) Elipse ale căror axe mari formează un unghi constant cu raza vectoare a punctului de contact.

136 Se numeşte *punct sextactic* un punct P al unei curbe C în care conica osculatoare are cu C un contact de ordinul 5. Să se cerceteze dacă lănţişorul are astfel de puncte.

137 Fiind dată o elipsă E, se cere : a) Să se găsească locul mijloacelor coardelor comune elipsei E şi cercului ei osculator Γ. b) Să se afle locul picioarelor perpendicularelor coborîte din centrul elipsei pe coardele comune lui E şi Γ. c) Să se arate că, dacă patru puncte $A_i\,(i = 1, 2, 3, 4) \in E$ sînt conciclice, cercurile osculatoare în A_i retaie pe E în patru puncte A_i' de asemenea conciclice.

R. Fie $E : x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ sau $x = a(1-t^2)/(1+t^2)$, $y = 2bt/(1+t^2)$ cu $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$. Cu E în Γ de ecuaţie (90), obţinem ecuaţia eliminant

$$a^2(1-t^2)^2 + 4b^2t^2 + \alpha a(1-t^2)(1+t^2) + 2\beta b(1+t^2) + \gamma(1+t^2)^2 = 0;$$

în această ecuaţie, coeficienţii lui t şi t^3 sînt opuşi, deci $\Sigma t_1 = \Sigma t_1t_2t_3$. Însă $\operatorname{tg}(\Sigma\alpha_1) = (\Sigma\operatorname{tg}\alpha_1 - \Sigma\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3)/(1 - \Sigma\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 + \Pi\operatorname{tg}\alpha_1)$. Dacă $\alpha_i = \theta_i/2$, atunci $\operatorname{tg}\alpha_i = t_i$; deci : *Punctele* $A_i(\theta_i) \in E$ *sînt conciclice dacă* $\sum_{i=1}^{4}\theta_i = 0$. Pentru Γ : $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ şi $\theta_4 = -3\theta$; deci : *Cercul osculator* Γ *la* E *în* $P(\theta)$ *retaie pe* E *în* $P'(\theta' = -3\theta)$. a) $x = a\,cost\cos 2t$, $y = -b\,sint\cos 2t$. b) $4(x^2+y^2)^2 + a^2x^2 + b^2y^2$. c) $\Sigma_i\theta_i' = 0$.

138 Fie Γ o curbă algebrică de grad n, avînd δ puncte nodale şi k puncte de întoarcere; fie, de asemenea, trei puncte oarecare A, B, C nesituate pe Γ. Să se determine numărul conicelor care trec prin A, B, C şi sînt osculatoare la Γ în puncte distincte.

R. Se consideră o transformare pătratică τ care are ca puncte fundamentale pe A, B, C şi care transformă pe Γ într-o curbă Γ' de grad $2n$, avînd A, B, C ca puncte multiple de ordin, n; τ transformă conicele osculatoare ale lui Γ, care trec prin A, B, C, în tangente inflexionare

ale lui Γ'. Un punct multiplu de ordin n echivalînd cu $n(n-1)/2$ noduri, Γ' are $\delta + 3n(n-1)/2$ noduri şi k puncte de inflexiune; după (123), are $i = 3n(n-1) - 6\delta - 8k$ tangente inflexionare. Deci Γ are $3n(n-1) - 6\delta - 8k$ conice osculatoare care trec prin A, B, C.

139 Se numesc *curbe aproximante*, într-un punct P_0 al unei curbe C, acele curbe Γ care au cu C în P_0 un contact (cel puţin) de ordinul 2; dacă familia de curbe Γ depinde de $n+1$ parametri iar contactul e de ordin n, Γ e o curbă osculatoare (în P_0) a lui C. Dacă C are ecuaţia (29_2), se cere: a) Să se afle parabolele aproximante de ordin oarecare în P_0 la C. b) Să se determine cercul osculator în P_0 la C.

R. Dacă (24_2) e tangenta în P_0 la C, deci $m = -F_{x_0}/F_{y_0}$, atunci

$$(182)\quad C: y - y_0 - m(x-x_0) + a_{20}(x-x_0)^2 + 2a_{11}(x-x_0)(y-y_0) + a_{02}(y-y_0)^2 + \ldots = 0.$$

Deci: *În vecinătatea lui P_0, C e reprezentată de tangentă, de o conică aproximantă* (are 3 puncte comune în P_0 cu C) *sau de curbe aproximante de ordin superior, după cum se face abstracţie de termenii de ordinul* 2, 3,... a) Ecuaţia (182) poate fi satisfăcută punînd

$$(183)\qquad y - y_0 = m(x-x_0) + \alpha_1(x-x_0)^2 + \alpha_2(x-x_0)^3 + \ldots,$$

$\alpha_k (k=1, 2, \ldots)$ determinîndu-se prin identificare; în general, seria din membrul doi e convergentă. Curba (183) se numeşte *parabolă aproximantă de ordinul* $k = 1, 2, \ldots$ (în P_0 la C); are $k+2$ puncte confundate în P_0 cu C. De exemplu, *parabola aproximantă de ordin 1* în P_0 la C are ecuaţia

$$(183')\qquad y - y_0 = m(x-x_0) + \alpha_1(x-x_0)^2 \text{ cu } \alpha_1 = -(a_{20} + 2a_{11}m + a_{02}m^2).$$

Obs. a_1) Fie $C: y = y(x)$; în vecinătatea lui P_0, ecuaţia lui C se scrie

$$y - y_0 = y_0'(x-x_0) + \frac{1}{2!}y_0''(x-x_0)^2 + \ldots.$$

Deci: *Curba aproximantă e o parabolă aproximantă.* a_2) Dacă Γ e o curbă osculatoare în P_0 la C, parabolele aproximante în P_0 la Γ coincid. Deci: pentru a găsi o curbă osculatoare Γ de ordin k în P_0 la C, se determină parabola aproximantă de ordin $k-1$, a cărei ecuaţie dă reprezentarea explicită a lui Γ. b) Cu $P_0 = 0$ şi tangenta în $O \neq Ox$, C are ecuaţia (182) cu $x_0 = y_0 = 0$ şi $m = 0$. Cercul osculator Γ în O la C e

$$(184)\qquad y - mx + \alpha(x^2 + y^2) = 0 \text{ cu } \alpha(1+m^2) = a_{20} + 2a_{11}m + a_{02}m^2.$$

α se determină din condiţia că C şi Γ au 3 puncte confundate în O; sau: parabola aproximantă în O la Γ, după (183'), are ecuaţia $y = mx - \alpha(1+m^2)x^2$, care e o aproximantă dacă α e dat de (184). *Obs.* b_1) În vecinătatea lui O, cercul Γ are ecuaţia explicită $y = mx - \alpha(1+m^2)x^2 + \ldots$ b_2) Dacă $a_{20} + 2a_{11}m + a_{02}m^2 = 0$, Γ e o tangentă staţionară (în O la C).

140 Fie: a) *sinusoida cu amplitudini variabile* (sinonim: *curba amortizoare*) de ecuaţie

$$(185)\qquad C: y = \varphi(x)\sin(ax+b),\ \varphi: R \to R \text{ cu } \varphi(x) > 0,\ x \in R,$$

funcţia φ determinînd *curba amplitudinii variabile* $\Gamma: y = \varphi(x)$; b) *sinusoida oscilantă* de ecuaţie

$$(186)\qquad C: y = ax^n \sin\frac{1}{x}\ (n>1),$$

oscilaţia fiind dată de *parabola generalizată* $\Gamma: y = ax^n$; c) curba

$$(187)\qquad C: y = \frac{1}{x}\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right),\ x \in R_+,$$

care oscilează între Ox şi hiperbola echilateră $\Gamma: xy = 2$. Să se arate că C şi Γ sînt în contact într-o infinitate discretă de puncte.

R. a) $y = \varphi'(x)\sin(ax+b) + a\varphi(x)\cos(ax+b)$; avem $\sin(ax+b) = 1$, $\cos(ax+b) = 0$ pentru $x_k = (\pi/2 + 2k\pi - b)/a$ cu $k \in Z$, cînd $y(x_k) = \varphi(x_k)$, $y'(x_k) = \varphi'(x_k)$, iar $C \cap \Gamma = \{T_k(x_k, \varphi(x_k)), k \in Z\}$. *Obs.* C și Γ': $y = -\varphi(x)$ sînt de asemenea în contact în T'_k ($x'_k = (-\pi/2 + 2k\pi - b)/a$, $y_k = \varphi(x_k)$). *Ex.*: a$_1$) $\varphi(x) = 1/x$: C taie Ox în A_h ($h\pi$, 0) cu $h \in Z - \{0\}$; cînd $b = 0$, C taie Oy în A (0, a). Γ e o hiperbolă echilateră (fig. 358; pentru $a = 1$, $b = 0$, v. și fig. 268). a$_2$) $\varphi(x) = \left| 2A_1 \cos \frac{a_2 - a_1}{2} x \right|$, $a = (a_1 + a_2)/2$ și $a_1 \ll a_2$ (v. fig. 23 e). a$_3$) $\varphi(x) = Ae^{-\beta x}$

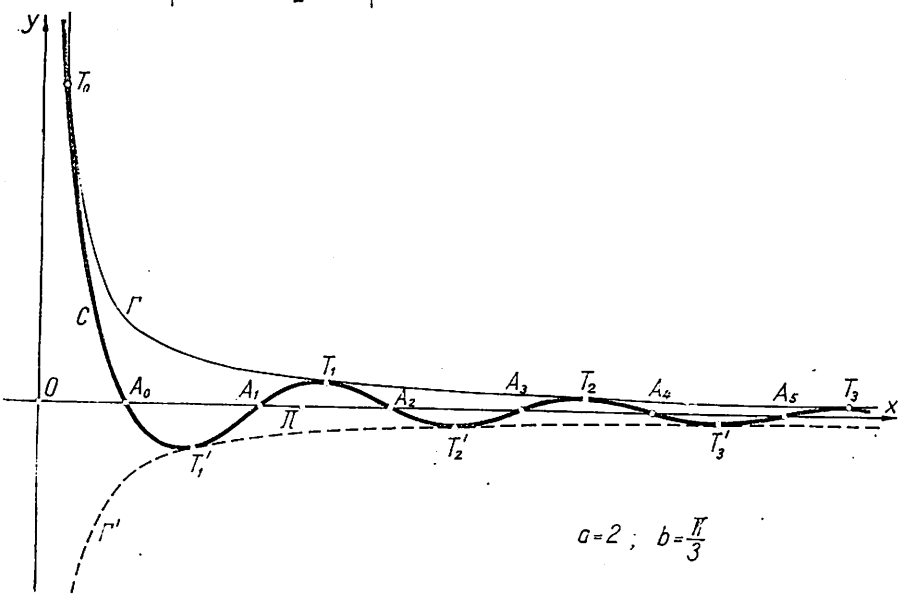


Fig. 358

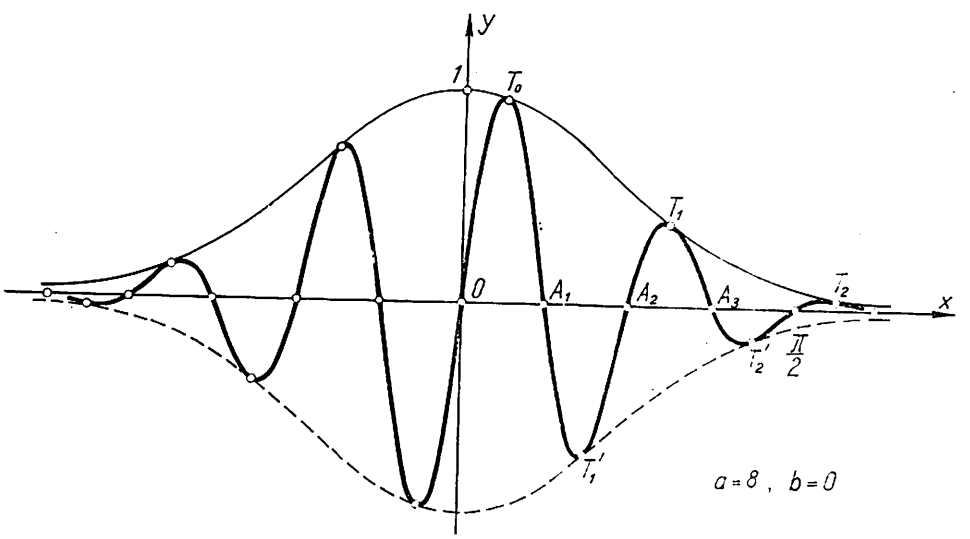


Fig. 359

(v. fig. 23 f); C taie Ox în A_h ($(h\pi - b)/a$, 0) cu $h \in Z$. *Obs.* Dacă $\beta = a$, $y' = 0$ pt. $x''_k = (\pi/4 + k\pi - b)/a$; deci $y(x''_k) = \pm Ae^{-x''_k}/\sqrt{2}$, formînd o progresie geometrică descrescătoare. a$_4$) $\varphi(x) = e^{-x^2}$ (fig. 359). b) Contact în T_k ($x_k = 2/(1 + 4k)\pi$, $y_k = x_k^n$). *Obs.* C și Γ': $y = -x^n$ sînt

în contact. Exemple : b_1) $n = 2$ (v. fig. 125). b_2) $n = 3$ (fig. 360). *Obs.* Γ e o dreaptă cînd $n = 0$ (v. fig. 121) sau $n = 1$ (v. fig. 124). c) Cînd $\sin \frac{1}{x} = 1$, $\cos \frac{1}{x} = 0$ (fig. 361). C nu are direcție asimptotică relativă la O, pentru că y/x oscilează între 0 și ∞. C și Ox sînt în contact cînd $\sin \frac{1}{x} = -1$, $\cos \frac{1}{x} = 0$, deci $x_k = 2/(3 + 4k)\pi$.

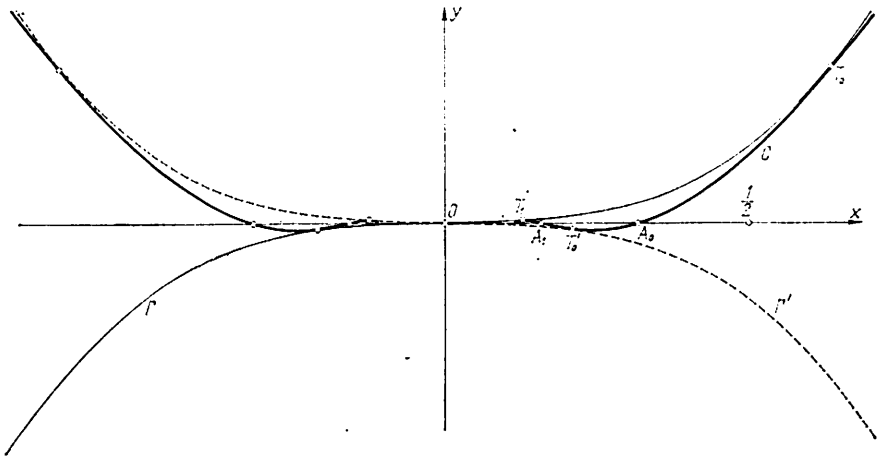


Fig. 360

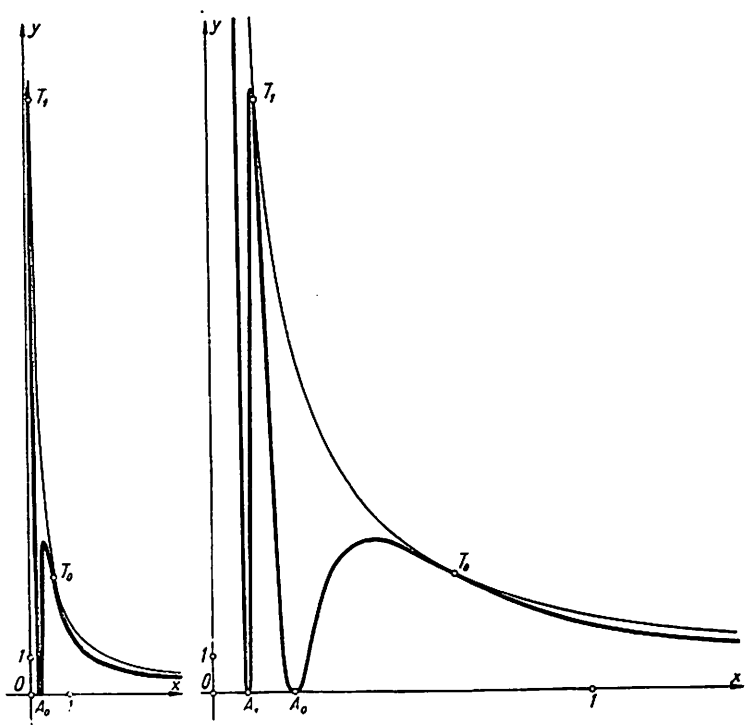


Fig. 361

8. CURBURA UNEI CURBE PLANE

141 Să se găsească raza de curbură a curbei C: a) $x = t^2$, $y = t^3$ în punctul (1, 1); b) $xy = a^2$ în punctul (a, a); c) $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ în punctul (1,−1); d) $y = x^3$ în punctul (1, 1): e) $\rho = a \sin 2\theta$ în punctul $\theta = \pi/4$; f) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$; g) nefroida (48); h) astroida (50); i) tractricea (54); j) $3ay^2 = 2x^3$; k) cardioida (18′); l) $\rho^2 = a \sin\theta$; m) tractricea polară (56).

R. Raza de curbură R în P la C e inversa *curburii* k (în P):

$$(188) \qquad R = \frac{1}{k}, \quad \text{unde } k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \text{ sau } k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3\,2}},$$

după cum C are ecuația (29_1) sau (4). a) $R = 13\sqrt{13}/6$. b) $R = a\sqrt{2}$. c) Cu $y = tx$, $C: x = 2t/(t^3 - 1)$, $y = 2t^2/(t^3 - 1)$; deci $k = 4\sqrt{2}$. d) $R = 5\sqrt{10}/3$. e) $R = a/5$. f) $R = at$. g) $= \frac{3a}{2} \sin\theta$. h) $R = \frac{3a}{2} \sin 2\theta$. i) $k = \frac{1}{a} |\operatorname{tg} t|$. j) $R^2 = (2a + 3x)^3 x/3a^2$. k) $R = \frac{4p}{3} \cos\frac{\theta}{2}$. *Obs.* Curbura e proporțională cu panta tangentei. l) $k = 3a^2\rho\sqrt{2}/(a^2 + \rho^2)^{3/2}$. m) $R = a\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}/(a^2 - 2\rho^2)$ sau $R = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, cu α unghiul dintre normală și raza vectoare.

142 Fie *lănțișorul de egală rezistență* (fig. 362)

$$(189) \qquad y + a \ln \cos\frac{x - b}{a} = 0, \quad -\frac{a\pi}{2} + b \leqslant x \leqslant \frac{a\pi}{2} + b \ (a, b\text{-const.}).$$

Să se arate că, în punctul curent $P(x, y)$ al curbei: a) Curbura curbei e $k = \frac{\cos\theta}{a}$, unde θ e unghiul format de tangenta în P cu Ox. b) Proiecția razei de curbură pe Oy e constantă. Se mai cere: c) Lungimea arcului AP al curbei, A fiind punctul de minim al curbei.

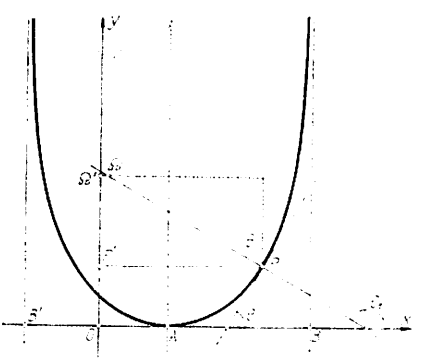


Fig. 362

R. Curba e simetrică față de Oy, e situată în semiplanul $y > 0$ și e convexă; asimptote: $x = \pm a\pi/2 + b$. *Obs.* Curba reprezintă figura de echilibru a unui fir greu, flexibil și inextensibil, ale cărui capete sînt fixate în 2 puncte, densitatea și grosimea firului variind astfel încît rezistența la ruptură e constantă în toate punctele firului.

a) $y' = \operatorname{tg}\frac{x - b}{a} = \operatorname{tg}\theta$, deci $\theta = \frac{x - b}{a}$ iar $k = \frac{1}{a}\cos\frac{x - b}{a}$. b) Cu $\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$. $\bar{n}(\cos\theta_1 = -\sin\theta, \sin\theta_1 = \cos\theta)$ iar $\overline{P\Omega} = R\bar{n}$, $P'\Omega' = pr_y\overline{P\Omega} = R\sin\theta_1 = a$.

c) $s = a \ln \operatorname{tg}(\theta/2 + \pi/4)$.

143 Curbura într-un punct (p, q)-multiplu P_0 al unei curbe $C: x = x(t), y = y(t)$, prin definiție, e valoarea limitei către care tinde curbura într-un punct P al ramurii din vecinătatea lui P_0. Se cere expresia ei.

144 Fie $C: x = x(t), y = y(t)$; să se arate: a) Coordonatele punctului curent P al curbei C verifică ecuația diferențială de ordinul doi

$$\theta'' + a_2\theta' + a_1\theta = 0 \left(\theta' = \frac{d\theta}{dt}\right), \tag{190}$$

ecuația (190) definind și toate *transformatele centro-afine ale lui C*. b) Printr-o schimbare $\sigma = \sigma(t)$ a parametrului pe C, (190) ia forma

$$\ddot{\theta} + p\dot{\theta} \pm \theta = 0 \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\sigma}\right), \tag{190'}$$

unde *invariantul* p se numește *curbură afină* iar σ *arcul afin* al curbei C. c) Curbele cu curbură afină nulă au proprietatea că

$$Rd^3 = \text{const.}, \tag{190 a}$$

unde R e raza de curbură a lui C în P iar d e distanța de la un punct fix Ω din plan (de exemplu, originea axelor) la tangenta în P la C, astfel de curbă fiind numai conicele cu centru. *Apl.* Să se determine condiția ca o curbă $C: x = At^a, y = Bt^b$ să fie cu curbură afină nulă.

R. a) E suficient să scriem că ecuația (190) e verificată de coordonatele lui P pentru a determina pe a_1 și a_2. *Obs.* Fie $C: \bar{r} = \bar{r}(t)$; derivînd de două ori pe $\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j}$ și eliminînd pe $\bar{i}$, $\bar{j}$, obținem

$$\bar{r}'' + a_2\bar{r}' + a_1\bar{r} = 0 \text{ cu } a_i = \Delta_i/\Delta_3 \ (i = 1, 2), \tag{190''}$$

unde Δ_α sînt minorii matricei $\begin{Vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{Vmatrix}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Invers, fie $x(t)$, $y(t)$ două soluții liniar independente ale ecuației (190); soluția generală: $\theta = C_1x(t) + C_2y(t)$ cu C_i — const. Deci alte soluții liniar independente $x_1(t)$, $y_1(t)$ se obțin din primele prin centro-afinitatea

$$x_1 = ax + by,\ y_1 = cx + dy \ (\Delta = ad - bc \neq 0), \tag{190 b}$$

care păstrează originea, curba $C_1: x = x_1(t), y = y_1(x)$ fiind transformata centro-afină a lui C. b) Ecuația transformată e

$$\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_1\theta = 0 \text{ cu } b_1 = a_1/\sigma'^2,\ b_2 = \sigma''/\sigma'^2 + a_2/\sigma'.$$

Eliminînd σ'' între b_1 și b_2, avem $\left(\frac{db_1}{d\sigma} + 2b_1b_2\right)d\sigma^3 = \left(\frac{da_1}{dt} + 2a_1a_2\right)dt^3$. Deci formele diferențiale $a_1\,dt^2$, $\left(\frac{da_1}{dt} + 2a_1a_2\right)dt^3$ sînt invarianți ai transformării (190 b); de asemenea, e un invariant și expresia

$$p = \left(\frac{da_1}{dt} + 2a_1a_2\right)/2a_1\sqrt{\varepsilon a_1} \quad (\varepsilon = \operatorname{sign} a_1). \tag{190'''}$$

Luînd $\sigma'^2 = \varepsilon a_1$, obținem $b_1 = \pm 1$, $b_2 = p$, adică (190'). c) Cum tangenta (în P la C): $y'(X - x) - x'(Y - y) = 0$, atunci $d = \Delta_3/(x'^2 + y'^2)^{1/2}$; ținînd seama de (190) și că $R = (x'^2 + y'^2)^{3/2}/\Delta_1$, deducem

$$Rd^3 = \Delta_3^3/\Delta_1 = \Delta_3^2/a_1 \text{ și } \frac{d}{dt}(Rd^3) = -\Delta_3^2\left(\frac{da_1}{dt} + 2a_1a_2\right)/a_1^2 = -2p(Rd^3)\sqrt{\varepsilon a_1}.$$

Deci: I) *Curbele pentru care avem satisfăcută condiția (190 a) sînt curbe pentru care ecuația (190) se reduce la forma (190') cu $p = 0$ și reciproc.*

II) *Condiția necesară și suficientă pentru ca curba (190) să fie cu curbură afină nulă* e $\frac{da_1}{dt} + 2a_1a_2 = 0$. În acest caz, ecuația (190') se scrie

$$\ddot{\theta} \pm \theta = 0 \text{ cu } \theta = C_1\cos\sigma + C_2\sin\sigma \text{ sau } \theta = C_1e^{\sigma} + C_2e^{-\sigma};$$

deci $C: x = \cos\sigma,\ y = \sin\sigma$ (*cerc* de centru O) și $C: x = e^{\sigma},\ y = e^{-\sigma}$ (*hiperbolă echilateră* cu centrul în O). *Apl.* $Rd^3 = (b - a)^2A^2B^2[2(a + b)/ab = \text{const.}$ dacă și numai dacă $a + b = 0$; deci $C: xy = AB$. *Obs.* În ecuația transformată a lui (190), se poate lua (v. [23], p. 255) noul parametru astfel ca $b_2 = 0$, cînd

$$\sigma = a\int e^{\int a_2\,dt}\,dt + b, \text{ iar } \frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + k(\sigma)\theta = 0,$$

k fiind *invariant centro-afin.* Cînd $k = 0$, curba e o *dreaptă*; pentru k = const., se obţin *conicele cu centrul în origine.*

145 Fie *tangentoida polară de indice* m:

$$\rho = a \operatorname{tg} m\theta \quad (a, m \in R). \tag{191}$$

Se cere: a) Să se arate că subtangenta S_t şi subnormala S_n (polare) satisfac relaţia $S_t \cdot S_n = \rho^2$. b) Să se afle valoarea curburii în pol.

R. Dacă $\theta \in [-\pi/2\, m, \pi/2m]$, atunci $\rho \in R$ iar $P(\rho,\theta)$ descrie o ramură infinită tangentă la Ox în O şi admiţînd asimptotele $y = \pm x \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2m} - a/m \cos\dfrac{\pi}{2m}$ (fig. 363). [Intervalelor $[\pm\pi/2m, \pm 3\pi/2m]$, $[\pm 3\pi/2m, \pm 5\pi/2m]$,... le corespund ramuri egale] cu cea precedentă. Dacă m e iraţional, curba e transcendentă (formată din o infinitate de ramuri). Dacă $m = p/q$ e raţional (cu $(p, q) = 1$ şi $pq > 0$), curba e unicursală (formată din $2p$ sau p ramuri), O fiind un punct multiplu (fig. 364). *Cazuri remarcabile.* I) $m = 1$: *curba kappa* (fig. 364 a; v. şi fig. 347). II) $m =$

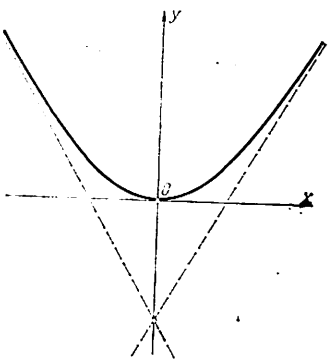


Fig. 363

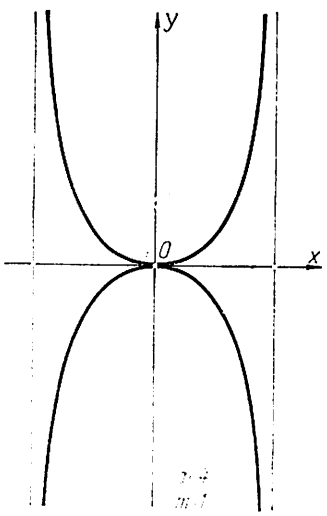


Fig. 364 *a*

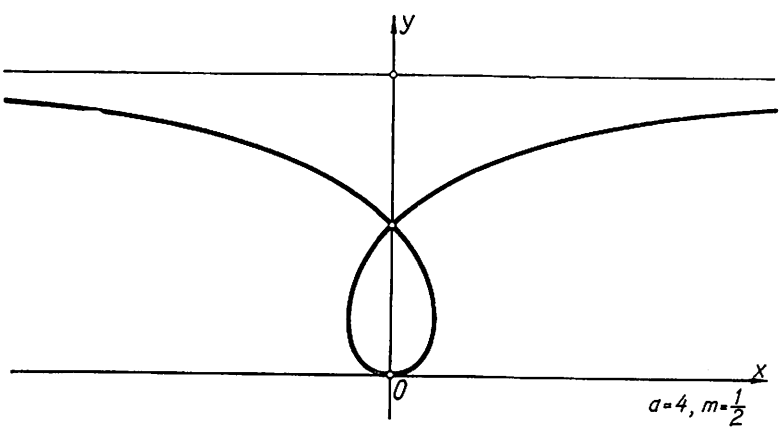
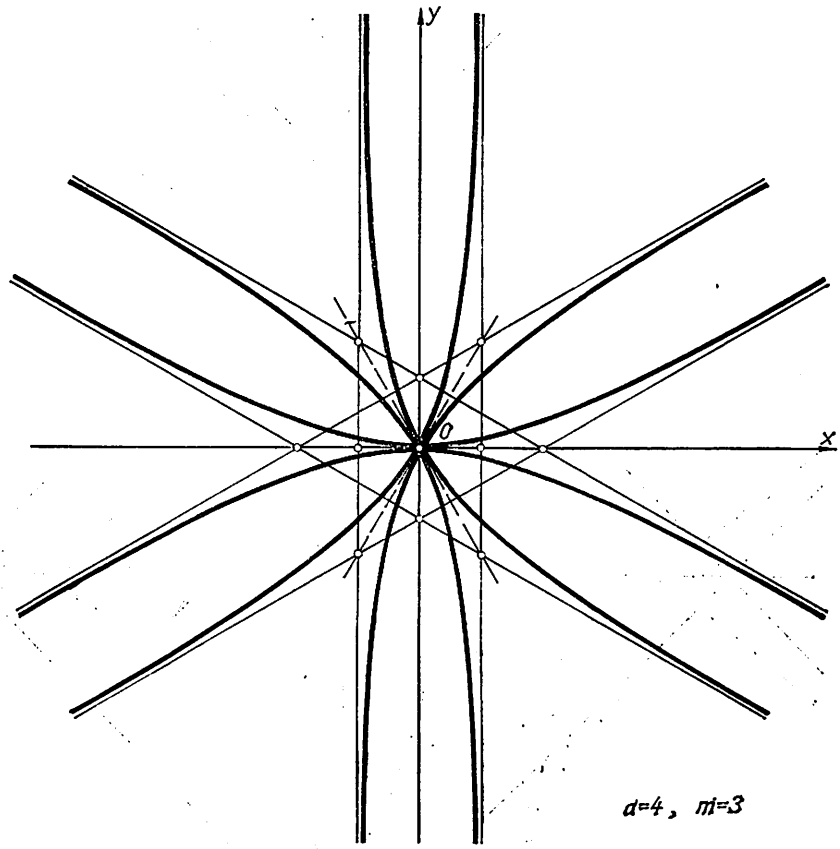


Fig. 364 *b*

c

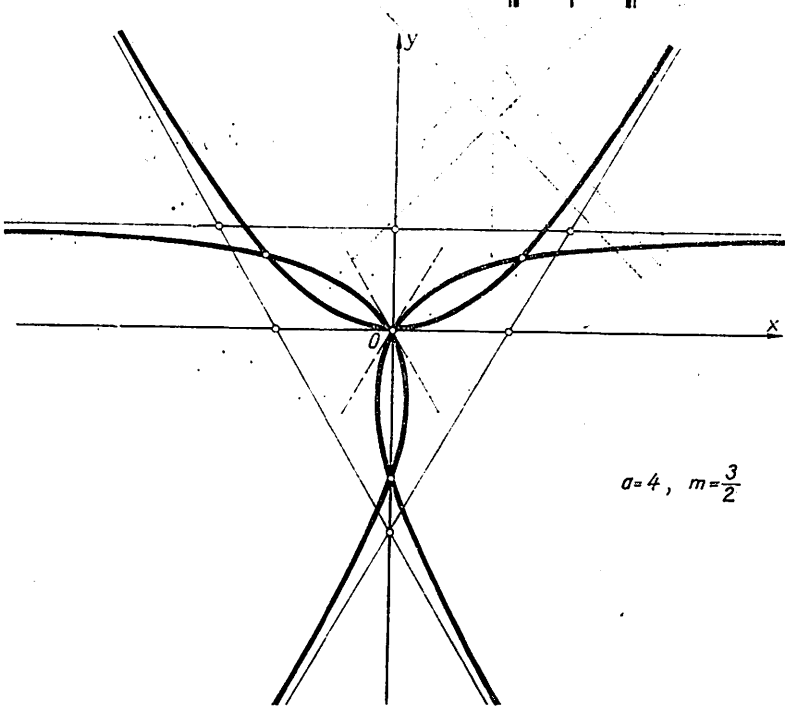
d

Fig. 364 c — d



e

$a=4,\ m=3$



$a=4,\ m=\frac{3}{2}$

f

Fig. 364 e — f

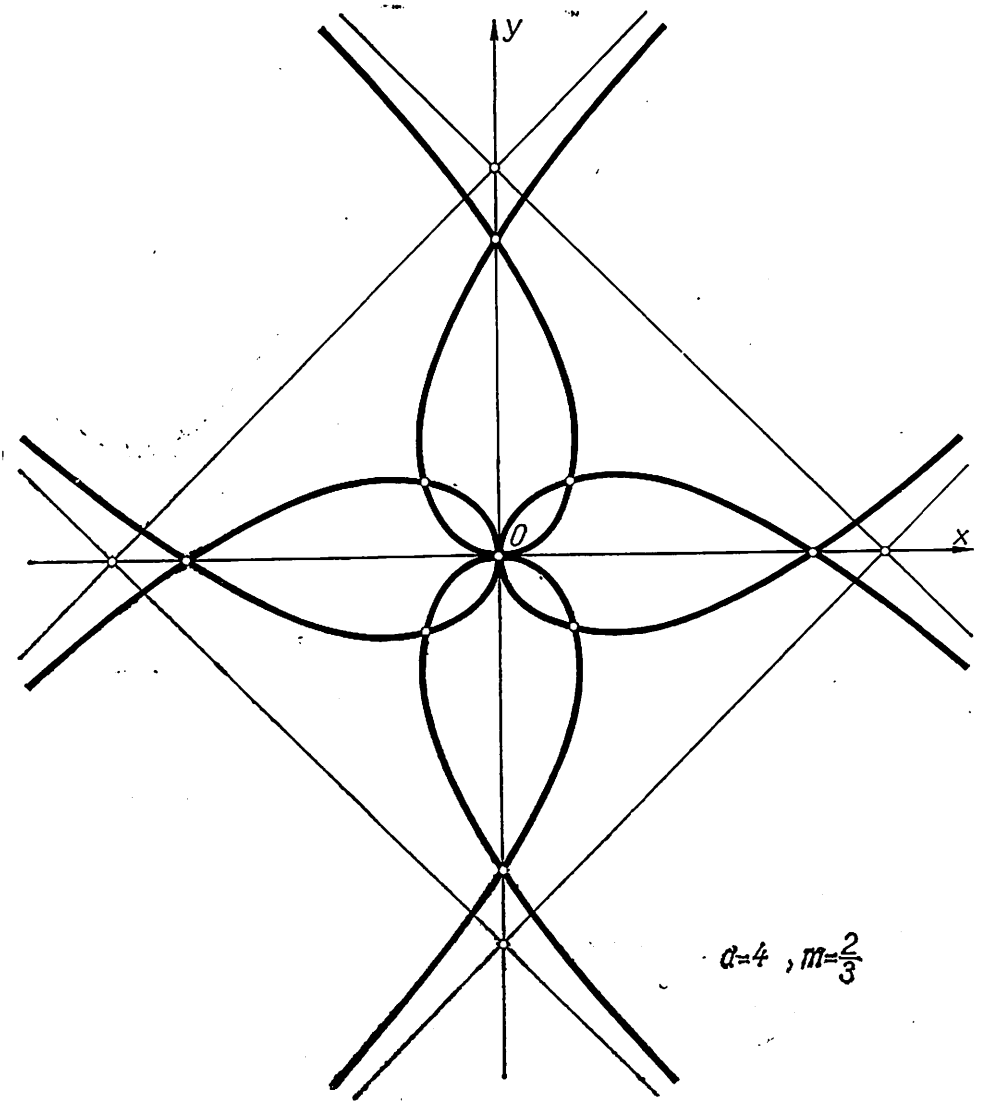


Fig. 364 *g*

= 1/2 : *strofoida dreaptă* (fig. 364b ; v. şi fig. 96). III) $m = 2$:*curba morii de vînt*, care e o sextică circulară (fig. 364 c)

(191') $\rho = a \operatorname{tg} 2\theta$; $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 - 4a^2x^2y^2 = 0$.

a) $S_t = \frac{a}{m} \sin^2 m\,\theta$, $S_n = \frac{am}{\cos^2 m\theta}$. b) $k = \frac{8(\sin^2 m\theta + 2m^2)\cos^4 m\theta}{a(\sin^2 2m\theta + 4m^2)^{3/2}}$ cu $\lim_{\theta \to 0} k = \frac{2}{am}$.

146 Să se găsească curbele pentru care raza de curbură e : a) o funcţie dată de unghiul θ pe care tangenta la curbă îl face cu o dreaptă fixă ; *apl.* : $a_1)\ f(\theta) = a$, $a_2)\ f(\theta) = a/\sin^3\theta$, $a_3)\ f(\theta) = a/\cos^2\theta$, $a_4)\ f(\theta) = a \sin\theta$. b) Proporţională cu segmentul normală.

R. a) Luăm dreapta fixă ca Ox; fie $R = f(\theta)$. Ştim că

$$dx = ds \cos\theta,\ dy = ds \sin\theta \text{ iar } R = \frac{ds}{d\theta}.$$

Integrînd, rezultă o ∞^2 de curbe

$$x = \int f(\theta)\cos\theta\, d\theta + x_0,\ y = \int f(\theta)\sin\theta\, d\theta + y_0.$$

Apl. a$_1$) Cercurile $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$. a$_2$) Parabolele $(y - y_0)^2 + 2a(x + a/2 - x_0) = 0$. a$_3$) Lănţişorul (52); căci $x = a \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + \theta/2)$, $y = a/\cos\theta$. a$_4$) Luăm $x_0 = a/4$, $y_0 = 0$; cicloidă. b) Din $R = k\,PN : 1 + y'^2 = kyy''$ sau (cu $y' = p(y)$) : $dx = dy/p$, $dy/y = kp\,dp/(1 + p^2)$; deci $x = kC_1\int(1 + p^2)^{k/2-1}dp + C_2$, $y = C_1(1 + p^2)^{k/2}$. Cînd $k = 1$: lănţişorul $y = C_1 \operatorname{ch}\dfrac{x - C_1}{C_1}$. Pentru $k = -1$: cercul $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$. Pentru $k = 2$: parabola $(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$. Cînd $k = -2$: cicloida $x = -\dfrac{1}{2}C_1(t - \sin t) + K_2$, $y = -\dfrac{1}{2}C_1 \pm (-1\cos t)$; s-a notat $\operatorname{arctg} p = (\pi - t)/2$, $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} = p$.

147 Fie curba $C : x = x(s)$, $y = y(s)$. Să se demonstreze : a) Notînd prin Δs o creştere a lui s şi prin Δl coarda corespunzătoare, avem

$$\Delta l = \Delta s - \Delta s^3/24R^2 + \cdots.$$

b) Notînd cu Γ cercul osculator în P la C, într-o vecinătate a lui P :

$$C : y = \frac{1}{2R}x^2 + ax^3 + \ldots \text{ şi } \Gamma : y = \frac{1}{2R}x^2 + \frac{1}{8R^3}x^4 + \ldots$$

c) În reperul afin asociat în P la C, avem *ecuaţiile canonice* (sinonim : *ecuaţiile locale*) ale curbei C :

$$x = \frac{s}{1!} - \frac{s^3}{3!R^2} + \ldots,\ y = \frac{s^2}{2!R} - \frac{s^3}{3!R^2}\frac{dR}{ds} + \ldots,$$

unde R, $\dfrac{dR}{ds}$ sînt calculaţi în origine ; *ecuaţia explicită canonică* e

$$C : y = \frac{1}{2!R}x^2 - \frac{1}{3!R^2}\frac{dR}{ds}x^3 + \ldots$$

R. a) $\Delta l = |\bar r(s + \Delta s) - \bar r(s)| = \Delta s\,(1 - s^2/12R^2 + \ldots)^{1/2}$; căci $\bar r'^2 = 1$, $\bar r' \cdot \bar r'' = 0$, $\bar r''^2 + \bar r' \cdot \bar r''' = 0$ iar (conform formulelor Frenet) $\bar r'' = \bar n/R$, $\bar r''' = -\bar l/R^2 - (1/R)'\bar n$ şi $\bar r' \cdot \bar r''' = -1/R^2$. *Obs.* $x''y''' - x'''y'' = 1/R^3$. b) În reperul afin (cînd $P = O$), avem $C : y = \alpha x^2 + ax^3 + \ldots$ şi $\Gamma : x^2 + (y - R)^2 = R^2$, unde $k = 1/R$ e curbura în P la C. În $O : 1/R = 2\alpha$. În vecinătatea lui O, avem $\Gamma : y = R - R(1 - x^2/R^2)^{1/2}$. c) Cum $\bar l_0 = \bar i$, $\bar n_0 = \bar j$, din dezvoltarea în serie Taylor a lui $\bar r(s)$ în $s = 0$:

$$C : \bar r = \frac{s}{1!}\bar i + \frac{s^2}{2!R}\bar j - \frac{s^3}{3!R^2}\left(\bar i + \frac{dR}{ds}\bar j\right) + \ldots$$

Obs. Lungimea l a coardei ce uneşte pe O cu $P(x, y) \in C$ e $l^2 = x^2 + y^2 = s^2 - s^4/12R^2 + \ldots$ Pentru ecuaţia explicită se inversează dezvoltarea $x = x(s)$, punînd $s = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$; a_i se determină din condiţia că s verifică dezvoltarea $x = x(s)$: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$; deci $y = y(s(x))$

148 Se numesc *vîrfuri* ale unei curbe C punctele (ordinare) în care curbura curbei are un extremum. Se cere : a) O condiție prin care să se determine dacă $P \in C$ e vîrf. b) Să se arate că, într-un vîrf $P \in C$, cercul osculator Γ suprapoate curba. *Apl.* a) Să se găsească vîrfurile curbei C : a_1) $y = \sin x^2$; a_2) $y = a \ln(1 - x^2/a^2)$; a_3) $(x^2 + y^2)^2 = xy$. b) Se cere cercul osculator în vîrful curbei logaritmice C : $y = \ln x$.

R. a) Condiția necesară :

(192) $$k' = 0, \text{ adică } R' = 0.$$

Obs. Cu (78″) în (188) : într-un punct P_0 cu tangentă staționară avem

(192′) $$k = 1/R = 0.$$

Fie $C : x = x(s), y = y(s)$; tangenta (la C) în $P_0(s_0)$: $\bar{n}_0 \cdot (\bar{R} - \bar{r}_0) = 0$. Din studiul contactului, folosind formulele Frenet

(193) $$\frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}, \frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{t} \text{ cu } \bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} = (\cos\theta, \sin\theta), \ \bar{n} = (-\sin\theta, \cos\theta) \text{ și } k = \frac{d\theta}{ds},$$

avem $\Phi(s) = \bar{n}_0 \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)$, $\Phi'(s) = \bar{n}_0 \cdot \bar{t}$, $\Phi''(s) = k\bar{n}_0 \cdot \bar{n}$, $\Phi'''(s) = k'\bar{n}_0 \cdot \bar{n} - k^2 \bar{n}_0 \cdot \bar{t}$, $\Phi^{IV}(s) = (k'' - k^3)\bar{n}_0 \cdot \bar{n} - 3kk'\bar{n}_0 \cdot \bar{t}, \ldots$; deci $\Phi_0 = 0$, $\Phi_0' = 0$, $\Phi_0'' = k_0 = 0$, $\Phi_0''' = k_0' = 0$, $\Phi_0^{IV} = k_0'' = 0, \ldots, \Phi_0^{(m)} = k_0^{(m-2)} = 0$, $\Phi_0^{(m+1)} = k_0^{(m-1)} \neq 0$, adică : *Punctul cu tangentă staționară e de ordin m cînd prima derivată diferită de zero a curburii e* $k^{(m-1)}$. *Ex.* : a_1) $C : y = ax^3 + bx$ are în O un punct cu tangentă staționară de ordin 2, deci O e punct de inflexiune (v. fig. 215). a_2) $C : y = ax^4 + bx$ are în O un punct de ondulație (v. fig. 216). b) Γ : $(\bar{R} - \bar{a})^2 = R^2$. Avem $\Phi = (\bar{r} - \bar{a})^2 - R^2 = 0$, $\frac{1}{2}\Phi' = (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{t} = 0$, $\frac{1}{2}\Phi'' = 1 + \frac{1}{R}(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$ și $\frac{1}{2}\Phi''' = R'/R$. Deci, într-un vîrf, avem, $\Phi'''(s) = 0$; reciproca e adevărată. *Obs.* b_1) Ordinul de contact al lui Γ e m dacă prima derivată a lui R diferită de zero e $R^{(m-2)}$. b_2) Cînd $C : y = y(x)$, avem $k = y''/(1 + y')^{3/2}$, $\frac{dk}{dx} = (y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2)/(1 + y'^2)^{5/2}$. În punctele în care $y' = 0$, $y'' \neq 0$, avem $k = y''$, $\frac{dk}{dx} = y'''$; deci : *Nu orice punct de extrem (maxim, minim) nestaționar al lui C e un vîrf al curbei.* b_3. Orice punct ordinar comun lui C și unei axe a ei de simetrie e un vîrf. *Apl.* a_1) O e vîrf. Punctele de extrem, cînd $\pm\sqrt{2}\, x = \sqrt{(2k+1)\pi}$, nu-s vîrfuri (fig. 365). a_2) O e vîrf ; $k = -2/a$ (fig. 366). a_3) $y = x$ e axă de simetrie ; deci $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ sînt vîrfuri (fig. 367). Sau : $2\rho^2 = \sin 2\theta$, $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$; $\frac{dk}{d\theta} = 0$ pentru $\cos 2\theta = 0$, deci pentru $\theta = \pi/4$ și $\theta = 5\pi/4$ cînd $R = 1/\sqrt{2}$. b) În vîrful $A\left(\sqrt{2}/2, \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ avem $a = 2\sqrt{2}$ $b = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 3/2$, $R = 3\sqrt{3}/2$ (fig. 368).

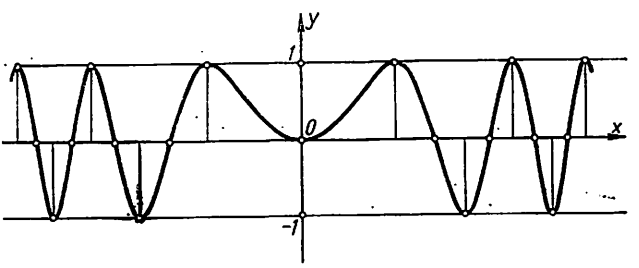


Fig. 365

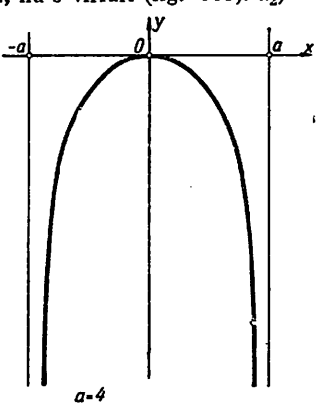


Fig. 366

149 Fiind dată o elipsă E, să se arate că: a) Raza de curbură în $P \in E$ e proporțională cu cubul normalei în P. b) Dacă centrul de curbură în P se află pe diametrul conjugat diametrului corespunzător lui P, atunci cercul de curbură în P e echivalent cu elipsa. c) Elipsa are 4 vîrfuri reale; să se scrie ecuația cercului osculator în vîrf și să se arate că are un contact de ordin

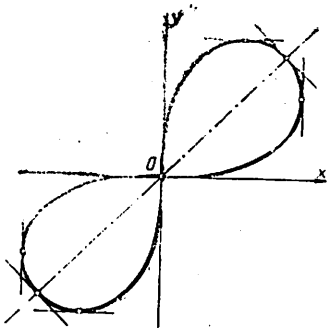


Fig. 367

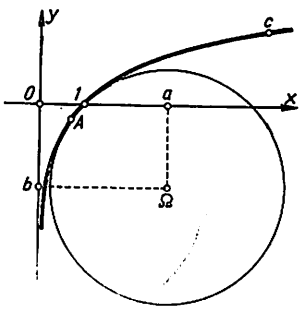


Fig. 368

3 cu elipsa. d) Dacă A și B sînt 2 vîrfuri consecutive iar M e intersecția tangentelor în A și B, atunci perpendiculara din M pe AB taie axele elipsei în centrele de curbură corespunzătoare vîrfurilor A și B.

R. Fie $E: x = a\cos t,\ y = b\sin t$. a) $R = \varphi^{3/2}/ab$, $PN = b\varphi^{1/2}/a$ cu $\varphi(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$. b) Centrul de curbură $\Omega\left(X = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t,\ Y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\right)$, cu $c^2 = a^2 - b^2$. Două direcții $m = m_{OP} = \dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$ și m' sînt conjugate dacă $a^2 m m' + b^2 = 0$; deci condiția impusă e $\operatorname{tg}^2 t = b/a$ și determină pe P. Rezultă $R_P = \sqrt{ab}$; deci: aria cercului $S_c = \pi ab$, aria elipsei $S_e = \pi ab$. c) Condiția (192): $\varphi'(t) = c^2\sin 2\theta = 0$, cu $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi$ și $t_4 = 3\pi/2$; cum $\varphi''(t_1) = \varphi''(t_3) = 2c^2$ iar $\varphi''(t_2) = \varphi''(t_4) = -2c^2$, în $A(t_1)$ și $A'(t_3)$ raza de curbură e minimă și egală cu b^2/a, iar în $B(t_2)$ și $B'(t_4)$ e maximă și egală cu a^2/b $(a > b)$. În A: $(x - c^2/a)^2 + y^2 = b^4/a^2$, în B: $x^2 + (y - c^2/b)^2 = a^4/b^2, \ldots$; ecuația $\Phi(t) = 0$ are pe $t = t_1$, respectiv $t = t_2, \ldots$, ca rădăcină multiplă de ordin 4. d) Perpendiculara din M taie axele elipsei în $\Omega_A(c^2/a,\ 0)$ și $\Omega_B(0,\ -c^2/b)$, care-s centrele de curbură în A și B. *Obs.* Dacă P nu e vîrf, normala în P la E taie pe Ox în N, iar perpendiculara în N pe această normală taie diametrul OP în N'; perpendiculara în N' pe Ox taie normala din P (la E) în centrul de curbură Ω_P (fig. 369).

150 Fiind dată o hiperbolă H, să se arate: a) Raza de curbură în $P \in H$ e proporțională cu cubul normalei în P. b) Hiperbola are 2 vîrfuri reale. c) Dacă M e intersecția tangentei în vîrful A cu o asimptotă, atunci perpendiculara din M pe asimptotă taie axa transversă a lui H în centrul de curbură Ω_A corespunzător lui A. d) Dacă H e echilateră, distanța d de la P la centrul lui H e medie proporțională între distanța δ a centrului la tangenta în P și raza de curbură a hiperbolei în P.

R. Fie $H: x = \varepsilon a\operatorname{ch} t,\ y = b\operatorname{sh} t$ $(\varepsilon = \pm 1)$. a) $R = |-\varphi^{3/2}/\varepsilon ab|$, $PN = b\varphi^{1/2}/\varepsilon a$ cu $\varphi(t) = a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t$. b) Condiția (192): $\varphi'(t) = c^2\operatorname{sh}^2 t = 0$ cu $t_1 = 0$; deci 2 vîrfuri reale: $A(a,\ 0)$ și $A'(-a,\ 0)$. Cum $\varphi''(t) = 2c^2$ cu $c^2 = a^2 + b^2$, raza de curbură în vîrfuri e minimă și egală cu b^2/a. c) Fie asimptota $y = bx/a$: deci $M(a, b)$, $\Omega\left(X = \dfrac{c^2}{\varepsilon a}\operatorname{ch}^3 t,\ Y = \dfrac{c^2}{b}\operatorname{sh}^3 t\right)$ și în A: $\Omega_A(c^2/a,\ 0)$. *Obs.* c_1) $X_A = a + R_A, Y_A = 0$. c_2) Construcția centrului de curbură Ω pentru o elipsă (v. *Obs.* de la probl. 149) e valabilă și pentru hiperbolă (fig. 370). d) Avem $a = b$; deci $\delta = a/\eta$, căci tangenta (în P): $x\operatorname{ch} t - \varepsilon y\operatorname{sh} t - \varepsilon a = 0$, $d = a\eta$ și $R = a\eta^3$, cu $\eta = (\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)^{1/2}$. *Obs.* Sau: $xy = k$.

151 Fiind dată o parabolă de parametru p, să se arate: a) Raza de curbură într-un punct P al ei e proporţională cu cubul normalei în P; de asemenea, e egală cu de 4 ori raza cercului în contact în P cu parabola şi care trece prin focar. b) Parabola are un vîrf, al cărui centru de curbură e simetricul lui în raport cu focarul. c) Dacă R_1 şi R_2 sînt razele de curbură

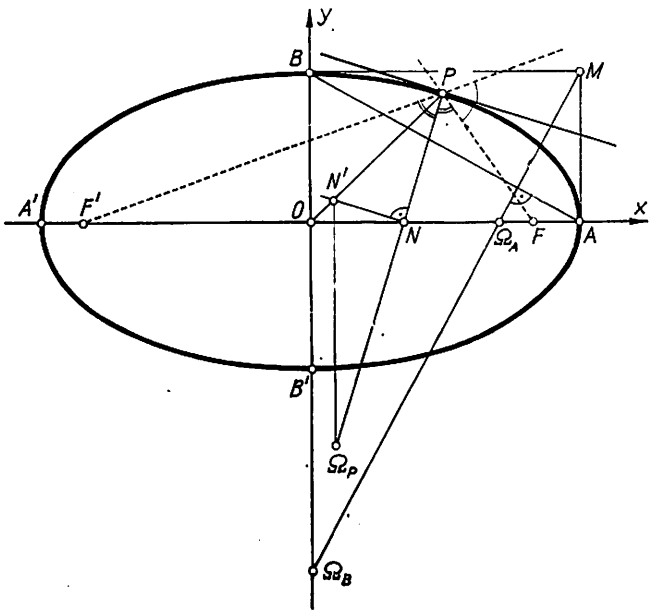


Fig. 369

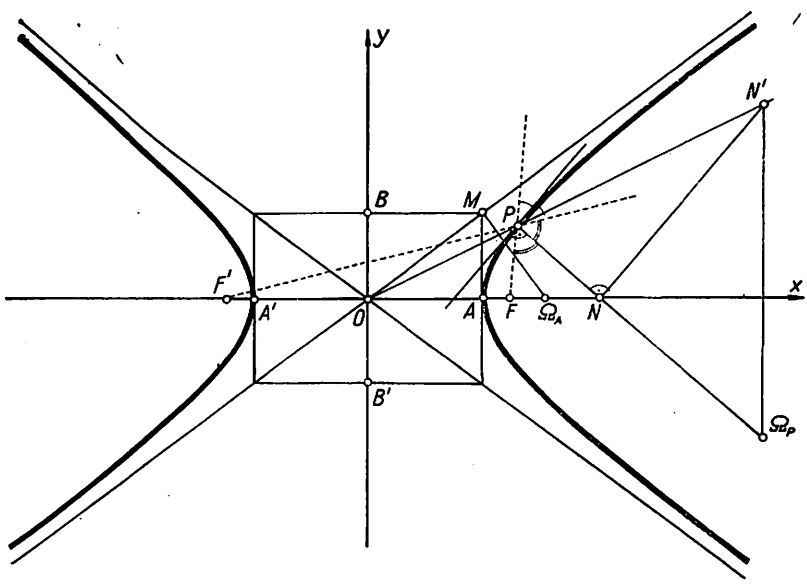


Fig. 370

în extremităţile unei coarde focale, respectiv ale segmentului normală în P_1, există relaţia

$\left(\frac{1}{R_1}\right)^{2/3}+\left(\frac{1}{R_2}\right)^{2/3}=\left(\frac{1}{p}\right)^{2/3}$, respectiv $(R_1^{2/3}-p^{2/3})\,(R_2^{2/3}-p^{2/3})=(R_1^{2/3}+p^{2/3})$.

d) Raza de curbură e dublul normalei polare, polul fiind în focar.

R. Fie $x=t^2/2p$, $y=t$. a) $R=(t^2+p^2)^{3/2}/p^2$, $PN=(t^2+p^2)^{1/2}$. Centrul $C\,(a,b)$ al cercului se află pe normala (în P): $(a-x)/y'=-(b-y)/x'=\lambda$; din $CP=CF$, cu $F\,(p/2,0)$, găsim $\lambda=(t^2+p^2)/4p$. Deci $R=4\,PC$. b) (192) dă $t=0:O$ e vîrf; cum $R_0''=3>0$, raza de curbură e minimă în O: $R_0=p$. Cum $OF=p/2$, $O\Omega_0=2\,OF=R_0$. *Obs.* b_1) Cercul de curbură (în O): $x^2+y^2-2px=0$. b_2) Centrul de curbură în P e Ω $(X=3t^2/2p+p,\ Y=-t^3/p^2)$; scriind x_Ω sub forma $X-x=2\,(x+p/2)$, rezultă: Ω se obţine luînd pe normala în P segmentul $P\Omega=2\,PD$, unde D e intersecţia normalei cu directoarea parabolei (fig. 371). c) Dreapta prin F: $y=m\,(x-p/2)$ taie parabola dacă $mt^2-2pt-mp^2=0$. În prima relaţie dată: $t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-t_1t_2$. În al doilea caz: $P_2(t_2)$ se află pe normala în $P_1(t_1)$: $x_2=t_1^2/2p+\lambda$, $y_2=(1-\lambda/p)\,t_1$; însă P_2 e pe parabolă: $\lambda=2p\,(t_1^2+p^2)/t_1^2$. *Obs.* că $R_i^{2/3}=t_i^2/p^{4/3}+p^{2/3}$ $(i=1,2)$; se ţine seama de relaţia între t_1 şi t_2. d) Pentru (92) cu $\alpha=0$: $R=2PN=\frac{1}{p}\sin^3\frac{\theta}{2}$.

152 Să se arate că raza de curbură a unei conice (nedegenerate) e proporţională cu cubul normalei limitată la o axă a conicei.

R. Cu F (focar) $=O$ şi axa corespunzătoare a conicei ca Ox (fig. 372):

(194) $y^2=Ax^2+2Bx+C$ $(A=e^2-1,\ B=ep,\ C=p^2)$ sau $\rho=p/(1-e\cos\theta)$,

unde p e parametrul conicei. Avem $yy'=Ax+B$, $yy''+y'^2=A$, $yy''=(AC-B^2)/y^2$. Cum

(195) $PN/R=yy''/(1+y'^2)$ cu PN (segmentul normală) $=|y|\sqrt{1+y'^2}$,

rezultă $PN/R=(AC-B^2)/y^2\,(1+y'^2)=(AC-B^2)/PN^2$. *Obs.* $R=(p^2+e^2y^2)^{3/2}/p^2$.

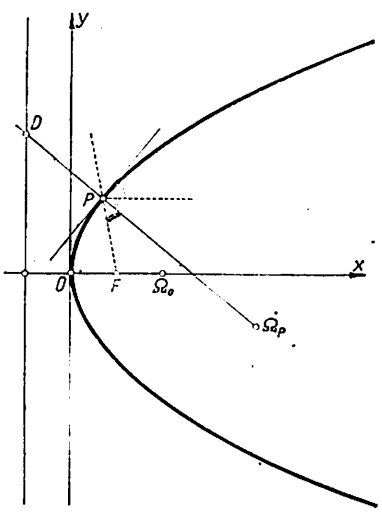


Fig. 371

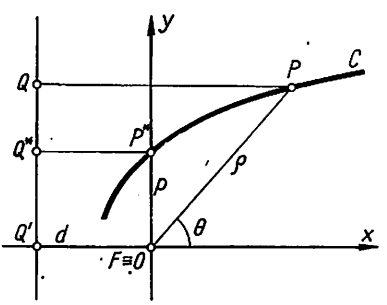


Fig. 372

153 Curbura unei curbe exponenţiale e $k=P'N^2/PN^3$, unde PN şi $P'N$ sînt lungimile segmentelor normală şi subnormală.

154 Fiind dată curba lănțișor C, să se arate: a) Ordonata lui $P \in C$ e medie proporțională între razele de curbură în P și vîrful curbei. b) Raza de curbură în P e egală cu lungimea segmentului normală în P; proprietatea e caracteristică. c) Parabola $\Gamma : y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ care are cu lănțișorul, în vîrful acestuia, aceeași tangentă și curbură, e osculatoare la lănțișor.

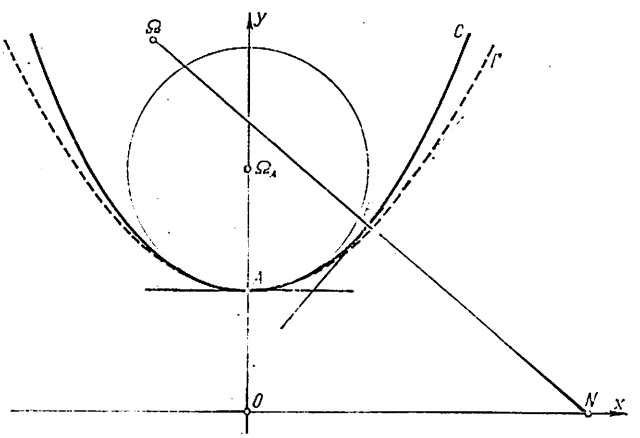


Fig. 373

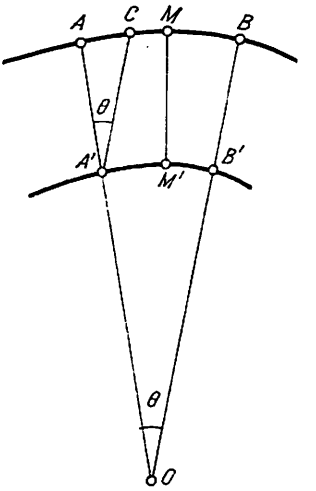


Fig. 374

R. a) C are ecuația (52). Din (192): vîrful A (0, a). $R = y^2/a$ și $R_A = a$. *Obs.* În A, curbura e maximă: $k_A = 1/a$. b) $PN = y^2/a$; deci: *Centrul de curbură în P e simetricul lui N în raport cu P* (fig. 373). Din $R = PN$, obținem $yy'' = 1 + y'^2$; luînd $y' = p\,(y)$, prin integrări, găsim $y = \frac{1}{C} \operatorname{ch} C\,(x - C_1)$. *Obs.* Cercul de curbură în A: $x^2 + y^2 - 4ay + 3a^2 = 0$. c) $A \in \Gamma$ dacă $\gamma = a$; $m_\Gamma = m_C$ dacă $\beta = 0$; $\rho_A = R_A$ dacă $1/2\alpha = a$.

155 Să se determine cazul cînd centrul de curbură Ω în punctul P al unei cicloide (generale) e simetricul lui P față de punctul de contact B al cercului generator cu baza d a cicloidei.

156 Fie Γ' o curbă paralelă cu Γ, M și M' fiind puncte corespondente iar $MM' = a$; θ fiind unghiul normalelor la capetele arcului AB de pe Γ, iar $\mathcal{A}$ aria determinată de Γ, Γ' și normalele extreme, avem

$$s = s' + a\theta,\quad \mathcal{A} = as + a^2\theta/2.$$

R. $\Gamma : x = x\,(s)$, $y = y\,(s)$ și $\Gamma' : X = x - ay$, $Y = y + ax$. Cum $1/R = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|$, $1/R^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$ și $1/R = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$, atunci $\mathrm{d}s' = (\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2)^{1/2} = (1 - a/R)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s - a\,\mathrm{d}\theta$. *Obs.* Avem (fig. 374): arc AB = arc AC + arc $A'B'$, aria $AA'B'B$ = aria $A'B'BC$ + aria $AA'C$.

157 Curbura curbei $C : F(x, y) = 0$, într-un punct P al ei, e dată de

$$k = |\Delta|/(F_x^2 + F_y^2)^{3/2} \text{ cu } \Delta \text{ dat de (81).} \tag{196}$$

Apl. Raza de curbură pentru: a) astroida (50); b) conica (77); c) în punctele cuarticei $C : y^4 - 2xy^2 + 2x^2 - 2ay^2 + 2ax = 0$ în care tangenta e paralelă cu una din axele de coordonate. d) Să se scrie ecuația cercului osculator al curbei $C : (x/a - 1)^2 + (a/y - 1)^2 = 1$ $(a > 0)$ în punctele în care tangenta e paralelă cu una din axele de coordonate.

R. Într-o vecinătate a lui P în care $C: y = y(x)$, avem $y' = -F_x/F_y$, $y'' = -\Delta/F_y^3$. *Apl.* a) $R = 3(axy)^{1/3}$. b) $R = \eta^{3/2}/|A|$ cu $A = |a_{ij}|$, $\eta = (a_{11}^2 + a_{12}^2)x^2 + 2a_{12}(a_{11} + a_{22})xy + (a_{12}^2 + a_{22}^2)y^2 + 2(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})x + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23})y + a_{13}^2 + a_{23}^2$. Pentru (61): $R = a^2b^2((x/a^2)^2 + (y/b^2)^2)^{3/2}$; în vîrfuri: $R_{1,3} = a^2/b$, $R_{2,4} = b^2/a$. Pentru (62): $R = (y^2 + p^2)^{3/2}/p^2$; în vîrf: $R_0 = p$. c) $\Delta = -16((-y^2 + 2x + a)^2(2y^2 - x + a) + y^2(y^2 - a^2)^2)$ și $F_x^2 + F_y^2 = 4(-y^2 + 2x + a)^3 + 16y^2(y^2 - x - a)^2$. Tangenta $\| Oy$ cînd $F_y = 0$. Găsim O, $A(-a, 0)$, $B_1(a, \sqrt{2a})$ și $B_2(a, -\sqrt{2a})$, în care: $R_0 = 1/2$, $R_A = \infty$, $R_1 = R_2 = 1/8$; A e punct de ondulație. Tangenta $\| Ox$ cînd $F_x = 0$; în $B_1'(a/\sqrt{2}, \sqrt{a(1+\sqrt{2})})$ și $B_2'(a/\sqrt{2}, -\sqrt{a(1+\sqrt{2})})$: $R_1' = R_2' = 1/\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. În $C_{1,2}(0, \pm\sqrt{2a})$ curba e tăiată de Oy (fig. 375). d) Scriem $C: (x-a)^2y^2 - 2a^3y + a^4 = 0$; $\Delta = 8y^2(2y^2(x-a)^4 - 2a^3y(x-a)^2 - a^6)$ și $F_x^2 + F_y^2 = 4(y^2(x-a)^4 + y(y^3 - 2a^3)(x-a)^2 + a^6)$. $F_x = 0$ în $A(a, a/2)$, care e vîrf; deci $R_A = 4a$ și $\Omega_A(a, a/2 + R_A)$. $F_y = 0$ în $B_1(2a, a)$ și $B_2(0, a)$, cînd $R = a$ și $\Omega(a, a)$. Domeniul de definiție: $0 \leqslant x \leqslant 2a$, $a/2 \leqslant y$. Asimptota $x = a$ taie pe C în A. Punctele de inflexiune sînt printre soluțiile sistemului $F = 0$, $\Delta = 0$; eliminînd pe $x - a$, găsim $3y^2 - 6ay + 2a^2 = 0$; atunci $(x-a)^2 = \pm a^2\sqrt{3}/2$. Soluții reale $I_{1,2} = (a(1 \pm \sqrt{3}/\sqrt{2}), a(3 + \sqrt{3})/3)$. Sau: $x = a(1 + \cos t)$, $y = a/(1 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; $I_{1,2}$ sînt date de $-2\sin^3 t + 3\sin t + 1 = 0$, adică pentru $t = \pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$ cu $\sin\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$ (fig. 376).

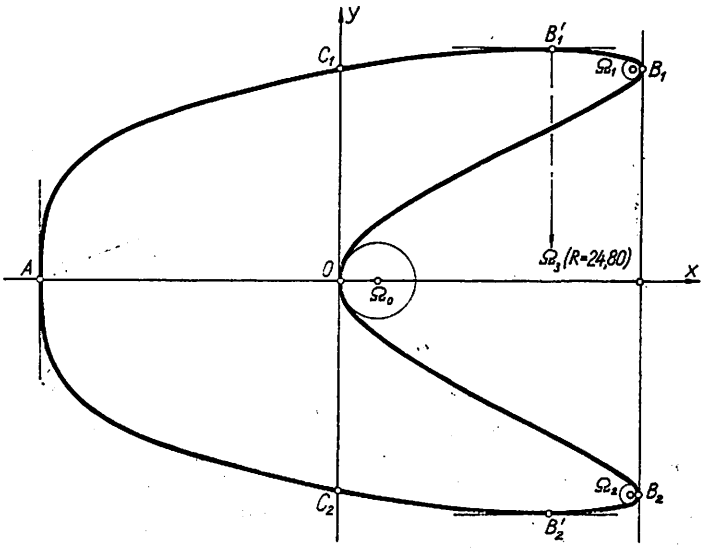


Fig. 375

158 Pentru curba (4): a) Dacă p e distanța de la pol la tangentă avem

$$R = \rho\frac{d\rho}{dp}. \tag{197}$$

b) Notînd $1/\rho = \sigma$, expresia razei de curbură e

$$R = \frac{1}{\sigma^3}\frac{(\sigma^2 + \sigma'^2)^{3/2}}{\sigma + \sigma''} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{R} = (\sigma + \sigma'')\sin^3 V, \tag{197'}$$

unde V e unghiul tangentei cu raza vectoare. *Apl.* la conicele (194).

R. a) Din triunghiul dreptunghic OTP (fig. 377): $p = \rho\sin V = \rho^2/\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, căci $\operatorname{tg} V = \rho/\rho'$; derivînd: $\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{d\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{R}$. b) Avem $\sigma' = -\rho'/\rho^2$, $\sigma'' = (2\rho' - \rho\rho'')/\rho^3$; deci

$\rho^2 + \rho'^2 = (\sigma^2 + \sigma'^2)/\sigma^4$, $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = (\sigma + \sigma'')/\sigma^3$ şi $\operatorname{tg} V = -\sigma/\sigma'$, $\sin V = \sigma/\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}$. *Apl.* $Rp^2 = \rho^3(1 + e^2 - 2e\cos\theta)^{3/2}$. *Obs.* b_1) Pentru o conică cu centru ($e \neq 1$), fie ρ_1 raza vectoare a punctului de pe conică faţă de celălalt focar; cum $\rho_1 + \varepsilon\rho = 2a$, $p = b^2/a$, $b^2 = \varepsilon a(1 - e^2)$ cu $\varepsilon = \pm 1$, avem $\rho_1 = a^2(1 + e^2 - 2e\cos\theta)\rho/b^2$, deci $abR = (\rho\rho_1)^{3/2}$. b_2) Pentru o parabolă ($e = 1$): $R \sin^3 \dfrac{\theta}{3} = p$.

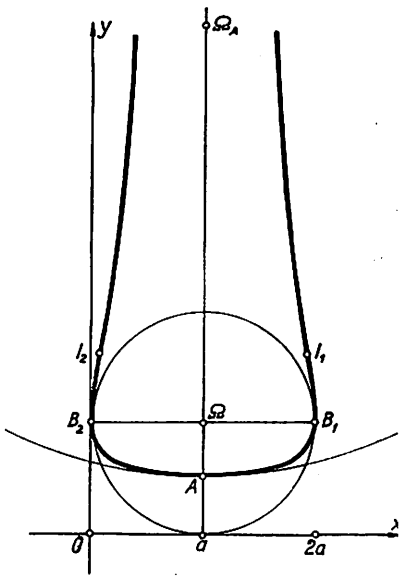


Fig. 376

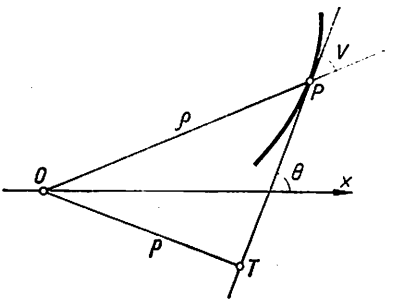


Fig. 377

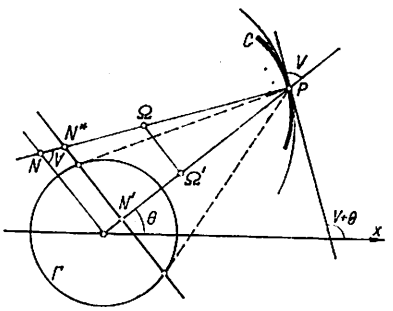


Fig. 378

159 Să se determine curbele C pentru care raza de curbură în orice punct P al lor e proporţională cu segmentul PN^* de pe normala în P, unde N^* e intersecţia normalei cu polara lui P în raport cu un cerc $\Gamma\,(O\,;\,b)$ dat. Cînd proiecţia Ω' a centrului de curbură Ω (în P la C) pe raza vectoare a lui P împarte această rază într-un raport constant, curba C se numeşte *sinuspirală* (sinonim: *spirală sinusoidă*); să se studieze curba C.

R. Fie $C : \rho = \rho(\theta)$; deci (fig. 378): $PN^* = kR$, $d = ON' = b^2/\rho$, căci polara lui $P(x, y)$ e $xX + yY - b^2 = 0$. Din triunghiurile dreptunghice PON şi $PN'N^*$: $\rho/(\rho - d) = PN/kR$; de unde

$$(198)\qquad \frac{k(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2} \quad \text{sau} \quad \rho \operatorname{ctg} V \frac{dV}{d\rho} = \frac{(k-1)\rho^2 + b^2}{\rho^2 - b^2},$$

căci $\operatorname{tg} V = \rho/\rho'$ şi $V' = (\rho'^2 - \rho\rho'')/(\rho^2 + \rho'^2) = \rho' \dfrac{dV}{d\rho} = \rho \operatorname{ctg} V \dfrac{dV}{d\rho}$. Integrînd şi luînd $k = n + 1$ iar $C = a^n$ (constanta de integrare), obţinem curbele

$$(198')\qquad (\rho^2 - b^2)^{n+1} = a^{2n}\rho^2 \sin^2 V.$$

Din $P\Omega/\rho = h$ (const.) şi $P\Omega'/\rho = R/PN$, deducem $\rho^2 - b^2 = h(n + 1)\rho^2$, adică $h = 1/(n + 1)$, $b = 0$ (Γ se reduce la un punct); cum $n\rho^{n-1}\rho' = a^n \cos V V'$, adică $V' = n$, încît $V = n\theta + \theta_0$, *sinuspirala de indice n* are ecuaţia (fig. 379)

$$(199)\qquad \rho^n = a^n \sin V, \text{ adică } \rho^n = a^n \sin n\theta \text{ sau } \rho^n = a^n \cos n\theta.$$

Obs. a) Sinuspiralele (199) sînt congruente, căci printr-o rotaţie de unghi $\pi/2n$ se reduc una la alta. b) Putem să scriem ($m = 1/n$)

(199′) $$\rho = a \sin^m \frac{\theta}{m} \quad \text{sau} \quad \rho = a \cos^m \frac{\theta}{m}.$$

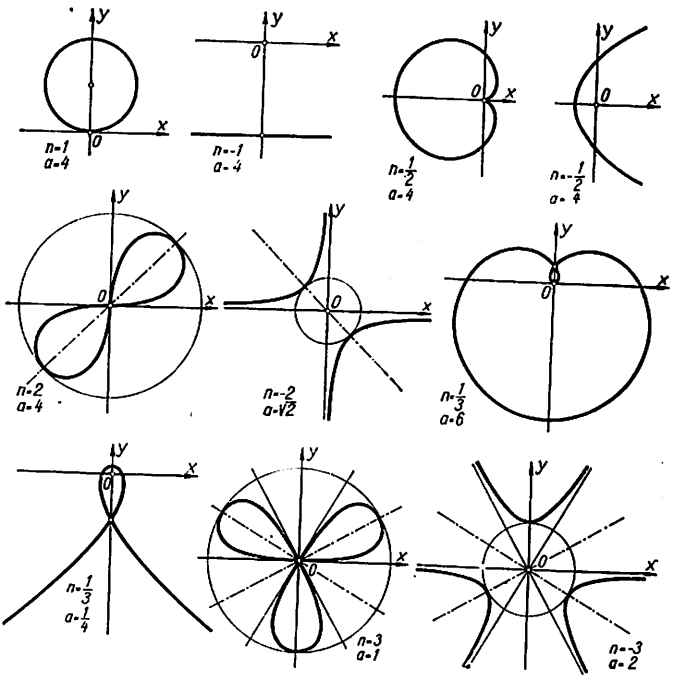


Fig. 379

c) Din $PN = kR$, cu $z' = \rho'/\rho$, găsim $dz/(1 + z^2) = (k - 1)\,d\theta/k$; cu $n = (1 - k)/k$, după cum se ia $-\int dz/(1 + z^2) = \text{arc ctg}\, z$ sau $\int dz/(1 + z^2) = \text{arc tg}\, z$, se obţine una sau alta din ecuaţiile (199). Rezultă: a) V e $n\theta$ sau $n\theta + \pi/2$; b) $pr_\rho\, P\Omega = p\rho$, porţiunea din ρ cuprinsă în interiorul cercului de curbură fiind egală cu $2/(n + 1)$; c) $PN = (n + 1)R$ — proprietate caracteristică. Fie sinuspirala (199_2). În afară de pol, C nu mai are alte puncte de inflexiune sau de întoarcere la distanţă finită. Lungimea unui arc e $s = a\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^{(1-n)/n} n\theta\, d\theta$. Dacă $\frac{1}{n} \in Z$, arcul s se exprimă prin funcţii elementare: $s = a(\sin^{1/n} V \cos V)_{V_0}^{V_1} + \frac{n+1}{n}\int_{V_0}^{V_1} \sin^{(1+n)/n} V\, dV$. În celelalte cazuri, pentru $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \pi/2n$, arcul s se exprimă prin funcţiile euleriene Γ şi B (de prima şi a doua speţă): $s = \frac{a}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$ sau $s = \frac{a}{2} 2^{(2-n)/n} \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)/\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$. Pentru un indice raţional, deci $n = \frac{p}{q}$, C e o curbă algebrică; dacă $n > 0$, C e de grad $2pq$ şi de clasă $p(p + q)$, iar dacă $n < 0$ (cu p, $q > 0$ şi primi între ei), C e de grad pq şi de clasă $p(p - q)$ sau $2p(q - p)$, după cum $p \gtrless q$. Pentru forma curbei se poate lua numai cazul $n > 0$, celălalt reducîndu-se la acesta printr-o inversiune de pol O. C admite p axe de simetrie, două axe consecutive formînd un unghi de $2\pi/n$. Există p ramuri care conţin polul. Punctele duble corespund lui $\theta = \alpha\pi + 2\beta\pi/n$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, q - 1$; $\beta = 1, \ldots, p - 1$); sinuspiralele cu indice întreg nu au alte puncte duble afară de pol. C are p petale. Dacă p e par, C e simetrică faţă de O, iar orice ramură care-l conţine are o inflexiune în el. *Cazuri particulare* (v. fig. 379). a) $n = 1$: *cerc*; b) $n = -1$: *dreaptă*; c) $n = 1/2$: *cardioidă*; d) $n = -1/2$: *parabolă*; e) $n = 2$: *lemniscată Bernoulli*; f) $n = -2$: *hiperbolă echilateră*; g) $n = 1/3$: *sextica lui Cayley*; h) $n = -1/3$: *cubica lui Tschirnhausen*; i) $n = 3$ *curba lui Kipert*. *Obs.* Din proprietăţile generale deducem: α) Pentru $n = 2$: *lemniscata* $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$; deci α_1) un-

ghiul format de normală cu raza vectoare e îndoidul argumentului; α_2) $3\rho R = a^2$; α_3) $3R \doteq PN$. β) Pentru $n = -1/2$: *parabola* $\rho(1 - \cos\theta) = 2a$; deci $P\Omega' = 2\,PO$ (O e mijlocul lui $P\Omega'$) iar $R = 2\rho^{2/3}$. γ). Pentru $n = -2$: *hiperbola echilateră* $\rho^2 \sin 2\theta + 1 = 0$ ($2xy + 1 = 0$); atunci $P\Omega' = -PO$(Ω' e simetricul lui O față de P) iar $R = -\rho^3$.

Sinuspiralele $\rho_1^n = a^n \cos n\theta$ și $\rho_2^n = b^n \sin n\theta$ se taie ortogonal. *Obs.* a) $\operatorname{tg} V_1 = -\operatorname{ctg} n\theta = \operatorname{tg}(n\theta + \pi/2)$ și $\operatorname{tg} V_2 = \operatorname{tg} n\theta$; deci $V_1 = n\theta + \pi/2$ și $V_2 = n\theta$. b) Exemplu: lemniscatele $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ și $(x^2 + y^2)^2 = 2b^2 xy$.

Sinuspiralele de îndice întreg impar sînt curbe Salmon.

160 Fie spirala lui Arhimede (36); să se arate: a) În $P \in C$ avem $R = PN^3/(PN^2 + a^2)$, unde PN e segmentul normală. b) Dacă P tinde la infinit, R tinde către raza vectoare.

161 Fie spirala hiperbolică (39): să se arate: a) În $P \in C$ avem $k = OT.ON/PN^3$, unde PN, OT și ON sînt respectiv segmentele normală, subtangentă și subnormală polare. b) În punctul de la infinit al curbei, raza de curbură e nulă. c) Există relația caracteristică: $k = \sin^3 V$.

162 Fie spirala logaritmică (44); să se arate: a) În $P \in C$ avem $R = ON$ și $R = h\rho$. b) Centrul de curbură în P e limita intersecției Ω a normalei în P cu normala în punctul vecin P'.

163 Să se determine curbele C astfel încît distanța OP de la origine la un punct oarecare $P \in C$ să fie medie proporțională între distanța d de la origine la tangenta în P la C și raza de curbură în P.

R. Din $OP^2 = Rd$: $(x^2 + y^2)\,y'' \pm (xy' - y)(1 + y'^2) = 0$ sau (cu $y = ux$) $dy'/(1 + y'^2) \pm du/(1 + u^2) = 0$. Pentru $+$, prin integrare: $\operatorname{arc\,tg} y' + \operatorname{arc\,tg} u = K_1$ sau $(y' + u)/(1 - uy') = \operatorname{tg} K_1 = C_1$ sau (cu $y' = u + xu'$) $2u + xu' = C_1(1 - u^2 - xuu')$, adică $C_1(x^2 + y^2) - 2xy = C_2$ (hiperbole echilatere cu centru O). În cazul $-$: $\operatorname{arc\,tg} y' - \operatorname{arc\,tg} u = K_1$ sau $x\,dy - y\,dx = C_1(x\,dx + y\,dy)$, adică $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = C_1 \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C_2$ sau $\rho = \dfrac{1}{C_2} e^{\theta/C_1}$ (spirale logaritmice).

164 Fiind dată o curbă orientată C, se numește *curbă echitangențială în raport cu* C locul Γ generat de punctul P de pe semitangenta pozitivă în P la C astfel încît $MP = a$, a fiind un număr dat, cînd M descrie pe C. Curba C se zice că e *curbă tractoare în raport cu* Γ. Să se arate că, dacă s și σ sînt arcele lui C și Γ, atunci

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2,$$ R fiind raza de curbură în P la C.

R. Fie (fig. 380) $C: x = x(s)$, $y = y(s)$: atunci $\Gamma: X = x(s) + a\,x'(s)$, $Y = y(s) + a\,y'(s)$. Se ține seama de formulele Frenet în $\left(\dfrac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(\dfrac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dY}{ds}\right)^2$.

165 Fie o curbă rectificabilă C. Dacă fiecărui punct al unui arc al curbei i se asociază o densitate proporțională cu curbura respectivă, centrul de greutate se numește *centrul de greutate al lui Steiner*. Să se afle coordonatele acestui centru de greutate.

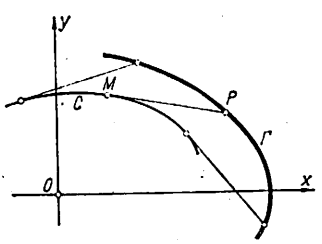


Fig. 380

166 Fie curba $C: \left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \varepsilon\left(\dfrac{y}{b}\right)^n - 1 = 0$ ($\varepsilon = \pm 1$), unde n e un număr rațional. Se cere: a) Să se găsească podara acestei curbe în raport cu originea. b) Dacă tangenta în $P \in C$ taie axele de coordonate în A și B, notînd prin d distanța de la O la tangentă, atunci

$$R = \frac{-1}{n-1}\,\frac{PA \cdot PB}{d}.$$

167 Se numeşte *mişcare curbilinie* mişcarea unei particule P a cărei traiectorie e o curbă C. În mişcarea curbilinie, dacă $C: \bar{r}=\bar{r}(t)$ şi notînd cu $\bar{t}, \bar{n}$ versorii tangentă şi normală (în P la C) iar cu $1/R$ curbura lui C în P, să se arate: a) *Viteza* $\bar{v}$ e dată de formula

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = v\,\bar{t}. \tag{200}$$

b) *Acceleraţia totală* $\bar{a}$ poate fi descompusă în 2 componente: *acceleraţia tangenţială* $\bar{a}_t$, care caracterizează variaţia vitezei ca mărime, şi *acceleraţia normală* (sin.: *acceleraţia centripetă*) $\bar{a}_n$, care caracterizează variaţia vitezei ca orientare:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}_t + \bar{a}_n \quad \text{cu} \quad \bar{a}_t = \frac{dv}{dt}\bar{t},\ \bar{a}_n = \frac{v^2}{R}\bar{n}. \tag{201}$$

Apl. a) Să se studieze mişcarea unui corp greu lansat cu viteză iniţială v_0 şi sub unghiul θ_0 faţă de orizontală. b) Traiectoria particulei P e curba $C: x = 4(t + t^3/3), y=(1 + t^2)^2$. Să se determine: b_1) Cu ce viteză particula îşi schimbă direcţia în momentul $t = 1$; b_2) În ce punct al traiectoriei schimbarea direcţiei vitezei e minimă.

R. Fie (fig. 381): $P(t)$ şi $P'(t + \Delta t)$ pe C. Prin definiţie, pe porţiunea $\Delta s = \overset{\frown}{PP'}$, mişcarea curbilinie coincide cu mişcarea rectilinie; în P, viteza $\bar{v}$ are mărimea $v = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ şi direcţia dată de limita coardei PP' cînd P' tinde către P, cu sensul de la P la P'. Cum $\Delta s = |\Delta\bar{r}|$ iar $\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$, rezultă (200). *Obs.* a_1) *Mişcarea curbilinie* se zice *uniformă* dacă, în intervale de timp egale, particula P parcurge arce de lungimi egale; atunci v = const. a_2) Proiecţiile v_x şi v_y ale vitezei pe axele de coordonate, notînd $\theta = \sphericalangle(\bar{t}, \bar{i})$, sînt

$$v_x = v\cos\theta,\ v_y = v\sin\theta;\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};\ \operatorname{tg}\theta = v_y/v_x. \tag{200'}$$

Prin *metoda lui Roberval* se poate construi tangenta cunoscînd proiecţiile (200'): în P, se ia $PP_1 = v_x$ şi $PP_2 = v_y$ cu $PP_1 \parallel Ox$ şi $PP_2 \parallel Oy$, tangenta în P trecînd prin intersecţia P^* a paralelelor la axe prin P_1 şi P_2.

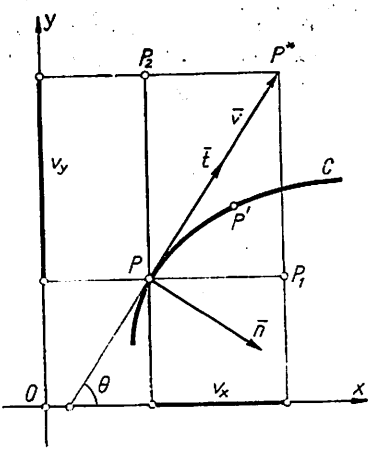


Fig. 381

b) Pe arcul $\overset{\frown}{PP'}$, variaţia $\Delta\bar{v}$ a vitezei este diferenţa vitezelor pe care particula P le-a avut în momentele $t + \Delta t$ şi t (fig. 382). Deci $\bar{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$. Fie $PP_1^* = PP^* = v$; deci $\Delta\bar{v} = \Delta\bar{v}_1 + \Delta\bar{v}_2$, unde $\Delta\bar{v}_1$ $\Delta\bar{v}_2$ dau variaţiile vitezei ca orientare, respectiv ca modul. Cum $\Delta v_1 = v\Delta\theta$, $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$ iar $v = \frac{ds}{dt}$, atunci $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(v\,\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{R} = a_n$; la limită, dacă $\Delta\theta\to 0$, avem $\widehat{PP^*P_1^*} \to \pi/2$, încît $\bar{a}_n = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{v}_1}{\Delta t} \parallel \bar{n}$. Cum $\Delta v_2 = \Delta v$, atunci $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a_t$; cînd $\Delta\theta\to 0$, PP_2^* tinde să ia direcţia lui $\bar{v}$, încît $\bar{a}_t = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{v}_2}{\Delta t} \parallel \bar{t}$. *Obs.* b_1) Cum $\bar{n}.\bar{t} = 0$:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{a_t}{a_n}\ (\alpha = \widehat{\bar{t}, \bar{a}};\ \beta = \widehat{\bar{n}, \bar{a}}). \tag{201'}$$

b_2) În *mișcarea curbilinie uniformă*: $a_t = 0$ și $a_n = a$. *Apl.* a) Neglijînd rezistența aerului, avem $v_x = v_0 \cos\theta_0$, $v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$ (g-accelerația gravitațională). Deci $C: y = x \operatorname{tg}\theta_0 - gx^2/2v_0^2\cos^2\theta_0$ e o *parabolă*. În A, avem $v_y = 0$; deci: timpul pentru a ajunge din O în A e $t' = v_0 \sin\theta_0/g$, iar $y_{max} = y_A = v_0^2 \sin^2\theta_0/2g$. Corpul va cădea pe planul orizontal după un timp $t'' = 2t'$; de unde $t'' = 2v_0 \sin\theta_0/g$ iar $x_{max} = x_B = v_0^2 \sin 2\theta/g$. *Obs.* Dacă v_0 e dat, pentru $\theta_0 = 45°$, particula

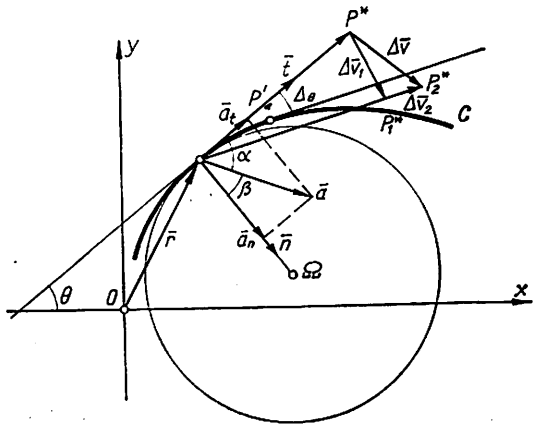


Fig. 382

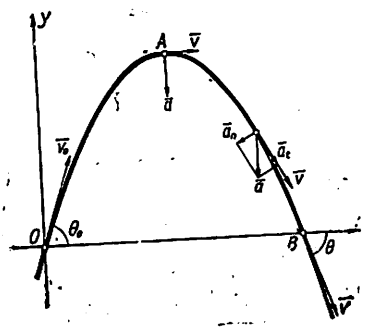


Fig. 383

P va atinge cea mai mare distanță (pe orizontală). În P: $v^2 = v_0^2 - 2v_0gt\sin\theta_0 + g^2t^2$ iar $\operatorname{tg}\theta = (v_0\sin\theta_0 - gt)/v_0\cos\theta_0$. Deci în A: $v = v_0\cos\theta_0$ și $\theta = 0$; în B: $v = v_0$ și $\theta = -\theta_0$. În P: $a_x = 0$, $a_y = -g$ și $a_t = -gv_y/v$, $a_n = -gv_x/v$ cu $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\theta$, adică $\alpha = 3\pi/2 - \theta$, iar $a = g$. În A: $a_t = 0$, $a_n = -g$ și $\alpha = 3\pi/2$; în B: $a_t = g\sin\theta_0$, $a_n = -g\cos\theta_0$ și $\alpha = 3\pi/2 + \theta_0$ (fig. 383). *Obs.* Cînd corpul e aruncat în aer, rezistența aerului joacă un rol însemnat; viteza scade în timpul zborului, încît y_{max} și x_{max} devin mai mici, iar traiectoria e mai abruptă în partea ei descendentă; în acest caz, C se numește *curbă balistică* (fig. 384). De exemplu pentru un proiectil de artilerie care are forma unui cilindru cu partea anterioară conică și care cîntărește 82 kg, cînd $v_0 = 550$ m/s și $\theta_0 = 20°$: în vid — $x_{max} = 19{,}8$ km; în aer — distanța de zbor $x = 8{,}1$ km. b) Cum $v = 4(1 + t^2)^{3/2}$ și $4/R = (1 + t^2)^{-5/2}$: $a_n = 4(1 + t^2)^{1/2}$. b_1) În momentul $t = 1$, deci $B(16/3, 4)$: $a_n = 4\sqrt{2}$ (fig. 385). b_2) $da_n/dt = 0$ cînd $t = 0$.

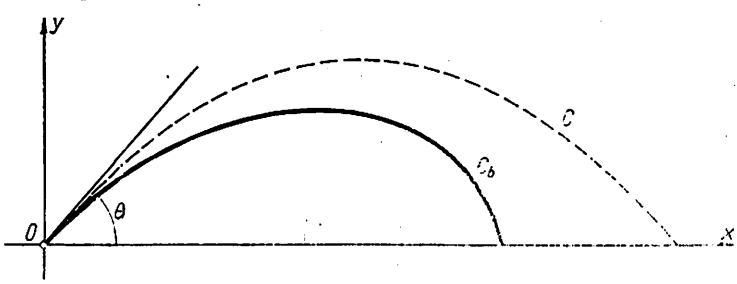


Fig. 384

168 Se spune că 2 arce de curbă *se racordează* într-o extremitate comună P_0 dacă sînt în contact în acea extremitate, *racordul* fiind de ordinul m cînd contactul e de acest ordin. Să se arate că, pentru ca 2 curbe să aibă un racord de ordin 2 în P_0, e necesar și suficient ca ele să aibă aceleași tangente și curburile egale (în P_0). *Apl.* a) Să se scrie ecuația parabolei care trece prin O și $B(a + b, 0)$ astfel încît arcul de parabolă OB și jumătatea inferioară a cercului de centru $A(a, 0)$ și rază b să aibă un racord de ordin 2 în B. b) Un traseu de cale ferată, construit dintr-o porțiune rectilinie AA_1, trebuie să

atingă punctul B de pe perpendiculara din A_1 pe AA_1. Se poate ajunge în B printr-un arc de cerc, astfel încît, cînd trenul parcurge traseul AA_1B, să nu aibă un salt al acceleraţiei normale în punctul de racordare A_1? c) O elipsă se roteşte în jurul unui focar F cu un unghi α (fig. 386). Este posibilă racordarea ramurilor AB de pe elipsa iniţială Γ şi $A'B'$ de pe elipsa rotită

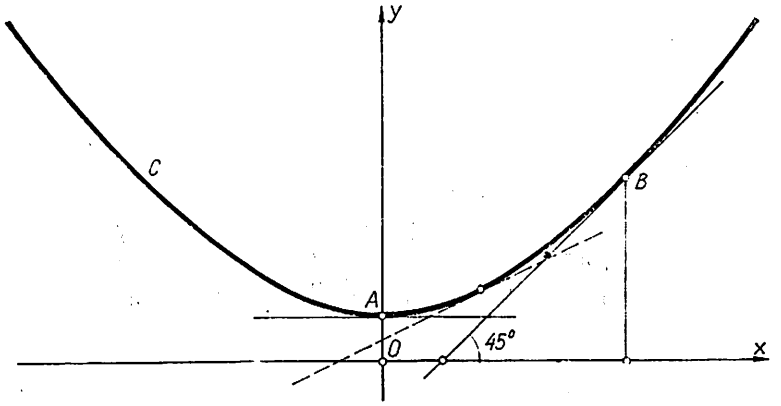


Fig. 385

Γ' cu un arc de cerc C astfel încît deplasarea mobilului din A în A' pe curba $ABB'A'$ să se facă fără salt al acceleraţiei normale?

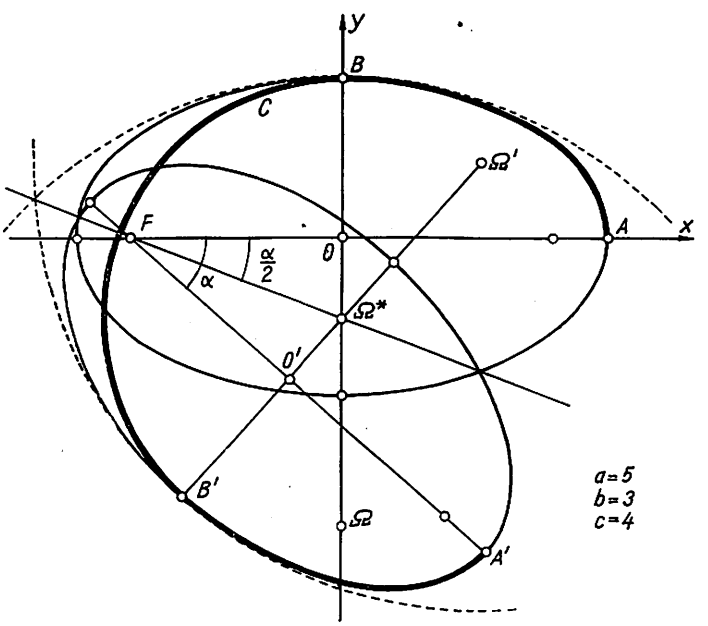


Fig. 386

R. Fie $C_i\,(i = 1, 2): y = y_i(x)$. Dacă în $P_0: y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$ şi $k_1(x_0) = k_2(x_0)$, atunci $y_1^{(\alpha)}(x_0) = y_2^{(\alpha)}(x_0)$ cu $\alpha = 0, 1, 2$; reciproca e adevărată. *Apl.* a) Parabola $C_1: (y - mx)^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0$ cu $m^2(a + b) + 2\alpha = 0$ admite pe $x = a + b$ ca tangentă în B dacă

$\frac{m^2(a+b)+\alpha}{1} = \frac{-m(a+b)+\beta}{0} = \frac{\alpha}{-1}$; deci $C_1 : (y-mx)^2 - m^2(a+b)x + 2m(a+b)y = 0$. Conform (196), C_1 are în B curbura $k_1 = m^2(a+b)/2$. Cercul C_2 are curbura $k_2 = 1/b$. Din $k_1 = k_2$, rezultă $m = \sqrt{2b(a+b)}/(a+b)$, adică $C_1 : y = \sqrt{2b(a+b)}\,[x/(a+b) - 1 + \sqrt{1-x/(a+b)}]$. b) Nu ; căci semicercul A_1B tangent în A_1 lui AA_1 dă în A_1 o discontinuitate a curburii, care trece

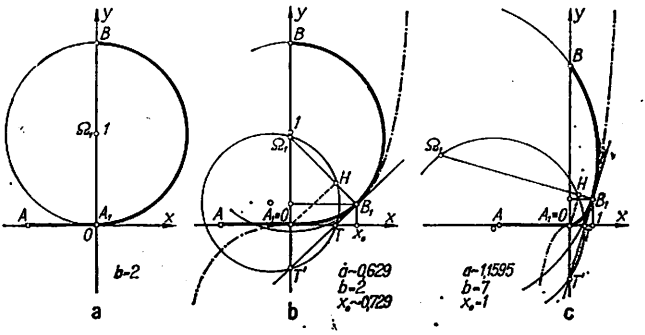


Fig. 387

brusc de la O la $1/R$ ($R = A_1B/2$). *Obs.* Evităm inconvenientul făcînd un racord intermediar de ordin 2 cu un arc de curbă A_1B_1 cu inflexiune în A_1 astfel ca, de-a lungul lui, curbura să crească continuu de la O la $1/R$; de exemplu, cu un arc de parabolă semicubică. Astfel, luînd AA_1 pe Ox cu $A_1 = O$ (fig. 387), fie $B(0, b)$ şi $\Gamma : y = ax^3$. AA_1 şi Γ au în $A_1 = 0$ un racord de ordin 2. Cu $B_1(x_0, y_0) \in \Gamma$, din condiţia că cercul osculator în B_1 la Γ trece prin B se determină pe a (în funcţie de b şi x_0) : $15x_0^7a^3 + 15x_0^4a^2 - (x_0^3 + 3bx_0)a + b = 0$; de pildă, se ia x_0 încît centrul de curbură $\Omega_1(\alpha, \beta)$ în B_1 la Γ se află pe Oy (cînd $1 - 9a^2x_0^4 = 0$) sau $x_0 = 1$ (cînd $b \geqslant b_0$ pentru a avea $a > 0$). c) Numai cînd centrele de curbură Ω (în B la Γ) şi Ω' (în B' la Γ') coincid cu intersecţia Ω^* a axelor mici ale lui Γ şi Γ'. Căci, fie cercul $C(\Omega^*; r = \Omega^*B)$; atunci există salt al curburii în B şi B', trecîndu-se de la $1/R$ la $1/r$, respectiv de la $1/r$ la $1/R$, unde $R = B\Omega\,(= B'\Omega') = a^2/b$ e raza de curbură a lui Γ în B (a lui Γ' în B') iar a, b — semiaxele elipsei Γ (Γ'). Din $R = r$, cum $O\Omega = O'\Omega' = c^2/b$ şi $O\Omega^* = c\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, avem

(202) $$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{b}.$$

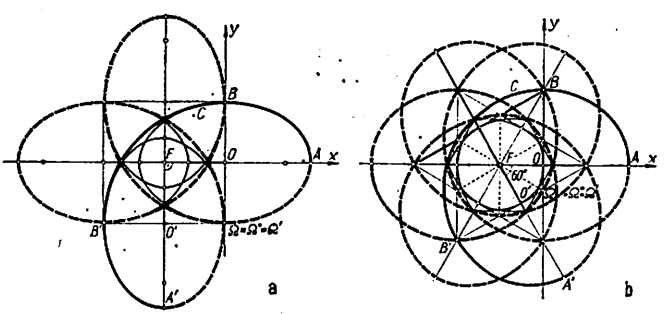


Fig. 388

Cînd Γ e dată, are loc racordarea cerută dacă α e dat de (202). Dacă se dă α, atunci Γ trebuie să aibă semiaxele astfel încît să fie satisfăcută condiţia (202). De exemplu, pentru $\alpha = 90°$, rezultă $a = b\sqrt{2}$, $c = b$ iar $\Omega \in \Gamma$ (fig. 388 a) ; prin 4 rotaţii se ajunge în A. Pentru $\alpha = 60°$, obţinem $a = 2b/\sqrt{3}$, $c = b/\sqrt{3}$ (fig. 388 b) ; prin 6 rotaţii succesive se ajunge în A.

169 Să se arate că, dacă o parabolă Γ e în vîrful ei în contact cu o curbă C şi are curbura egală cu cea a lui C în acel punct, atunci parabola e osculatoare la curbă. *Apl.* Să se determine : a) parabola osculatoare în punctul curent al unui cerc; b) parabolele osculatoare în intersecţiile parabolei cubice cu bisectoarele reperului afin asociat punctului ei de inflexiune.

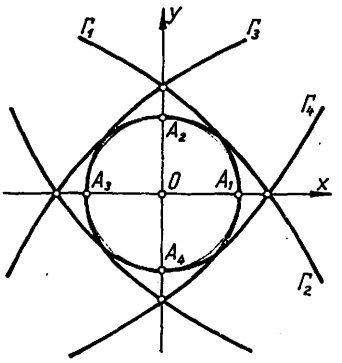


Fig. 389

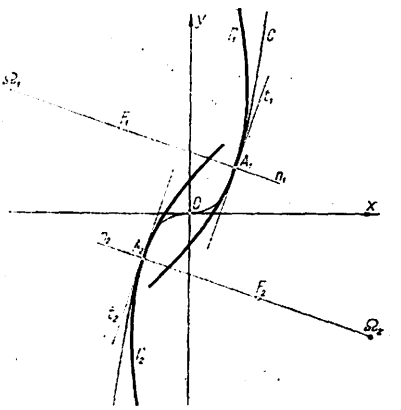


Fig. 390

R. Fie C: $x = x(t), y = y(t)$; în $P(t) \in C$, curbura şi concavitatea: $k_C = (x'y'' - x''y')/(x'^2+y'^2)^{3/2}$ şi $\eta_C=(x'y''-x''y')/x'$. Γ face parte din fasciculul $F(X, Y) = (x'(X-x) + y'(Y-y))^2+\lambda(y'(X-x) - x'(Y-y)) = 0$; deci, după (196) şi (83): $k_\Gamma = -2\sqrt{x'^2+y'^2}/\lambda$, $y''_\Gamma = 2(x'^2+y'^2)^2/\lambda x'^3$. C şi Γ au aceeaşi concavitate numai dacă sign y''_Γ = sign η_C, adică $\lambda = \alpha^2(x'y''-x''y')$. Din $|k_\Gamma| = |k_C|$, obţinem $\lambda = 2(x'^2+y'^2)^2/(x'y''-x''y')$. C şi Γ se taie (în P) în 3 puncte confundate; căci, dezvoltînd ecuaţia lui C în serie Taylor într-o vecinătate a lui P, ecuaţia eliminant (între C şi Γ), prin ridicare la pătrat şi reducînd termenii, se scrie $h^3(\alpha+\beta h+\ldots) = 0$. *Apl.* a) C: $x^2+y^2=a^2$; deci $k_C = -1/a$ şi $y''_C = -a^2/y^3$. Γ: $(y-X-xY)^2 + \lambda(xX+yY-a^2) = 0$, iar $k_\Gamma = -2a/\lambda$ şi $y''_\Gamma = -2a^4/\lambda y^3$. Rezultă $\lambda = 2a^2$. *Obs.* a$_1$) În A_1 (fig. 389), găsim Γ_1: $y^2 = -2a(x-a)$, în A_2 pe Γ_2: $x^2=-2a(y-a)$, în A_3 pe Γ_3: $y^2 = 2a(x+a)$ şi în A_4 pe Γ_4: $x^2 = 2a(y+a)$. a$_2$) Putem lua C: $x = a\cos t, y = a\sin t$. b) Fie C: $y = x^3$; $k_C = 6x/(1+9x^4)^{3/2}$, $y''_C = 6x$. Γ: $(X+3x^2Y-3x^5-x)^2 + \lambda(3x^2X-Y-2x^3) = 0$, $k_\Gamma = -2\sqrt{1+9x^4}/\lambda$, $y''_\Gamma = 2(1+9x^4)^2/\lambda$. Găsim $\lambda = (1+9x^4)^2/3x$. Prima bisectoare taie pe Γ în $A_1(1,1)$ şi $A_2(-1,-1)$; Γ_1: $3(x+3y-4)^2 + 100(3x-y-2) = 0$ şi Γ_2: $3(x+3y+4)^2 - 100(3x-y+2) = 0$ (fig. 390), avînd respectiv centrele de curbură $\Omega_1(-4,8/3)$ şi $\Omega_2(4,-8/3)$.

9. ECUAŢIA INTRINSECĂ A UNEI CURBE PLANE

170 Fie o curbă C. Se cere : a) Să se găsească *ecuaţia intrinsecă* (sin. : *ecuaţia naturală*) a curbei C. b) Numind *curba lui Mannheim asociată lui C* locul Γ al centrului de curbură al curbei C care se rostogoleşte (fără alunecare) pe o dreaptă d, corespunzător punctului de contact, să se arate că cunoaşterea ecuaţiei intrinsece a lui C permite determinarea ecuaţiei curbei lui Mannheim asociată lui C. *Apl.* C e : a) cicloida (45); b) curba ciclică (47‴); c) lănţişorul de egală rezistenţă (189).

R. a) Găsirea ecuaţiei intrinsece a lui C revine la (v. [40], p. 64)

(203) $$R = R(s).$$

Obs. Ecuația (203) determină curba (ca formă și mărime), abstracție făcînd de poziție; căci, din $1/R = \dfrac{d\theta}{ds}$ și $\vec{\imath}\left(\dfrac{dx}{ds} = \cos\theta, \dfrac{dy}{ds} = \sin\theta\right)$, deducem

(203′) $$\theta = \int_0^s \frac{ds}{R(s)} + \theta_0 \text{ și } x = \int_0^s \cos\theta\, ds + x_0,\ y = \int_0^s \sin\theta\, ds + y_0.$$

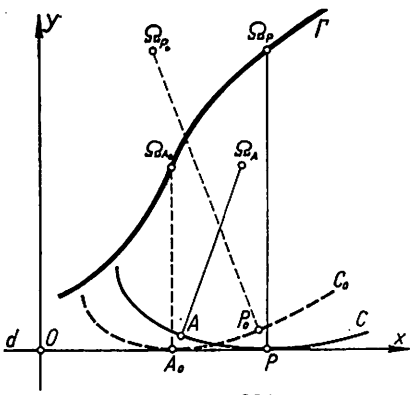


Fig. 391

b) Cu $d = Ox$ și originea arcelor O^* de pe C, la momentul inițial, în O:

(203″) $\Gamma : x = s, y = R(s)$, adică $\Gamma : y = R(x)$;

căci (fig. 391) $OP = \text{arc}\, O^*P$ și $PM = R(s)$, cu $P(s) \in C$, $M = \Omega_P \in \Gamma$ iar arc $O^*P = s$. *Apl.* a) $R = (a^2 + l^2 - 2a\cos\theta)^{3/2}/|l(a\cos\theta - l)|$, $ds = \sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos\theta}\, d\theta$. Cînd $a = l$ (cicloidă normală), rectificarea se face cu ajutorul funcțiilor elementare (v. probl. 117); luînd originea arcelor în $P_0(\theta_0 = \pi)$, găsim $s = -4a\cos\dfrac{\theta}{2}$.

Cum $R = -4a\sin\dfrac{\theta}{2}$, *cicloida normală are ecuația intrinsecă*

(203‴) $R^2 + s^2 = \alpha^2$ cu $a = \alpha/4$ raza cercului generator.

Obs. a_1) Cu originea arcelor în O $(\theta_0 = 0)$: $s_1 = 8a\sin^2\dfrac{\theta}{4} = s + 4a$; deci $R^2 + (s_1 - 4a)^2 = 16a^2$. a_2) Ecuația (203″) exprimă: curba lui Mannheim e un cerc de rază α. b) $R = \dfrac{a(h \pm 1)}{h} \dfrac{(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos h\theta)^{3/2}}{1 \pm \lambda^2(h \pm 1) - \lambda(2 \pm h)\cos h\theta}$ și $\dfrac{h}{a(h \pm 1)} s = \int_{\theta_0}^{\theta} (1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos h\theta)^{1/2}\, d\theta$. Cînd curba ciclică e normală ($\lambda = 1$): $h(h + 2)R = \pm 4a(h + 1)\sin\dfrac{h\theta}{2}$ și, cu $\theta_0 = \pi/h$, $h^2 s = -4a(h \pm 1)\cos\dfrac{h\theta}{2}$; obținem

(203^{IV}) $(h \pm 2)^2 R^2 + h^2 s^2 = \alpha^2$ cu $a = h\alpha/4(h \pm 1)$ raza cercului de bază.

Curba lui Mannheim e o elipsă. *Obs.* Dacă $\theta_0 = 0$ (originea arcelor în vîrful A): $h^2 s_1 = 8a(h \pm 1)\sin\dfrac{2h\theta}{2} = h^2 s + 4a(h \pm 1)$ și $(h \pm 2)^2 R^2 + h^2(s_1 - 4a(h \pm 1)/h^2)^2 = \alpha^2$. Pentru *cardioidă* ($h = 1$, semn +): $9R^2 + s^2 = \alpha^2$ cu $a = \alpha/8$. Cardioidele $\rho = 2a(1 - \cos\theta)$ și $\rho = a(1 + \cos\theta)$ au polul în vîrful A ($\theta_0 = 0$) însă axele polare de sensuri opuse; raza cercului de bază: a, respectiv $a/2$., iar $\alpha = 8a$, respectiv $\alpha = 4a$. Pentru *nefroidă* ($h = 2$, semn +): $R^2 + (s/2)^2 = 9r^2$ cu $a = r/2$. Pentru *hipocicloida Steiner* ($h = 3$, semn −): $R^2 + 9s^2 = \alpha^2$ cu $a = 3\alpha/8$. Pentru *astroidă* ($h = 4$, semn −): $R^2 + 4s^2 = \beta^2$ cu $a = 2\beta/3 = \alpha/3$. De exemplu, pentru astroidele $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ și $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2a^{2/3}$: $\beta = 3a/2$ și $\beta = 2a$; deci razele cercurilor de bază: a și $2a$. Cum (în P la C) $\theta = \widehat{\vec{\imath}, Ox} = (x - a)/a$ (v. probl. 142), avem $R = a/\cos\theta$, $s = \int_0^{\theta} ds = a\ln\operatorname{tg}(\theta/2 + \pi/4)$. Ecuația intrinsecă $R = a\operatorname{ch}\dfrac{s}{a}$. Curba lui Mannheim e lănțișorul.

171 Extremitatea Q a unui segment PQ, de lungime constantă $2a$, se deplasează pe o dreaptă dată d astfel încît distanța de la un punct fix $O \in d$ variază cu unghiul θ dintre PQ și d. Să se afle: a) Locul Γ descris de P astfel încît tangenta în P să determine cu PQ și d un triunghi isoscel cu baza PQ. b) Ecuația intrinsecă a curbei Γ.

R. a) Fie (fig. 392) : $d = Ox$ şi $Q\,(p(\theta),\ o)$; deci $P\,(p(\theta) + 2a\cos\theta,\ 2a\sin\theta)$. Cum $m_{PM} = y'/x' = \operatorname{tg} 2\theta$. găsim $p = a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + C$; cu C astfel ca, pentru $\theta = \pi/2$, QP să fie perpendicular în O pe d, obţinem Γ: $x = a\left(\cos\theta + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|\right)$, $y = 2a\sin\theta$. [Pentru studiu,] fie $\theta \in$

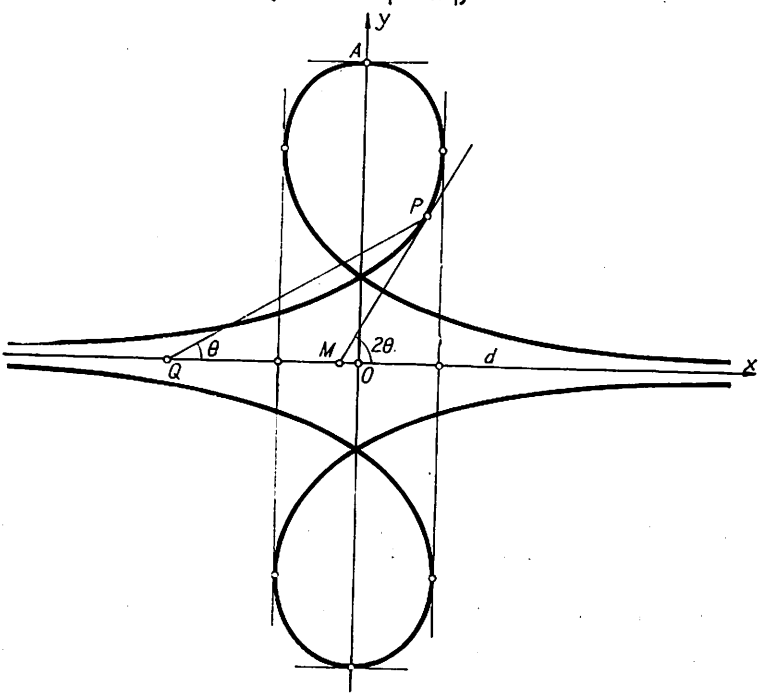


Fig. 392

$\in (0,\pi/2)$. Ox e asimptotă (tabela 29). *Obs.* Se poate considera curba descrisă de P cînd triunghiul isoscel PQM are baza QM. b) Cu $\varphi = \widehat{Ox, PM} = 2\theta$: $ds = a\,d\theta/\sin\theta$ şi $1/R = d\varphi/ds = 2\sin\theta/a$. Cu originea arcelor în A $(\theta = \pi/2)$: $s = a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|$ şi $R = \frac{a}{p}\operatorname{ch}\frac{s}{2}$.

Tabela 29 :

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
x	$-\infty$	↗	$\sim a/2$	↘	0
y	0	↗	$a\sqrt{2}$	↗	$2a$

172 Să se găsească ecuaţia analitică a curbei Γ definită prin ecuaţia intrinsecă : a) $aR = s^2 + a^2$; b) $R^2 + s^2 = 16a^2$; c) $R^2 = 2as$; d) $R^2 + a^2 = a^2e^{2s/a}$.

R. a) $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{a} + \theta_0$; putem lua $\theta_0 = 0$. Atunci $x = a\operatorname{arg\,sh}\frac{s}{a} + x_0$, $y = \sqrt{s^2 + a^2} - a + y_0$; putem avea $x_0 = 0$, $y_0 = a$. Deci $s = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$ şi $y^2 = a^2 + s^2 = a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}$, adică *lănţişorul*

(52). *Obs.* a_1) Cum $s = a\,\mathrm{tg}\theta$, putem lua $x = \frac{a}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + x_0$, $y = \frac{a}{\cos\theta} + a + y_0$; eliminînd θ, găsim (52). a_2) Fie (52); cum $R = a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}$ şi $s = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}$ rezultă ecuaţia intrinsecă. a_3) Se numeşte *pseudolănţişor* curba definită de ecuaţia intrinsecă

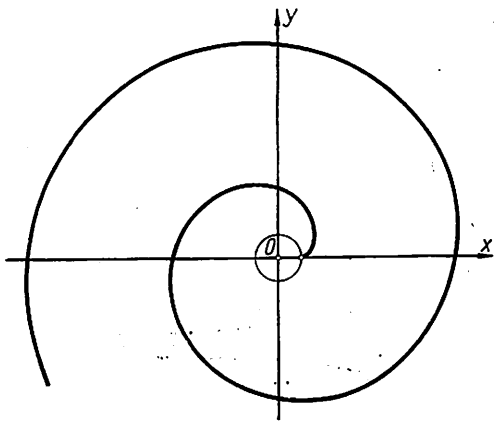


Fig. 393

$$R = b + s^2/a \quad (a, b \in R); \tag{204}$$

în cazul $a = b$, ecuaţia (204) defineşte lănţişorul (52). b) $\theta = \arcsin\frac{s}{4a} + \theta_0$. Cu $\theta_0 = 0$: $s = 4a\sin\theta$; deci $x = 2a\theta + a\sin 2\theta + x_0$, $y = -a\cos 2\theta + y_0$. Prin $2\theta = -t$, $x - x_0 = -X$, $y - y_0 = Y$ se găseşte *cicloida normală* (45). *Obs.* Prin $2\theta = t$, $x - x_0 = X$, $y - y_0 = Y$ se obţine cicloida (46). c) $\theta = \sqrt{2as}/a + \theta_0$. Cu $\theta_0 = 0$: $s = a\theta^2/2$; cu $x = X + x_0 - a$, $y = Y + y_0$, obţinem *evolventa cercului* (fig. 393; v. probl. 219).

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),$$
$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta). \tag{205}$$

d) Notînd $e^{s/a} = \sec t$: $R = a\,\mathrm{tg}\,t$. Deci $ds = a\,\mathrm{tg}\,t\,d\theta$. Însă $s = a\ln\sec t$, adică $ds = a\,\mathrm{tg}\,t\,dt$. Rezultă $\theta = t + C$. Luînd $C = 3\pi/2$ şi $x_0 = 0$, $y_0 = a$, obţinem *tractricea* (54). *Obs.* d_1) Ecuaţia $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}$ reprezintă tot o tractrice; se ia $e^{-s/a} = \sec t$. d_2) *Pseudotractoarea* e definită de

$$R^2 + b^2 = b^2 e^{2\varepsilon s/a} \quad (a, b \in R,\ \varepsilon = \pm 1;\ a = b \text{ defineşte tractricea}). \tag{205}$$

173 Să se studieze *pseudocicloida*, definită de ecuaţia intrinsecă

$$C: s^2 - b^2R^2 = \varepsilon a^2 \quad (a, b \in R;\ \varepsilon = \pm 1). \tag{206}$$

R. Curbele lui Mannheim sînt hiperbole. Cu $\theta = b\ln((s + \sqrt{s^2 - \varepsilon a^2})/a)$:

$$x = \frac{ab}{b^2+1}\left(\frac{1}{b}\,\mathrm{ch}\frac{\theta}{b}\cos\theta + \mathrm{sh}\frac{\theta}{b}\sin\theta\right),$$
$$y = \frac{ab}{b^2+1}\left(\frac{1}{b}\,\mathrm{ch}\frac{\theta}{b}\sin\theta - \mathrm{sh}\frac{\theta}{b}\cos\theta\right),$$

$\rho = \frac{ab}{b^2+1}\sqrt{\frac{1}{b^2}\mathrm{ch}^2\frac{\theta}{b} + \mathrm{sh}^2\frac{\theta}{b}}$ cînd $\varepsilon = 1$,

C avînd un punct cuspidal în $A\,(a/(b^2+1), 0)$ şi un nod în A' (fig. 394 a);

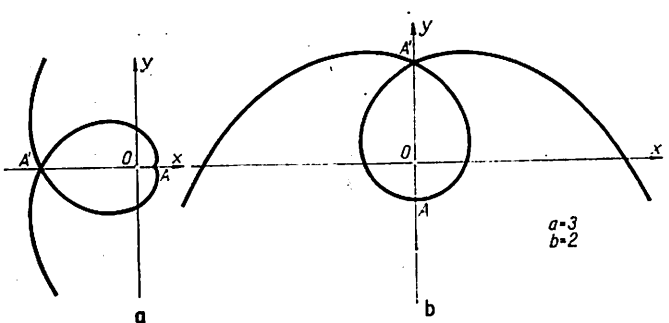


Fig. 394

$$x = \frac{ab}{b^2+1}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sh}\frac{\theta}{b}\cos\theta + \operatorname{ch}\frac{\theta}{b}\sin\theta\right)$$
$$y = \frac{ab}{b^2+1}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sh}\frac{\theta}{b}\sin\theta - \operatorname{ch}\frac{\theta}{b}\cos\theta\right)$$

$$\rho = \frac{ab}{b^2+1}\sqrt{\frac{1}{b^2}\operatorname{sh}^2\frac{\theta}{b} + \operatorname{ch}^2\frac{\theta}{b}} \text{ cînd } \varepsilon = -1,$$

C avînd un punct nodal în A' (fig. 394b). *Obs.* Podara lui (206), în raport cu O, e *spirala sinusurilor hiperbolice* $\rho = ab\operatorname{sh}\frac{\theta}{b}/(b^2+1)$ dacă $\varepsilon = 1$, sau *spirala cosinusurilor hiperbolice* $\rho = ab\operatorname{ch}\frac{\theta}{b}/(b^2+1)$ cînd $\varepsilon = -1$.

174 Să se afle curba C a cărei: a) rază de curbură sau b) curbură (în punctul curent) e proporţională cu lungimea arcului curbei, de la un punct fix al acesteia (originea arcelor).

R. a) $R = ks$ (k—const.); deci $k\theta = \ln s$ şi $x - x_0 = -1 + e^{k\theta}\cos\theta + (y - y_0)/k$, $y - y_0 = e^{k\theta}\sin\theta - (x - x_0)/k$. Cu $x_0 = 1 + y_0/k$, $y_0 = -x_0/k$, obţinem $x - y/k = e^{k\theta}\cos\theta$, $y + x/k = e^{k\theta}\sin\theta$, adică ($a^2 = k^2/(1+k^2)$) *spirala logaritmică* (44). Reciproc: arcul (de la pol) e $s = \rho/a$, deci $R = \rho\sqrt{1+k^2}$. b) Ecuaţia intrinsecă

$$Rs = a^2 \ (a > 0) \tag{207}$$

defineşte *cloloida* (sinonim: *spirala lui Cornu*). Curba lui Mannheim e o hiperbolă echilateră. Cu $\theta_0 = x_0 = y_0 = 0$ şi $\theta = s^2/2a^2 = \widehat{\vec{i}, Ox}$ sau $\theta = \pi t^2/2$, C:

$$x = a\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{2\theta}\,d\theta,\ y = a\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{2\theta}\,d\theta;\ x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\ y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt. \tag{207'}$$

Integralele din (207') sînt *integralele lui Fresnel* (introduse în difracţia luminii, emise de o sursă de la distanţă finită, produsă de un ecran sau o fantă), care nu-s exprimabile prin funcţii elementare. C trece prin O ($s = 0$), care e originea arcelor pe clotoidă, fiind un punct de inflexiune ($1/R = 0$, $(1/R)' \neq 0$) cu tangenta Ox. C e simetrică faţă de O. Cum $\int_0^\infty \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt = \int_0^\infty \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt = \frac{1}{2}$, $F\left(a\sqrt{\pi}/2, a\sqrt{\pi}/2\right)$ e un punct asimptotic; de asemenea şi simetricul său F' faţă de O (fig. 395). Centrul de greutate al unui arc al clotoidei e centrul interior de asemănare al cercurilor osculatoare la extremităţile arcului. C e singura curbă plană pentru care centrul de greutate al unui arc al ei e situat pe linia centrelor de curbură ale extremităţilor arcului.

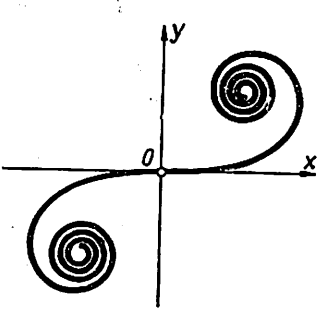


Fig. 395

175 Să se afle ecuaţiile parametrice ale curbei *pseudosferice* dată prin

$$R = a\,s^m \quad (a, m \in R). \tag{208}$$

176 Fiind date o curbă C şi un punct A_0, se numeşte *radiala lui C în raport cu A_0* locul C_1 al punctului P definit de echipolenţa (vectorială) $\overrightarrow{A_0P} = \overrightarrow{M\Omega}$, unde Ω e centrul de curbură al lui C (în M), cînd M descrie pe C. Curba C_{-1}, care admite ca radială pe C, se numeşte *antiradiala lui C*. Se cere: a) Radiala lui C în raport cu un alt punct A_1 din plan. b) Ecuaţia radialei lui C: b_1) $x = x(t)$, $y = y(t)$; b_2) $F(x, y) = 0$; b_3) $s = f(R)$. c) Ecuaţia antira-

dialei lui $C: \theta = f(\rho)$. *Apl.* a) Să se afle: a_1) radiala unei tractrice; a_2) radialele *curbelor Cesáro* definite prin

$$s = \int \lambda \, dR / \sqrt{(R/p)^{\mu} - 1} \qquad (p, \lambda, \mu \text{ numere reale}). \tag{209}$$

b) Să se determine antiradiala: b_1) unei drepte; b_2) unui cerc.

R. a) Se deduce din radiala în raport cu A_0 prin translația de vector director $\overline{A_0A_1}$. b) Cu $A_0(x_0, y_0)$ și $\overline{M\Omega} = R\,\bar{n}$, respectiv. $1/R = \dfrac{d\theta}{ds}$, C_1:

$$\begin{matrix} X = x_0 - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ Y = y_0 + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} X = x_0 - \dfrac{1}{\Delta} F_x (F_x^2 + F_y^2) \\ Y = y_0 - \dfrac{1}{\Delta} F_y (F_x^2 + F_y^2) \end{matrix} \quad ; \quad \theta = \int \frac{f'(\rho)}{\rho} d\rho, \tag{210}$$

cu Δ dat de (81) și polul reperului în A_0. Dacă C e o curbă algebrică de grad n, C_1 e — în general — de grad $3n\,(n-1)$, gradul micșorîndu-se cînd C are puncte multiple; de exemplu, pentru un punct multiplu de ordin p cu tangente distincte, se micșorează cu $4p\,(p-1)$ unități. Dacă C e unicursală, C_1 e de grad $6\,(n-1)$, care grad se micșorează cînd dreapta improprie se găsește în relație specială cu C. *Obs.* $C: R = f(\theta)$ cu $\theta = \widehat{\bar{i}, d}$ (d fixă), în reperul polar cu $Ox \parallel d$ și $O = A_0$, $C_1: \rho = f(\theta)$. c). C_{-1} are ecuația

$$s = \int R\, f'(R)\, dR. \tag{211}$$

Apl. a_1) Curba kappa $\rho = a \operatorname{tg} \theta$. a_2) $C_1: \rho = p/\cos^{2/\mu} \dfrac{\mu\theta}{2\lambda}$. *Obs.* Din ecuația (209): I) $\mu = -2$, $\lambda = \pm 1$: C e o *cicloidă normală* iar C_1 e un *cerc* care conține polul; II) $\mu = 1$, $\lambda = 1/2$: C e *lănțișorul* iar C_1 e *campila lui Eudoxos*

$$\rho = p/\cos^2 \theta \quad \text{(fig. 396)}, \tag{212}$$

folosită în problema „dedublării cubului"; III) $\mu = 2$, $\lambda = 1$: C e *lănțișorul de egală rezistență* iar C_1 e o *dreaptă*; IV) $\mu = 2/3$, $\lambda = 1/3$: C e o *parabolă* iar C_1 e *duplicatoarea Longchamps*; V) $\mu = 4/3$, $\lambda = 1/3$: C e o *hiperbolă echilateră* iar C_1 e *sextica* $(x^2 - y^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2$. b_1) $C: p = \rho \cos(\theta - \theta_0)$ și $C_{-1}: R = p \operatorname{ch} \dfrac{s}{p}$ (*lănțișorul de egală rezistență*). b_2) $C: \rho = p \cos(\theta - \theta_0)$ și $C_1: R^2 + s^2 = p^2$ (*cicloida normală*).

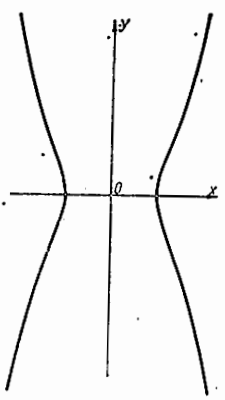


Fig. 396

177 Fie curba $C: \bar{r} = \bar{r}(s)$; vectorul $\bar{r}(s)$ satisface *ecuația Wilczynski*

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3} + \frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\frac{d\bar{r}}{ds^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d\bar{r}}{ds} = 0. \tag{213}$$

Apl. Să se găsească curba C dată de ecuația: a) $R = a$; b) $R = as$ (a-const.).

R. Eliminăm pe $\bar{i}$ și $\bar{n}$ în (193); căci, notînd prin punct derivarea în raport cu s, avem $\dot{\bar{n}} = \dot{R}\bar{r} + R\dot{\bar{r}}$ și $\ddot{\bar{n}} = -\bar{r}/R$. *Obs.* a) Cum $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, derivînd de 2 ori și eliminînd pe θ: *Coordonatele lui* $P \in C$ *verifică ecuația*

$$\ddot{\xi} + R\dot{\xi}/R + \xi/R^2 = 0, \quad \xi = \dot{\psi}. \tag{213'}$$

b) Prin $s = s(t)$, accentul fiind derivata în raport cu t, din (193): $\bar{\tau}' = s''\bar{\tau}/s' + s'\bar{\nu}/R$, $\bar{\nu}' = -s'\bar{\tau}/R + s''\bar{\nu}/s'$ cu $\bar{\tau} = \bar{r}' = s'\bar{l}$, $\bar{\nu} = s'\bar{n}$; ecuația diferențială asociată: $\bar{r}''' + (R'/R - 3s''/s')\bar{r}'' + (s'^2/R^2 - R's''/Rs' - s'''/s' + 3s''^2/s'^2)\bar{r}' = 0$ sau $\ddot{\xi} + (R'/R - s''/s')\dot{\xi} + s'^2\xi/R^2 = 0$ cu $\xi = \psi/s'$ *Apl.* a) Ecuația (213'): $\ddot{\xi} + \xi/a^2 = 0$ cu $\xi = C_1'\sin\frac{s}{a} + C_2\cos\frac{s}{a} = \psi$, încît $\psi = C_1 a\cos\frac{s}{a} + C_2 a\sin\frac{s}{a}$ $(C_1 = -C_1')$; deci C: $x = a\cos\frac{s}{a}$, $y = a\sin\frac{s}{a}$ (cerc). b) Ecuația (213') e ecuația Euler $s^2\ddot{\xi} + s\dot{\xi} + \xi/a^2 = 0$, cu $s = e^{at}$, devine $\xi'' + \xi = 0$ cu $\xi = A\cos t + B\sin t = \psi'/e^{at}$, încît $\psi = e^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, adică C: $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$ (spirală logaritmică).

10. ÎNFĂȘURĂTOAREA UNEI FAMILII DE CURBE PLANE

178 Să se afle *curba discriminantă* a familiei de curbe C_α: a) $x^2/(a-\alpha)^2 + y^2/\alpha^2 - 1 = 0$ (elipse); b) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - 1) = 0$ (cercuri); c) $x^2 - (y-\alpha)^3 = 0$ (parabole cubice); d) $[x^2 + (y-\alpha)^2](x-2) + x = 0$ (strofoide); e) $y = \alpha x$ (drepte); f) $(y-\alpha)^2 - (x-\alpha^2)^3 = 0$ (parabole cubice); g) $x^3 + (y-\alpha)^3 - 3x(y-\alpha) = 0$ (foliuri Descartes); h) $(l-x)(\alpha x^2 - 2y)\alpha + x + l = 0$ (l-const.); i) $xy - 2\alpha + \alpha^2(x+1) = 0$ (hiperbole); j) $(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3 = 0$ (parabole cubice); k) $x(\alpha - x)^2 = y$; l) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha(\alpha - 4) = 0$ (cercuri); m) $(3x^2 + 4y)y^2 - 2\alpha x(2x^2 + 3y) - \alpha^2 = 0$; n) $(x-\alpha^2) + y^2 = \alpha^2/2$ (cercuri).

R. Dîndu-se familia de curbe C_α cu un parametru α:

(214) $$F(x, y, \alpha) = 0,$$

curba discriminantă C e dată de sistemul de ecuații

(214') $$F(x,y,\alpha) = 0,\quad F_\alpha(x,y,\alpha) = 0,$$

formată din *înfășurătoarea* $\Gamma: x = x(\alpha), y = y(\alpha)$ cu $\frac{D(F, F_\alpha)}{D(x, y)} \neq 0$, $F_{\alpha\alpha} \neq 0$ și *locul punctelor*

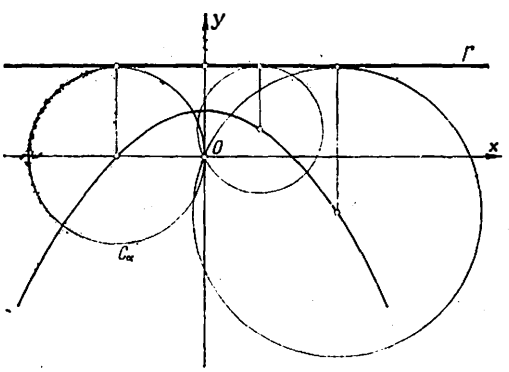


Fig. 397

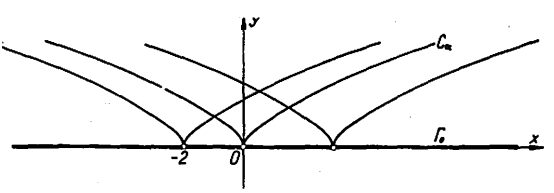


Fig. 398

singulare Γ_0: $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ cu $F_x = F_y = 0$. a) În $F_\alpha = 0$ ținem seama de y^2/α^2 din $F = 0$; deci $C = \Gamma$: $x^2 = (a-\alpha)^3/a$, $y^2 = \alpha^3/a$ e o astroidă. b) $F_\alpha = 0$, pentru $y \neq 0$, dă $\alpha = x/y$, încît introdusă în $F = 0$ dă $C = \Gamma$: $(x^2 + y^2)(y - 1) = 0$; pentru $y = 0$, $F_\alpha = 0$ dă și $x = 0$ iar $F(0, 0, \alpha) = 0$. Deci Γ se compune din dreapta d: $y - 1 = 0$ și punctul O, comun cercurilor C_α (fig. 397). c) $C = \Gamma_0$: $y = 0$ (fig. 398). d) Γ: $x = 0$ și Γ_0: $x - 1 = 0$; d: $x - 2 = 0$ e asimptota lor

comună. c) Γ se reduce la O (centrul fasciculului C_α). f) Ecuaţiile (214'): $(x-\alpha)^2\,[9\alpha^2(x-\alpha^2)-1]=0$, $-(y-\alpha)+3\alpha(x-\alpha^2)^2=0$; deci $\Gamma: x=(9\alpha^4+1)/9\alpha^2$, $y=(27\alpha^4+1)/27\alpha^3$ şi $\Gamma_0: y^2=x$. *Obs.* C_α se obţine dînd lui C_0: $y^2=x^3$ translaţia $x=X+\alpha^2$, $y=Y+\alpha$, prin care punctul ei dublu O descrie pe Γ_0. g) Eliminînd α în (214'), obţinem $x^4=4x$; deci $\Gamma: x=\sqrt[3]{4}$ şi $\Gamma_0: x=0$.

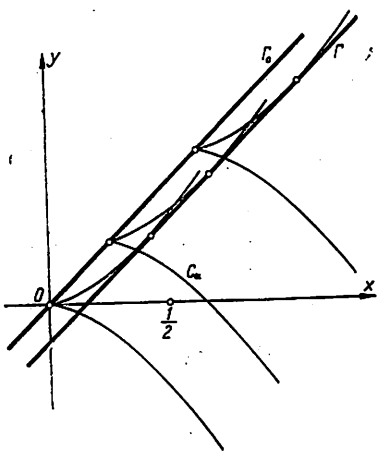


Fig. 399

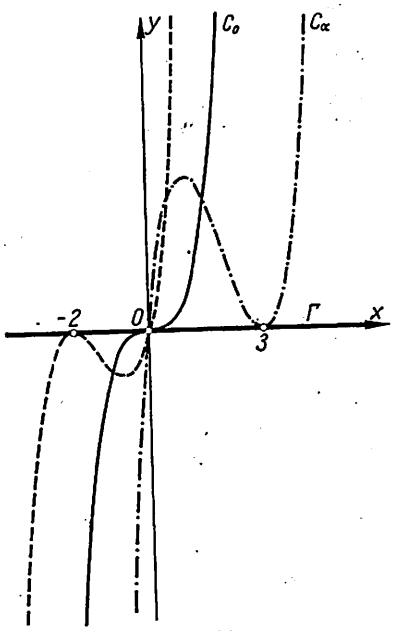


Fig. 400

h) Strofoida (66). i) $\Gamma: xy(x+1)=0$. Pentru $\alpha=0$, C_0 are punctul dublu $O\in\Gamma$. j) $\Gamma: 27(x-y)=4$ şi $\Gamma_0: x=y$ (fig. 399). k) $\Gamma: y=0$; O e comun curbelor C_α (fig. 400). l) $y^2=4(x+1)$. m) Cu y, din $F_\alpha=0$, în $F=0: C=\Gamma_0: x=\sqrt[3]{\alpha}$, $y=-\sqrt[3]{\alpha^2}$, adică parabola $x^2+y=0$; căci $F_x=F_y=0$. n) $y=\pm x$.

179 Să se afle înfăşurătoarea Γ a unei familii de drepte d_α. *Apl.* a) Cînd d_α: $a_1)$ $y=\alpha x-\alpha^2$; $a_2)$ $y=\alpha^2x-2\alpha^3$; $a_3)$ $y=x/\alpha+\alpha^3$; $a_4)$ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-a=0$; $a_5)$ $\alpha(\alpha^2+3)x-2y=a\alpha^3$; $a_6)$ $2\alpha^2x-2\alpha y+p=0$; $a_7)$ $x\sin\alpha+y\cos\alpha-\frac{a}{2}\sin 2\alpha=0$; $a_8)$ $\alpha^2(x-a)-\alpha y-a=0$. b) Să se afle înfăşurătoarea dreptelor care determină pe axele de coordonate segmente astfel încît: $b_1)$ suma, respectiv, $b_2)$ produsul lor e constant.

R. Fie $d_\alpha: y=m(\alpha)x+n(\alpha)$. $\Gamma: x=-n'/m'$, $y=(-n'm+nm')/m'$ cu $m'\neq 0$, $F_{\alpha\alpha}=m'(n'/m')'\neq 0$, adică $m\neq C$ şi $n\neq -C_1m+C_2$; cu $m=t$ şi $n=f(t)$, obţinem $\Gamma: x=-f'(t)$, $y=f(t)-tf'(t)$. *Obs.* a) Dacă $f(t)$ e o funcţie raţională de t, Γ e o curbă unicursală. b) Γ e soluţia singulară a unei ecuaţii diferenţiale Clairaut $y=xy'+f(y')$. c) O curbă C e înfăşurată de tangentele ei; căci, în $P(t, f(t))\in C$, tangenta e $y=f'(t)(x-t)+f(t)$. d) Cînd $m=C$ sau $n=-C_1m+C_2$, familia d_α e un fascicul cu centrul $\Omega_\infty(1, m, 0)$, respectiv $\Omega(C_1, C_2)$; atunci Γ se reduce la un punct: centrul fasciculului. *Apl.* $a_1)$ $x^2=4y$; $a_2)$ $27y=x^3$; $a_3)$ $27x^2=4y^3$; $a_4)$ $x^2+y^2=a^2$; $a_5)$ cisoida $x^3+y^2(x-a)=0$; $a_6)$ $y^2=2px$; $a_7)$ astroida; $a_8)$ $y^2+4a(x-a)=0$. *Obs.* Familia d_α are o interpretare geometrică; de exemplu: $a_4)$ tangentele cercului $x=a\cos\alpha$, $y=a\sin\alpha$; $a_6)$ tangentele paralele cu o direcţie la parabolă; $a_7)$ dreptele ce determină pe axele de coordonate un segment de lungime constantă. b) $x/\alpha+y/\beta-1=0$. $b_1)$ $\alpha+\beta=k$, $\Gamma: (x-y+k)^2=4kx$; $b_2)$ $\alpha\beta=k^2$, $\Gamma: 4xy=k^2$.

180 Să se afle înfășurătoarea diferitelor poziții ale unei drepte care se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω, în jurul unuia din punctele sale, punct care se deplasează în același timp pe o dreaptă fixă cu o viteză constantă v.

R. Luînd punctul în O la momentul inițial ($t = 0$) și dreapta fixă ca Ox, avem $A(vt, 0)$ și $\alpha = \omega t$. Obținem dreptele $y = (x - vt)\operatorname{tg}\omega t$; cu $\theta = 2\omega t$, $a = v/2\omega$, rezultă că Γ e cicloida (46) cu vîrful în origine.

181 Fiind date 2 drepte ortogonale $d_i (i = 1, 2)$ și un punct fix F pe una din bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte, se numește *scarabeu* (sinonim: *cărăbuș*) locul C al proiecției lui F pe dreptele d care taie pe d_i în A_i astfel că $A_1A_2 = \text{const}$. Se cere: a) Să se găsească punctele multiple ale lui C. b) Să se arate că C e podara astroidei în raport cu un punct de pe bisectoarea unghiului determinat de tangentele în 2 puncte cuspidale consecutive ale astroidei.

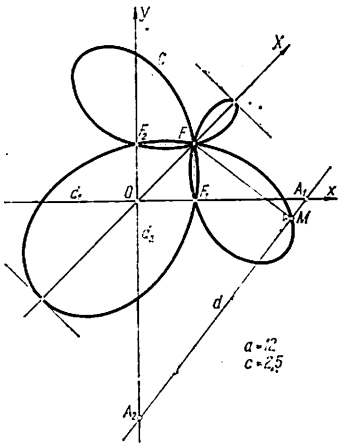


Fig. 401

R. Cu d_i ca Ox și Oy, iar $A_1A_2 = a$, $OF = c$, C are ecuația (fig. 401)

$$\left[x^2 + y^2 - \frac{c\sqrt{2}}{2}(x + y)\right]^2\left[\left(x - \frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] - a^2\left(x - \frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(y - \frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \tag{215}$$

sau, ω fiind unghiul dreptei A_1A_2 cu Ox și notînd $t = \pi - \omega$, $x = \left[a\sin^2 t + \frac{c\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)\right]\cos t$, $y = \left[a\cos^2 t - \frac{c\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)\right]\sin t$. În reperul cartezian cu originea în F și OF ca axă X, C are ecuația

$$4(x^2 + y^2 + cx)^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2)^2 = 0;\ \rho = \frac{a}{2}\cos 2\theta - c\cos\theta; \tag{215'}$$

$$x = \frac{(1 - u^2)P(u)}{(1 + u^2)^3},\ y = \frac{2uP(u)}{(1 + u^2)^3} \text{ cu } P(u) = \left(\frac{a}{2} + c\right)u^4 - 3au^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right) \text{ și } u = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

C e simetrică în raport cu OF. *Caz particular*: $c = 0$, cînd C e rodoneea cu 4 foi, numită *corolla* (v. fig. 170). a) F e punct quadruplu, iar F_i — proiecțiile lui F pe d_i — sînt noduri. *Obs.* Folosind (215_1), $F = F_x = F_y = 0$ e satisfăcut dacă $x^2 + y^2 + cx = 0$, $x^2 - y^2 = 0$; deci O, $F_{1,2}(-c/2, \pm c/2)$ sînt puncte multiple.

182 Să se găsească înfășurătoarea Γ a dreptelor care: a) unesc extremitățile a 2 diametri conjugați la o elipsă E; b) formează cu 2 drepte date un triunghi de arie constantă; c) sînt dreptele Wallace-Simpson corespunzătoare punctelor cercului circumscris unui triunghi dat; d) sînt tangente în vîrf parabolelor înstrise unui triunghi dat.

R. a) $P_1(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, $P_2(-a\sin\alpha, b\cos\alpha) \in E$; deci $\Gamma: 2b^2x^2 + 2a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ (elipsă). b) $d_1 = Ox$, $d_2: y = mx$; $d \cap d_1 = (\alpha, 0)$ și $d \cap d_2 = (\beta, m\beta)$ iar $S_{tr} = \frac{1}{2}m\alpha\beta = a^2$.

$\Gamma: 2y(y-mx)+ma^2=0$ e o hiperbolă cu asimptotele d_t. c) Proiecţiile lui $P \in C\,(0;2a)$ pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ sînt coliniare (pe dreapta Wallace-Simpson asociată lui P); Deci $A_i(2a\cos\alpha_i, 2a\sin\alpha_i)$ cu $i=1,2,3$. Γ e hipocicloida Steiner $x=a\,(2\cos\theta+\cos 2\theta)$, $y=a\,(2\sin\theta-\sin 2\theta)$ cu $\theta=3\,(\varphi-2s)$, $2s=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, tritangentă la cercul lui Euler al triunghiului dat. d) Hipocicloidă Steiner. *Obs.* Dreapta Wallace-Simpson asociată lui P de pe cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$ e tangenta în vîrf la parabola tangentă laturilor triunghiului dat şi are focarul în P.

183 Fiind date o curbă C şi un punct Ω, se numeşte *antipodara lui C în raport cu Ω* curba C' a cărei podară în raport cu Ω e C. Să se arate că antipodara C' e înfăşurătoarea perpendicularei dusă prin $M \in C$ pe raza vectoare ΩM. *Apl.* a) Antipodara unei parabole în raport cu focarul ei. b) Antipodara unui cerc C în raport cu un punct Ω care nu aparţine cercului.

R. Proiecţiile M ale lui Ω pe tangentele lui C' sînt situate pe C. *Obs.* a) C' e locul punctelor M' diametral opuse lui Ω în cercurile care trec prin Ω şi sînt tangente lui C. b) Normalele la C, în punctele de contact ale tangentelor duse din Ω, sînt asimptote ale lui C'. c) C şi C' sînt tangente în punctele de coincidenţă ale normalelor duse din Ω la C. d) *Podara negativă de ordin p* e, prin definiţie, curba Γ_{-p} care admite pe C ca podară de ordin p. Pentru Γ_{-p} se folosesc formulele de la Γ_p în care se consideră pentru p valori negative (v. probl. 32). C' e podara negativă C_{-1} a lui C iar C e podara antipodarei în raport cu Ω. *Apl.* a) $C: x=t^2/2p,\ y=t.\ 2p\ (t^2-p^2)\,x+4p^2ty-(t^2+3p^2)\,t^2=0$; $C': x=3t^2/2p,\ y=(3p^2-t^2)\,t/2p^2$, adică (prin translaţia $\overrightarrow{OF}$) trisectoarea Catalan (175). b) C' e o conică cu un focar în Ω, celălalt fiind simetricul lui Ω faţă de centrul lui C. C' e elipsă sau hiperbolă, după cum Ω e interior sau exterior lui C. *Obs.* Cînd C' e o hiperbolă, normalele la C în punctele de contact ale tangentelor duse din $\Omega=0$ la C sînt asimptotele lui C'. C şi C' sînt tangente în punctele în care diametrul lui C prin Ω taie pe C.

184 Vîrful Ω al unui unghi de mărime dată θ alunecă de-a lungul unei drepte fixe d, iar una din laturile unghiului trece prin punctul dat Ω_0. Să se găsească înfăşurătoarea Γ a celeilalte laturi.

185 Se numeşte *curbă Talbot* înfăşurătoarea perpendicularei în punctul M al unei elipse date pe raza vectoare a lui M relativă la centrul elipsei.

R. Fie $E: x=a\cos t,\ y=b\sin t$. Γ e sextica unicursală (fig. 402)

$$x=\frac{\cos t}{a}(a^2+c^2\sin^2 t),\quad y=\frac{\sin t}{b}(a^2-2c^2+a^2\sin^2 t)\qquad (c^2=a^2-b^2),$$

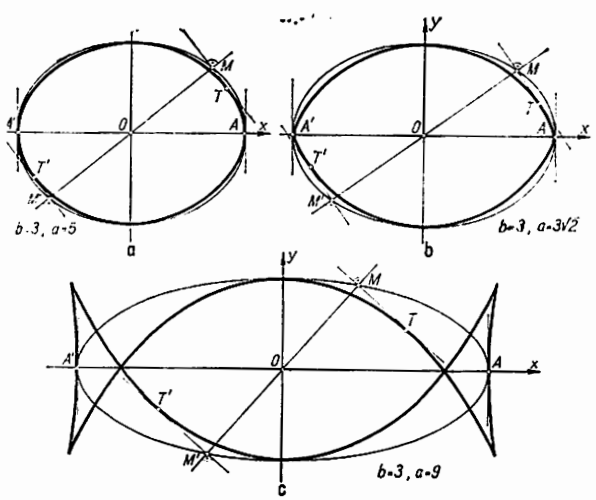


Fig. 402

simetrică în raport cu axele elipsei şi tangentă acesteia în vîrfurile ei; are 4 puncte de întoarcere (cînd t e dat de $3c^2\sin^2 t+a^2-2c^2=0$), fiind reale dacă $a>b\sqrt{2}$. Forma curbei depinde de a şi b: $a<b\sqrt{2}$, $a=b\sqrt{2}$ (A, A' puncte triple cu tangente confundate) şi $a>b\sqrt{2}$.

186 Să se studieze înfășurătoarea Γ a dreptelor d care taie 2 drepte date d_i $(i = 1, 2)$ în A_i astfel încît $A_1A_2 = a$ (const.).

R. Fie d_i ca axe carteziene oblice, de unghi θ; $d: x/\alpha + y/\beta - 1 = 0$ cu $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta = a^2$. Coordonatele plückeriene ale lui d: $\xi_1/\xi_3 = -1/\alpha$, $\xi_2/\xi_3 = -1/\beta$, Γ: $a^2\xi_1^2\,\xi_2^2 - (\xi_1^2-2\xi_1\xi_2\cos\theta + \xi_2^2)\,\xi_3^2=0$; deci Γ e de clasă $m=4$. Tangentele duble: soluțiile $d_1(\xi_1=\xi_3=0)$, $d_2(\xi_2=\xi_3=0)$ și $d_\infty(\xi_1=\xi_2=0)$ ale sistemului $\partial f/\partial\xi_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$; deci $\tau=3$. Din $(123_{3,4})$: $n = 6 - 3i$, $k = 6 - 8i$; de unde: $i = 0$ și $n = k = 6$. Din (123_1): $\delta = 4$.

187 Să se afle înfășurătoarea unei familii de drepte depinzînd pătratic de un parametru α: $F(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ cu A, B, C funcții liniare în x și y. *Apl.* Să se afle înfășurătoarea Γ a polarei punctului $P(\alpha, 1/\alpha, 1)$ în raport cu o conică (nedegenerată) C: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

R. Eliminarea lui α în (214') e echivalentă cu condiția că ecuația $F(\alpha) = 0$ are rădăcinile egale; deci Γ *e conica* $4AC - B^2 = 0$. *Apl.* Polara: $x_i' f_{x_i} = 0$, adică $\alpha^2 f_{x_1} + \alpha f_{x_3} + f_{x_2} = 0$; Γ: $4f_{x_1}f_{x_2} - f_{x_3}^2 = 0$. *Obs.* Γ e tangentă dreptelor $f_{x_1} = 0$ și $f_{x_2} = 0$ (definind centrul Ω al lui C); fie T_1 și T_2 punctele de tangență. Polul dreptei T_1T_2: $f_{x_3}=0$ față de Γ e centrul Ω al lui C; adică T_1T_2 e polara lui Ω în raport cu Γ.

188 Cercul (90) e înfășurătoarea familiei de drepte (71). Care e relația între coeficienții a, b, c?

189 Să se afle înfășurătoarea Γ a cercurilor astfel încît: a) au ca diametri coardele principale ale unei parabole; b) au raza constantă iar centrul descrie un cerc C_0; c) au centrul pe o elipsă sau hiperbolă echilateră și trec prin centrul ei, respectiv au centrul pe o parabolă și trec prin vîrful ei; d) au centrul pe o hiperbolă echilateră și sînt tangente uneia din asimptote; e) au ca diametru coardele paralele (cu o direcție dată) într-un cerc fix; f) au ca diametru coardele care trec prin focarul unei parabole.

R. a) $y^2 = 2px$; coardele principale sînt cele perpendiculare pe axa parabolei. Cercurile: $(x-\alpha)^2 + y^2 = \beta^2$ cu $\beta^2 = 2p\alpha$, Γ: $y^2 = 2px + p^2$. b) $C_0\,(O;R)$, Γ e formată din 2 cercuri concentrice cu C_0, de raze $R \pm r$. c) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, Γ: $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$; $x^2 - y^2 = a^2$, Γ e lemniscata $(x^2 + y^2) = 4a^2\,(x^2 - y^2)$; $y^2 = 2px$, Γ: $x^3+(x + p)\,y^2 = 0$. d) $xy = a^2$ și cercurile tangente lui Ox, Γ: $y = 0$ și $x = a\,(t^5 + 3t)/(t^4+1)$, $y = 2at^3/(t^4 + 1)$. e) $x^2 + y^2 = a^2$ și coardele $\| Oy$, Γ: $x^2 + 2y^2 - 2a^2 = 0$. *Obs.* Pentru o elipsă și coarde $\| Oy$, Γ: $x^2/(a^2 + b^2) + y^2/b^2 - 1 = 0$. f) $y^2 = 2px + p^2$, Γ: $x + p = 0$ și $2\,(x^2 + y^2) - p\,(x + p) = 0$.

190 Fie $x\sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha)$ o dreaptă mobilă, iar P punctul caracteristic al ei. Să se determine funcția $f(\alpha)$ astfel ca segmentul OP să aibă lungimea egală cu raza de curbură în P a înfășurătoarei Γ.

191 Fie două repere (plane) suprapuse $\Pi = OXY$ și $\pi = P_0xy$, primul fiind fix iar al doilea aflat în *mișcare continuă* față de primul. Să se arate: a) Notînd $\bar e_1$ = versor P_0x, $\bar e_2$ = versor P_0y și $\bar R_0(X_0, Y_0) = OP_0 = X_0\bar i + Y_0\bar j$ ($\bar i$ = versor OX, $\bar j$ = versor OY), *deplasarea infinitezimală* a lui π e dată de

$$\frac{d\bar e_1}{dt} = p\bar e_2,\quad \frac{d\bar e_2}{dt} = -p\bar e_1,\quad \frac{d\bar R_0}{dt} = a\bar e_1 + b\bar e_2 \text{ cu } p = \frac{d\omega}{dt} \text{ și } \omega = \widehat{O\bar X,\, P_0x} \quad (t\text{-timpul}) \tag{216}$$

Ce devin aceste formule cînd P_0x e tangentă traiectoriei lui P_0 și parametrul t al traiectoriei e lungimea arcului acesteia? b) Dacă $\bar R(X,Y) = \overline{OP}$ și $\bar r(x,y) = \overline{P_0P}$ sînt, respectiv, vectorii de poziție ai unui punct P în raport cu planele Π și π, raportat la π, *viteza absolută* $\frac{d\bar R}{dt}\left(\frac{\delta x}{dt}, \frac{\delta y}{dt}\right)$ a lui P e egală cu suma

vitezei relativă $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ a lui P cu *viteza de transport* $(a-py, b+px)$ a lui π, adică

$$\frac{\delta x}{dt}=\frac{dx}{dt}+a-py, \quad \frac{\delta y}{dt}=\frac{dy}{dt}+b+px, \tag{216'}$$

viteza de transport descompunîndu-se în o *viteză de translație* $\frac{d\bar{R}_0}{dt}$ (a, b) și o *viteză de rotație* $(-py, px)$ în jurul unui punct $C\left(-\frac{b}{p}, \frac{a}{p}\right)$, numit *centrul momentan de rotație al planului* π. c) Punctele caracteristice ale unei curbe $\gamma: F(x, y)=0$, antrenată solidar de planul π, sînt picioarele normalelor duse din centrul momentan C al lui π. *Apl.* a) Dacă un segment AB de lungime constantă se mișcă în plan, să se determine punctul caracteristic $P \in AB$; de exemplu: A și B descriu drepte fixe perpendiculare. b) Dacă un unghi de deschidere constantă se mișcă în plan, normala la traiectoria vîrfului și normalele la cele 2 laturi, în punctele caracteristice respective, sînt concurente. c) Se numește *mișcare concoidală* mișcarea planului π față de planul Π astfel ca o dreaptă $d \in \pi$ să treacă mereu printr-un punct fix $A \in \Pi$, traiectoria $\sum_0$ a unui punct $P_0 \in d$ fiind *curba directoare* a mișcării concoidale; să se studieze o astfel de mișcare cînd $\sum_0$ e o dreaptă.

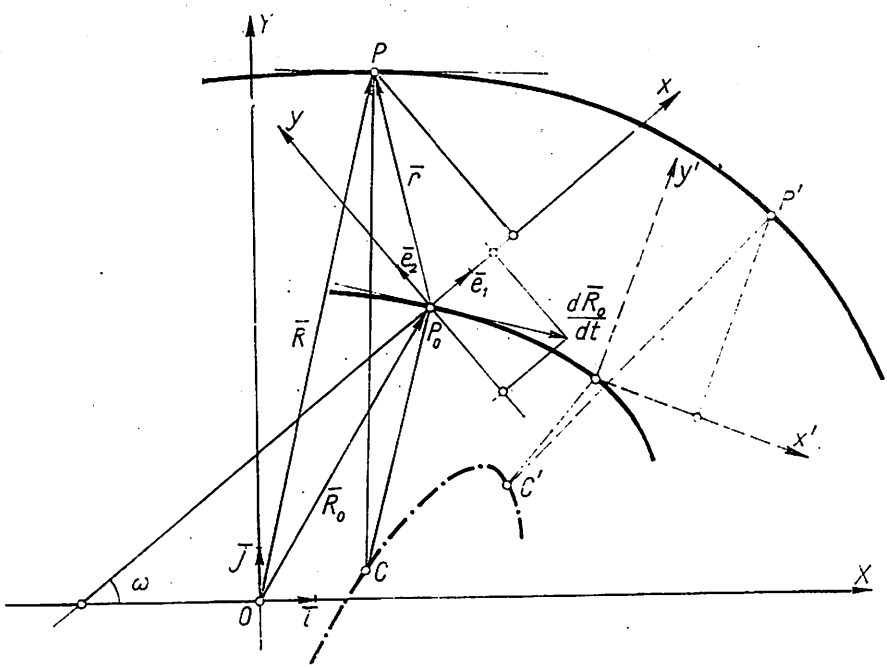


Fig. 403

R. a) $\bar{e}_1$ $(\alpha_1=\cos\omega, \alpha_2=\sin\omega)$, $\bar{e}_2$ $(\beta_1=-\sin\omega, \beta_2=\cos\omega)$ și, în Π, P_0 are viteza $d\bar{R}_0/dt$; se notează cu (a, b) proiecțiile acestei viteze în π (fig. 403). În cazul menționat (216) se reduc la formulele Frenet; căci $\bar{t}=\bar{e}_1$, $\bar{n}=\bar{e}_2$, $p=1/R$ iar $a=1$, $b=0$. b) Trecerea de la π la Π:

$$X=X_0+x\alpha_1+y\beta_1, \quad Y=Y_0+x\alpha_2+y\beta_2. \tag{217}$$

Derivînd relaţia $\overline{R} = \overline{R}_0 + \bar{r}$, cu (216), găsim în π formulele (216'). $P(x, y) \in \pi$ e fix în Π dacă avem *condiţiile de imobilitate*

$$(216'') \qquad \frac{\delta x}{dt} = 0, \quad \frac{\delta y}{dt} = 0, \quad \text{adică} \quad \frac{dx}{dt} = -a + py, \quad \frac{dy}{dt} = -b - px.$$

Obs. Cînd (216'') sînt satisfăcute numai în momentul t_0, se zice că P e staţionar în acel moment şi, în general, traiectoria lui are în el un punct cuspidal. Obţinem mişcarea lui π cînd fiecare punct $P \in \pi$ are coordonatele (x, y) constante în tot cursul mişcării; atunci

$$(216''') \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{adică} \quad \frac{\delta x}{dt} = a - py, \quad \frac{\delta y}{dt} = b + px,$$

mişcarea fiind o *congruenţă directă* (cu păstrarea lungimilor, unghiurilor şi sensul lor) între planele $\pi(t)$ şi $\pi'(t' = t + \triangle t)$. Lui $P(x, y) \in \pi$ îi corespunde $P'(x', y') \in \pi'$ astfel încît

$$x' = x_0 + x\cos\triangle\omega - y\sin\triangle\omega, \quad y' = y_0 + x\sin\triangle\omega + y\cos\triangle\omega \text{ cu } x_0 \to 0, y_0 \to 0 \text{ cînd } \triangle t \to 0.$$

Dacă $\triangle\omega = 0$, deplasarea infinitezimală a lui π e *translaţia* de direcţie (a, b); căci, aplicînd (216''') lui $P_0(x = 0, y = 0)$, avem $x_0/\triangle t \to a$, $y_0/\triangle t \to b$ cînd $\triangle t \to 0$. Dacă $\triangle\omega \neq 0$, există C (fix) $\in \pi$ care coincide cu corespondentul său; atunci $x_0 + x(\cos\triangle\omega - 1) - y\sin\triangle\omega = 0$, $y_0 + x\sin\triangle\omega + y(\cos\triangle\omega - 1) = 0$ cu $4\sin^2\frac{\triangle\omega}{2} \neq 0$, încît $x = \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 \operatorname{ctg}\frac{\triangle\omega}{2}\right) = x_0/2 - (y_0/\triangle t)(\triangle t/\triangle\omega)\left(\operatorname{ctg}\frac{\triangle\omega}{2}\Big/\frac{\triangle\omega}{2}\right) \to -\frac{b}{p}$, $y = \frac{1}{2}\left(x_0 \operatorname{ctg}\frac{\triangle\omega}{2} + y_0\right) \to \frac{a}{p}$. Cum $CP = CP'$, iar $\widehat{CP, CP'} = \triangle\omega$, deplasarea infinitezimală a lui π e o rotaţie de centru C şi unghi $\triangle\omega$. C are proprietăţile: b_1) E punctul din π a cărei viteză se anulează la momentul t; rezultă din (216'''). b_2) Traiectoria lui P e o ramură netedă, care poate să nu fie simplă; cînd $P = C$, ea are un punct cuspidal. b_3) Normalele traiectoriilor descrise de punctele lui π trec prin centrul momentan C respectiv (v. fig. 403); căci, faţă de π, parametrii directori ai tangentei la traiectoria lui P sînt (216''') şi ai dreptei CP sînt $(x + b/p, y - a/p)$. c) Cu (217), obţinem în Π pe γ: $\Phi(X, Y, t) = 0$. Punctele caracteristice sînt date de $\Phi = 0$, $\Phi_t = 0$, ultima ecuaţie obţinîndu-se derivînd pe F în ipoteza că X şi Y sînt constante, adică $P(x, y)$ satisface condiţia (216''). Rezultă

$$F(x, y) = 0, \quad (py - a)F_x + (px + b)F_y = 0,$$

ultima ecuaţie exprimînd că normala în P la γ e paralelă cu CP. *Obs.* c_1) În Π, γ admite înfăşurătoarea Φ. c_2) Cînd deplasarea infinitezimală a lui π e o translaţie ($p = 0$), normalele sînt perpendiculare pe direcţia (a, b) a translaţiei; deci C e aruncat la infinit. *Apl.* a) Mişcarea lui AB e definită prin ataşarea de AB a unui reper cu $P_0 = A$ şi $P_0x = AB$ (fig. 404); normala la traiectoria descrisă de un punct al lui AB trecînd prin C, punctul caracteristic $P \in AB$ e proiecţia lui C pe AB. În exemplul considerat, traiectoriile lui A şi B sînt respectiv OX şi OY; deci C e intersecţia perpendicularelor în A pe OX şi în B pe OY. Notînd $AB = l$, în Π: $A(t, 0)$ şi $B(0, \sqrt{l^2 - t^2})$; deci $\operatorname{tg}\omega = -\sqrt{l^2 - t^2}/t$, iar $X = t - tx/l - y\sqrt{l^2 - t^2}/l$, $Y = x\sqrt{l^2 - t^2}/l - ty/l$. În Π: $C(X = t, Y = \sqrt{l^2 - t^2})$ şi descrie *cercul* Γ: $X^2 + Y^2 = l^2$; în π: $C(x = (l^2 - t^2)/l, y = -t\sqrt{l^2 - t^2}/l)$ şi descrie *cercul* Γ_1: $x^2 + y^2 - lx = 0$. În π: $P(x = l, y = 0)$ şi descrie *axa* P_0x; în Π: $P(X = t^2/l^2, Y = (l^2 - t^2)^{3/2}/l^2)$ şi descrie *astroida* Φ: $X^{2/3} + Y^{2/3} = l^{2/3}$. De altfel, AB: $y = 0$ şi $X/t + Y/\sqrt{l^2 - t^2} - 1 = 0$; deci admite înfăşurătoarea Φ. *Obs.* Construcţia lui P cu ajutorul lui C determină construcţia prin puncte a lui Φ. b) Consecinţă a aplicaţiei a); sînt concurente în centrul momentan C al mişcării (fig. 404 c). c) Fie $A = 0$ şi d: $Y = X\operatorname{tg}\omega$, Σ_0: $X = c$; deci $P_0(X_0 = c, Y_0 = c\operatorname{tg}\omega)$, încît $P(x = l, y = 0)$ şi descrie *axa* P_0x în π iar $P(X = c + l\cos\omega, Y = c\operatorname{tg}\omega + l\sin\omega)$ şi descrie *concoida Nicomede* Σ: $(X^2 + Y^2)(X - c)^2 = l^2X^2$ în Π. Luînd $\omega = t$, rezultă $p = 1$; deci $d\overline{R}_0/dt = c\bar{j}/\cos^2 t$. Din $d\overline{R}_0/dt = (a\alpha_1 + b\beta_1)\bar{i} + (a\alpha_2 + b\beta_2)\bar{j}$, deducem $a = c\sin t/\cos^2 t$, $b = c/\cos t$; deci C, în π: $x = -c/\cos t$, $y = c\sin t/\cos^2 t$ şi descrie *campila lui Eudoxos* Γ_1: $r = c/\cos^2 t$ sau $c^2(x^2 + y^2) = x^4$, iar în Π: $X = -c\operatorname{tg}^2 t$, $Y = c\operatorname{tg} t$ şi descrie *parabola* Γ: $Y^2 + cX = 0$ (fig. 405). Fie $Q = OX \cap \Sigma_0$, fiind fix în Π: $X = c$, $Y = 0$; în π: $x = Y_0\sin t = c\sin^2 t/\cos t$, $y = Y_0\cos t = c\sin t$ şi descrie *curba kappa* Γ_2: $r =$

$= c \operatorname{tg} t$ sau $x^2(x^2+y^2) = x^2y^2$. *Obs.* Fie, în π, cercul fix $\Gamma_0 : x^2 + y^2 = r^2$; în Π, admite înfășurătoarea $\Phi : X = c \pm r$. Căci $P_c \in \Gamma_0 : x^2 + y^2 = r^2$, $y = -x \operatorname{tg} t$; deci $P_c(x_c = \pm r \cos t, y_c = \mp \sin t)$, descriind în Π dreapta $X = c \pm r$. Sau, în π, $\Gamma_0 : (X - c^2) + (Y - c \operatorname{tg} t)^2 = r^2$; deci $Y - c \operatorname{tg} t = 0$, încît $\Phi : X = c \pm r$.

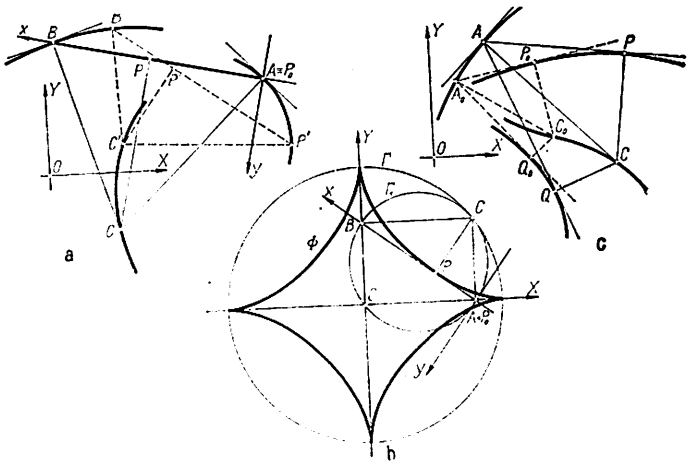


Fig. 404

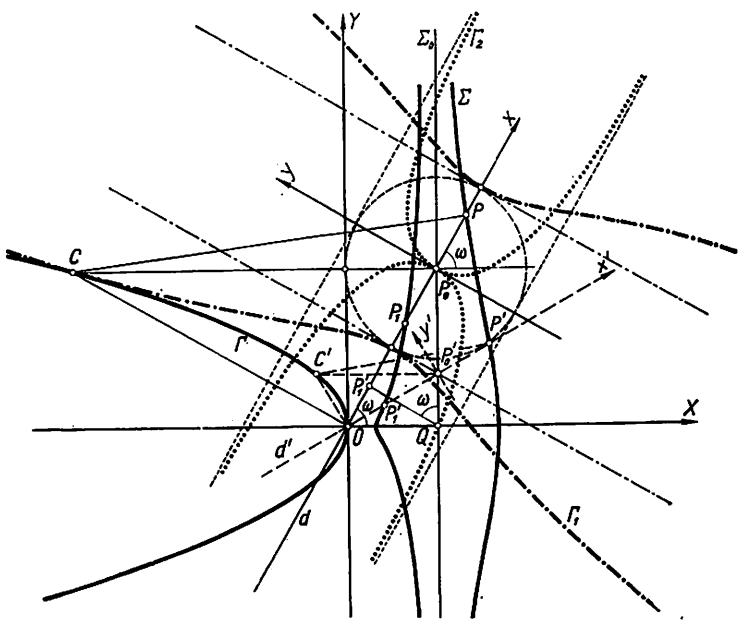


Fig. 405

192 Fie familia de conice $3atx^2 + 2(at^2 + 1)y^2 - 6at^2x - 4aty + 2a^2t^4 = 0$, unde t e un parametru (a — const., $a > 0$). Să se arate: a) Locul centrelor conicelor din familia dată e *serpentina lui Newton*. b) Înfășurătoarea polarei originii față de aceste conice e *parabola lui Neil*. c) Podara originii față de parabola lui Neil e o cuartică circulară.

193 Fiind date o curbă C și un punct Ω, se numește *podoida curbei C în raport cu polul Ω* locul C_p al simetricelor lui Ω față de tangentele lui C. Să se arate: a) E omotetica de raport 2 a podarei lui C în raport cu Ω. b) E înfășurătoarea cercurilor Γ conținînd pe Ω și cu centrele în $M \in C$.

R. Se ține seama de problemele 32 și 73; cu $\Omega=0$, obținem pentru C_p (fig. 406):

$$X = \frac{2(xy'-x'y)y'}{x'^2+y'^2},\quad Y = -\frac{2(xy'-x'y)x'}{x'^2+y'^2};$$

$$X = \frac{2(xF_x+yF_y)F_x}{F_x^2+F_y^2},\quad Y = \frac{2(xF_x+yF_y)F_y}{F_x^2+F_y^2},$$

după cum C: $x=x(t), y=y(t)$ sau C: $F(x,y)=0$. b) Fie C: $x=x(t), y=y(t)$ și $M(x,y)\in C$. Γ: $X^2+Y^2-2xX-2yY=0$. Derivînd: $X/y' = -Y/x' = k$; $(X,Y)\in\Gamma$ cînd $k=2(xy'-x'y)/(x'^2+y'^2)$. *Obs.* Γ mai admite încă un punct caracteristic Q, simetricul lui Ω în raport cu tangenta în M la C. Podara lui C în raport cu Ω e omotetica de raport 1/2 a înfășurătoarei cercurilor Γ în raport cu Ω; deci: *Înfășurătoarea cercurilor γ care au ca diametru razele vectoare ale curbei C e podara lui C față de pol*; analitic: γ e cercul $X^2+Y^2-xX-yY=0$ și (prin derivare) $X/y' = Y/(-x') = k$, iar din $(X,Y)\in\gamma$: $k=(xy'-x'y)/(x'^2+y'^2)$.

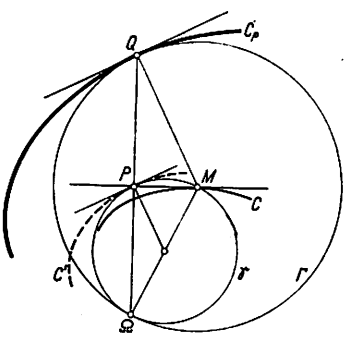


Fig. 406

194 Tangenta în punctul curent al elipsei taie axele ei în P și Q; să se afle înfășurătoarea parabolei Γ tangentă axelor în P și Q, locurile geometrice ale focarului și vîrfului lui Γ.

195 Fie familia de parabole C_α care, într-un punct dat, are cu o curbă C dată un contact de ordin 2. Se cere: a) Locul focarelor acestor parabole. b) Înfășurătoarea Γ a axelor lor.

R. Se ia reperul afin asociat lui C în punctul dat; deci, în O: $y=0, y'=0, y''=1/R$. Axa parabolei făcînd unghiul α cu Ox, C_α: $(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 = 2Cy$ cu $C=R\sin^2\alpha$. a) $x^2+y^2-Ry/2=0$. b) Axa parabolei: $x\sin\alpha - y\cos\alpha = -R^2\sin^2\alpha\cos\alpha$; Γ: $x=-R\sin 2\alpha\cos^2\alpha$, $y=-R\sin^3\alpha\cos^2\alpha$.

196 Vîrful unei parabole, de parametru p și cu axa paralelă cu Ox, descrie parabola $y^2=2qx$. Să se afle înfășurătoarea parabolei.

197 Fie parabolele C_α: $y = x\operatorname{tg}\alpha - gx^2/2v_0^2\cos^2\alpha$, descrise de un proiectil lansat în vid din origine cu o viteză inițială v_0 și sub un unghi α (v. probl. 167); înfășurătoarea Γ a lui C_α se compune din O, prin care trec toate parabolele C_α, și *parabola de siguranță* Γ'.

R. Se ia $\lambda=\operatorname{tg}\alpha$; Γ': $2y = v_0^2/g - gx^2/v_0^2$. Punctele planului situate deasupra lui Γ' nu pot fi atinse niciodată, oricare ar fi α (fig. 407). Locul vîrfurilor parabolelor C_α e elipsa E: $x^2+4y^2-2v_0^2y/g=0$, avînd ca axă mică ordonata vîrfului lui Γ' iar axa mare dublul celei mici. Punctele exterioare lui E, dar interioare lui Γ', nu pot fi atinse de proiectil decît în cădere; punctele interioare lui E și Γ' pot fi atinse în urcarea proiectilului aruncat sub 2 unghiuri diferite. Pentru $\alpha=\pi/2$, traiectoria e segmentul OB, de lungime $v_0^2/2g$.

198 Prin punctul dublu al curbei C: $x^3=(x-a)y^2$ se duc 2 drepte ortogonale, care retaie pe C în P și Q. Se cere: a) Să se afle înfășurătoarea Γ a dreptei PQ. b) Să se traseze graficele curbelor C și Γ.

R. O e punct de întoarcere de prima speță. Fie P $(at^2/(t^2-1),\ at^3/(t^2-1))$; deci $Q(-a/(t^2-1),\ a/t(t^2-1))$. Cu $\alpha = t - 1/t$, PQ: $\alpha^2 x - \alpha y + a = 0$, Γ: $y^2 - 4a = 0$. *Obs.* Mijlocul lui PQ se deplasează pe $2x = a$. b) Asimptote: $x = a$, $x \pm y + a/2 = 0$. C e simetrică față de Ox (tabela 30, fig. 408).

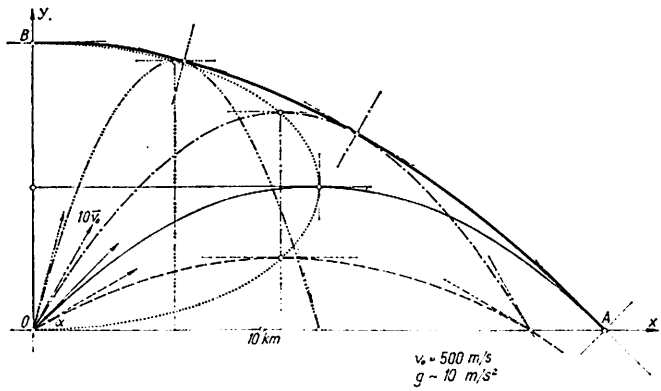


Fig. 407

Tabela 30:

t	0	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	2	∞
x	0	$-\frac{a}{3}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{9a}{5}$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{4a}{3}$	a
y	0	$-\frac{a}{6}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{27a}{10}$	$\frac{3\sqrt{3}a}{2}$	$\frac{8a}{3}$	∞
					$(y'=0)$			

199 Dîndu-se un *cîmp de direcții* prin ecuația diferențială

(218) $$y' = f(x, y) \text{ cu } f(x, y) \in C^1[D(x, y)],$$

se numesc *curbe integrale* curbele C_i pentru care direcția tangentei în punctul curent P de pe curbă coincide cu direcția din P a cîmpului, iar *curbe izocline* curbele C_{i_2} de-a lungul cărora direcția y' păstrează aceeași valoare constantă m. Se cere: a) Locul punctelor de extrem ale curbelor integrale. b) Locul punctelor de inflexiune ale curbelor integrale (cînd există). c) Curbele integrale, constituind o familie de curbe care depind de un parametru (constanta de integrare), admit o înfășurătoare? d) Să se arate că izoclinele pot da informații asupra curbelor integrale și, uneori, cînd pot fi construite ușor, permit să determinăm — aproximativ — graficul curbei integrale ce trece prin *punctul* dat *inițial* P_0 din D. *Apl.* a) Să se studieze cîmpul de direcții definit de ecuația diferențială: a_1) $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0$, trasîndu-se gra-

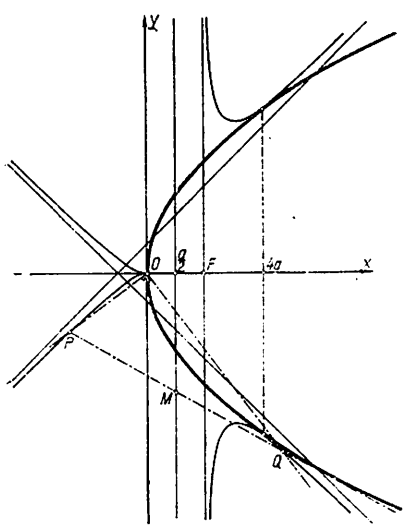


Fig. 408

ficul curbei integrale ce trece prin $P_0(0, 3)$; $a_2)$ $xy' = x^2 + 3y$, trasîndu-se graficul curbei integrale ce trece prin $P_0(-1, -2)$. b) Să se afle, cu metoda izoclinelor, graficul curbei integrale a ecuației diferențiale $y' = y - x^2$ care trece prin $P_0(0, -2)$, pentru $x \in [0, \infty)$. c) Să se studieze alura curbelor integrale într-o vecinătate a originii pentru ecuația diferențială $(ax + by)\,dx = (cx + dy)\,dy$ $(ad - bc \neq 0)$. d) Să se cerceteze cîmpul de direcții definit prin

(219) $$F(x, y, y') = 0 \text{ cu } F(x, y, y') \in C^1[\triangle(x, y, y')].$$

R. a) Din condițiile $y' = 0$, $y'' \neq 0$, rezultă că locul e izoclina $m = 0$, adică

(220) $$f(x, y) = 0 \text{ cu } f_x + f f_y \neq 0.$$

b) Din condiția $y'' = 0$, rezultă că locul e curba de ecuație

(220′) $$f_x + f f_y = 0.$$

c) În general, nu. Căci *soluția generală* C_{tg} a ecuației (218) e familia de curbe

(218′) $$y = y(x, C) \text{ cu } C - \text{const. de integrare.}$$

Determinarea lui C_i care trece prin punctul inițial $P_0(x_0, y_0) \in D$ se numește *problema Cauchy*; *existența* soluției acestei probleme e asigurată dacă $f(x, y) \in C^0(D)$, iar *unicitatea* cînd $f(x, y)$ satisface *condiția lui Lipschitz* (*teorema Cauchy— Picard*). Cînd condițiile acestei teoreme sînt îndeplinite în D, familia (218′) formează o *congruență de curbe*, numită *linii de forță* (sinonim : *linii de cîmp, de curent sau de nivel*) și nu admite o înfășurătoare Γ. *Ex.* : $c_1)$ $y' = x$, $C_{tg} : x^2 = 2(y - C)$, (fig. 409). Cînd în P_0 condiția de existență nu e satisfăcută, P_0 se numește *punct singular*. Curba integrală în punctele căreia soluția problemei Cauchy e unică se numește *curbă integrală particulară* C_{tp}; astfel, curba obținută din C_{tg} prin particularizarea constantei C (inclusiv valorile $\pm\infty$). Dacă condiția de unicitate nu e satisfăcută în toate punctele unei curbe integrale, acea curbă se numește *curbă integrală singulară* C_{ts}. Cînd $f(x, y)$ e continuă și are derivată (finită sau infinită) în raport cu y, condiția Lipschitz nu e satisfăcută în punctele unde

(218″) $$\frac{\partial y'}{\partial y} = f_x \to \infty,$$

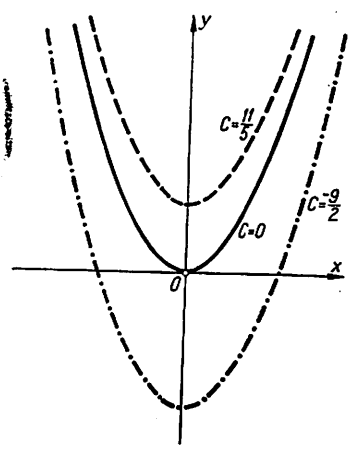


Fig. 409

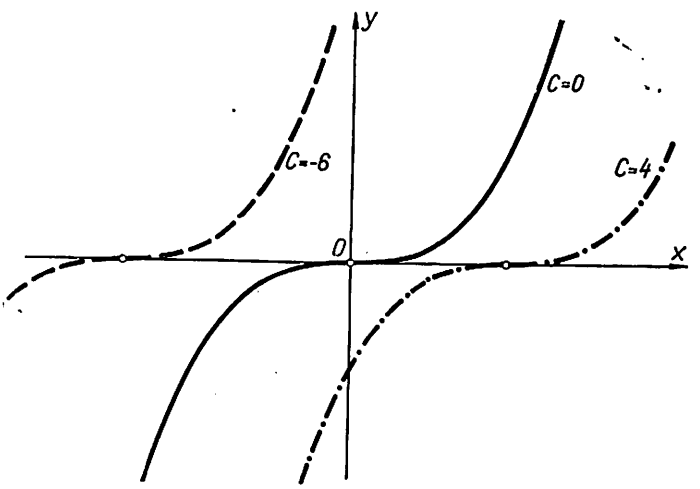


Fig. 410

locul C_c al acestor puncte numindu-se *curba caracteristică* a ecuației diferențiale (218); *acest loc poate conține o curbă integrală, care e singulară și înfășurătoare a familiei* (218′). *Ex*: $c_2)$ $y' = y^{2/3} + a$, $\frac{\partial y'}{\partial y} = 2/3y^{1/3} \to \infty$ cînd $y \to 0$, C_c: $y = 0$ nu e C_i decît dacă $a = 0$, cînd e înfășurătoarea lui C_{tg} : $27\,y = (x - C)^3$, fiind locul punctelor lor de inflexiune (fig. 410). $c_3)$ $y' = -\sqrt{1 - y^2}/y$,

$C_{tg}: y=\pm\sqrt{1-(x+C)^2}$, $0\leqslant x+C\leqslant 1$ (semicercuri; fig. 411); $\partial y'/\partial y\to\infty$ cînd $y\to 0$ şi $y\to\pm 1$, deci $y=0$ nu e C_t iar $C_{ts}: y=\pm 1$ dau înfăşurătoarea lui C_{tg}. *Obs.* Luînd $(x+C)^2+y^2-1=0$, $y=0$ e locul punctelor de contact între cercurile familiei. c_4) $2y'=3y^{1/3}$, $C_{tg}: y=\pm\sqrt{(x+C)^3}$, (fig. 412); $C_c=C_{ts}: y=0$ e înfăşurătoarea lui C_{tg}. *Obs.* Scriind $y^2=(x+C)^3$, $y=0$ e locul punctelor de întoarcere ale curbelor familiei. Deci, pentru existenţa unei C_{ts} e ne-

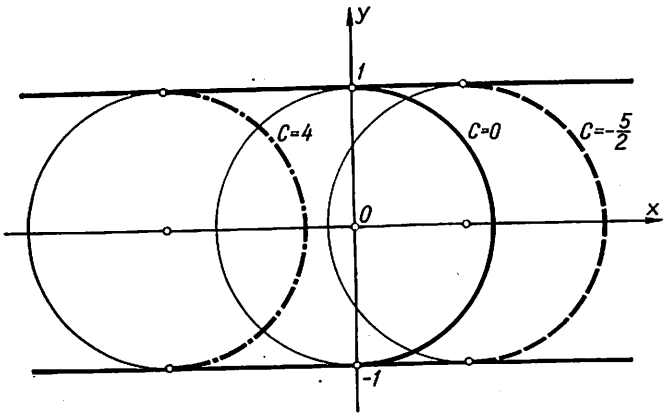


Fig. 411

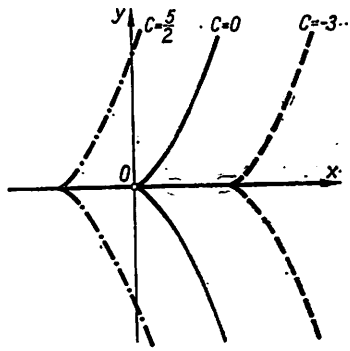


Fig. 412

cesar ca să nu fie îndeplinite condiţiile teoremei Cauchy-Picard. Astfel, să presupunem că, într-o vecinătate $V(P_0)$ a lui P_0, funcţia $f(x, y)$ nu e mărginită. Sînt 2 cazuri: *Caz* α). Dacă $f(P)\to\infty$ cînd $P\to P_0$ cu $P(x, y)\in V(P_0)$, atunci $1/f(P)\to 0$ cînd $P\to P_0$; deci ecuaţia

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}, \tag{221}$$

presupunînd condiţiile Cauchy-Picard îndeplinite în $V(P_0)$, admite o singură $C_t: x=\varphi(y)$ care trece prin P_0 şi are în P_0 tangentă verticală. *Ex.*: Cînd $f(x, y)$ e o funcţie raţională

$$f(x, y)=\Phi(x, y)/\Psi(x, y) \text{ cu } \Phi \text{ şi } \Psi \text{ polinoame în } x \text{ şi } y, \tag{222}$$

iar $\Phi(P_0)\neq 0$, $\Psi(P_0)=0$. În particular: c_5) $y'=1/y$ şi $P_0(x_0, 0)$; C_t prin $P_0: y^2=2(x-x_0)$, (fig. 413). *Obs.* P_0 e arbitrar pe Ox. După (218''), $C_0: y=0$, care nu e C_t, e locul punctelor lui $C_{tg}: y^2=2(x+C)$ în care tangenta e paralelă cu Oy. *Caz* β). Dacă $f(x, y)$ nu are o limită unică ∞ cînd $P\to P_0$, presupunînd că $f(x, y)$ sau $1/f(x, y)$ e continuă în orice $P\in V(P_0)$, atunci P_0 e un *punct singular*; în P_0, soluţia problemei Cauchy poate să nu existe sau să nu fie unică. Exemplu, pentru (222) cu $\Phi(P_0)=\Psi(P_0)=0$: cînd $P\to P_0$ pe $\Phi(x, y)=0$, atunci $f(x, y)\to 0$; cînd $P\to P_0$ pe $\Psi(x, y)=0$, atunci $f(x, y)\to\infty$; cînd $P\to P_0$ pe alte curbe, atunci $f(x, y)$ are alte valori limită (v. apl. c). În anumite cazuri, există criteriu necesar şi suficient pentru a exista C_{ts}. Astfel, pentru ecuaţia diferenţială $y'=f(y)$, dreapta $y=C$ cu $f(C)=0$ poate fi C_{ts} (înfăşurătoarea lui C_{tg}) sau C_{tp} (asimptotă a curbelor C_{tp}), după cum $\int_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}$ e convergentă sau divergentă. *Ex.* c_6) $y'=2\sqrt{|y|}$ şi $P_0(1, 0)$; $C_{tg}: y=(x+C)^2$ cu $x+C\geqslant 0$ şi $y=-(x+C)^2$ cu $x+C\leqslant 0$ (fig. 414); $C_c: y=0$ e C_{ts}; prin P_0 trece $y=0$ şi curba $C=-1$. c_7) $y'=-y^{3/2}$ şi $P_0(1, 0)$; $C_{tg}: \sqrt{y}=2/(x+C)$ sau $y=4/(x+C)^2$ cu $x+C\geqslant 0$ (curbe binome; fig. 415); după (218'') nu există C_{ts}; cum $\int_{y_0}^{0}(-dy)/y^{3/2}$ e divergentă, $C_{tp}: y=0$ $(C=\infty)$; prin P_0 trece numai dreapta $y=0$. *Obs.* Se poate da un criteriu analog pentru soluţii de forma $x=C$ ale ecuaţiei diferenţiale $y'=f(x)$, dacă $f(x)\to\infty$ cînd $x\to C$. *Ex.* c_8) $y'=1/x$; $x=0$ e C_{tp} şi se obţine din C_{tg}: $x=Ce^y$ (fig. 416). c_9) $y'=1/\sqrt{9-x^2}$; $C_{ts}: x=\pm 3$ e înfăşurătoarea lui $C_{tg}: y=\arcsin\frac{x}{3}+C$ (fig. 417). Concluzii

similare se pot trage și pentru alte tipuri de ecuații diferențiale (218); în general, dacă $\mu = \mu(x, y)$ e un *factor integrant* al ecuației diferențiale

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{223}$$

C_{ts} se găsesc numai printre soluțiile pentru care $1/\mu = 0$. *Ex.* c$_{10}$) $x^2y' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ (ecuație omogenă), $C_{tg}: C^2x^2 - 2Cy + 1 = 0$ (fig. 418), $\mu = 1/x\sqrt{y^2 - x^2}$, $C_{td}: x = 0$ ($C = \infty$) și $C_{ts}: y =$

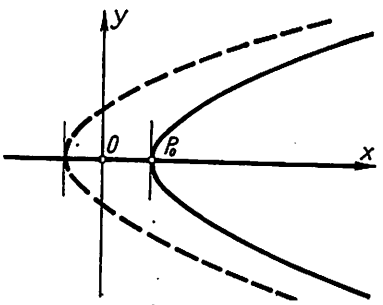


Fig. 413

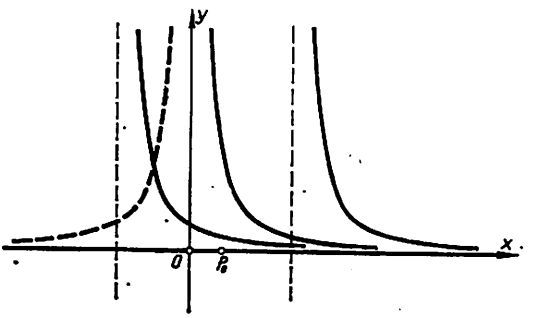


Fig. 415

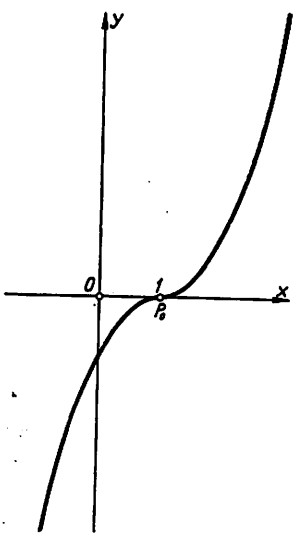


Fig. 414

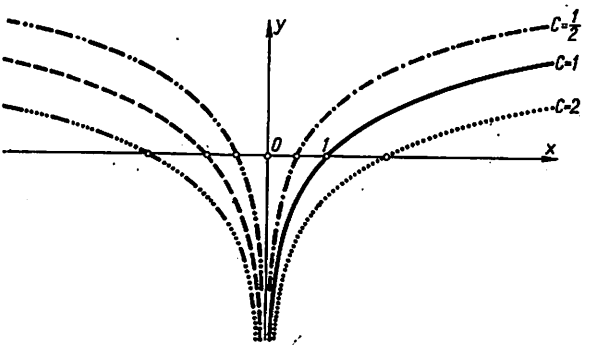


Fig. 416

$= \pm x$. *Obs.* Cînd $y' = f(y/x)$, dacă $z(x) = y(x)/x$ e rădăcină a ecuației $f(z) - z = 0$, atunci $C_t: y = x\,z(x)$ e singulară sau particulară după cum $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z}$ e convergentă sau divergentă; $x = 0$ poate fi C_{ts}. d) Cu ajutorul lor se cunosc direcțiile tangentelor la C_t în orice $P(x, y) \in D$, distribuția punctelor de extremum ale acestora, domeniile în care ele sînt strict monotone, convexe sau concave. Pentru găsirea curbei integrale aproximative Γ_0, ce trece prin P_0, se construiesc mai multe izocline C_0, C_1, C_2, ..., corespunzătoare panelor $m_0 = f(P_0)$, m_1, m_2, ... Fie $A(-1, 0)$ pe Ox și $Q_0(0, m_0)$, $Q_1(0, m_1)$, $Q_2(0, m_2)$, ... pe Oy; AQ_k are panta $m_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Cum $P_0 \in C_0$, paralela

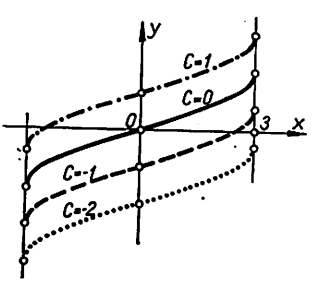


Fig. 417

prin P_0 la AQ_0 e tangenta în P_0 la Γ_0. Pe această tangentă se ia P' aproximativ la mijlocul bandei cuprinse între C_0 și C_1, prin care se duce paralela la AQ_1; pe această paralelă se ia P'', situat aproximativ la mijlocul bandei următoare C_1C_2, și prin el se duce paralela la AQ_2 etc. (fig. 419). Dacă P_0, P_1, P_2,... sînt respectiv intersecțiile dreptelor construite cu C_0, C_1, C_2,..., graficul lui Γ_0 e linia poligonală $P_0P_1P_2\ldots$ *Apl.* a$_1$) În O, cîmpul nu e definit. Fie $y'' = 2y(x-y)(x+y)(3x^2+y^2)/(x^2+y^2)^3$. Pentru curbele integrale Γ ce au ordonatele pozitive :

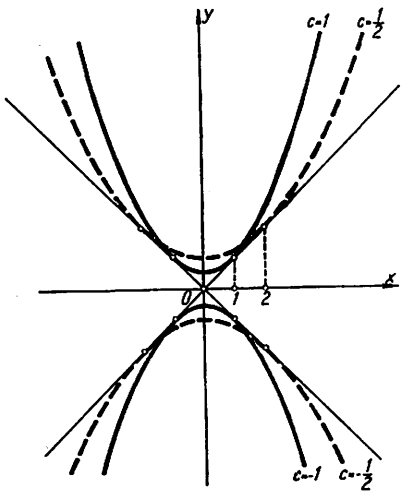


Fig. 418

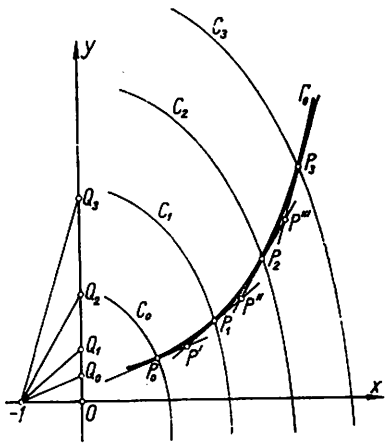


Fig. 419

$y'>0$ pentru $x\in(-\infty, 0)$, cînd y e crescător, iar $y'<0$ pentru $x\in(0,\infty)$, y fiind descrescător; $y''>0$ la stînga bisectoarei a doua sau la dreapta bisectoarei întîi, cînd Γ e convexă, iar $y''<0$ între cele 2 bisectoare, cînd Γ e concavă. Pentru $x=0$ $(y\neq 0)$: $y'=0$, $y''<0$; deci $C_{iz}: m=0$ (Oy) e locul punctelor în care Γ prezintă un maxim. $C_{iz}: m=\pm 1$ $(x+y=0)$ e locul punctelor de inflexiune ale lui Γ. $C_{ig}: y(y^2+3x^2)=C$. Ecuația diferențială fiind omogenă, $f(z)-z=-z(3+z^2)/(1+z^2)=0$ are rădăcina $z=0$; găsim $C_{ip}: y=0$ $(C=0)$, fiind asimptotă a curbelor C_{ig}. Γ trece prin P_0 pentru $C=27$ (fig. 420). La fel se studiază și cazul cînd ordonatele sînt negative. a$_2$) C_{iz} : $x^2=-3y+mx$. Σ_0(locul punctelor de extrem) $=C_{iz}: m=0$ $(x^2+3y=0)$. Γ_0 și Oy împart planul în 4 regiuni; în I și III : $y'<0$, în II și IV : $y'>0$, C_i fiind descrescătoare, respectiv crescătoare. Σ (locul punctelor de inflexiune) : $2x^2+3y=0$; C_i e convexă sau concavă, după cum e în exteriorul sau interiorul lui Σ. $C_{ig}: y=Cx^3-x^2$; $x=0$ e C_{ip} $(C=\infty)$. O e punct singular, prin el trecînd orice C_i; de altfel, înfășurătoarea lor se reduce la O. Fie Γ_0 curba integrală

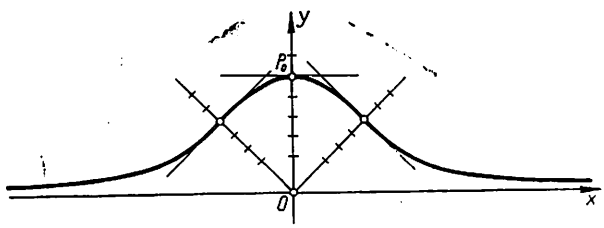


Fig. 420

ce trece prin P_0 $(C=1)$. Cum P_0 e în interiorul lui Σ și Σ_0 : Γ_0 e crescătoare pînă în O (maxim), descrește pînă taie pe Σ_0 în minimul $A_0(2/3, -4/27)$ și apoi crește nelimitat, tăind pe Ox în $B_0(1,0)$; Γ_0 e convexă pînă taie pe Σ în $I_0(1/3, -2/27)$, apoi e convexă (fig. 421). b) Se construiesc izoclinele C_0 : $y=x^2-2$ $(m_0=-2)$, C_1 : $y=x^2-4$ $(m_1=-4)$, C_2 : $y=x^2-6$ $(m_2=-6)$,... ; $Q_0=P_0$, iar tangenta în Q_0 la Γ_0e AQ_0 (fig. 442). *Obs.* $C_{ig}: y=Ce^x+x^2+2x+2$, Γ_0 e dată de $C=-4$. c) O *e punct singular.* Determinăm $\xi=\alpha x+\beta y$, $\eta=\gamma x+\delta y$ $(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$ astfel ca ecuația

diferențială dată să devină $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\eta}{\mu\xi}$: atunci $\begin{cases}\gamma(c-\lambda)+\delta a=0\\ \gamma d+\delta(b-\lambda)=0\end{cases}$ și $\begin{cases}\alpha(c-\mu)+\beta a=0\\ \alpha d\mu+\beta(b-\mu)=0\end{cases}$ iar λ și μ sînt rădăcinile ecuației $(c-\rho)(b-\rho)-ad=0$. *Dacă* $\lambda\neq\mu$, ecuația diferențială are soluția generală $\eta = C|\xi|^{\lambda/\mu}$; 0ξ $(C=0)$ și 0η $(C=\infty)$ sînt C_{ip}. Cazuri: I) λ, μ *reale și* $\lambda\mu>0$; fie $\lambda>\mu>0$.

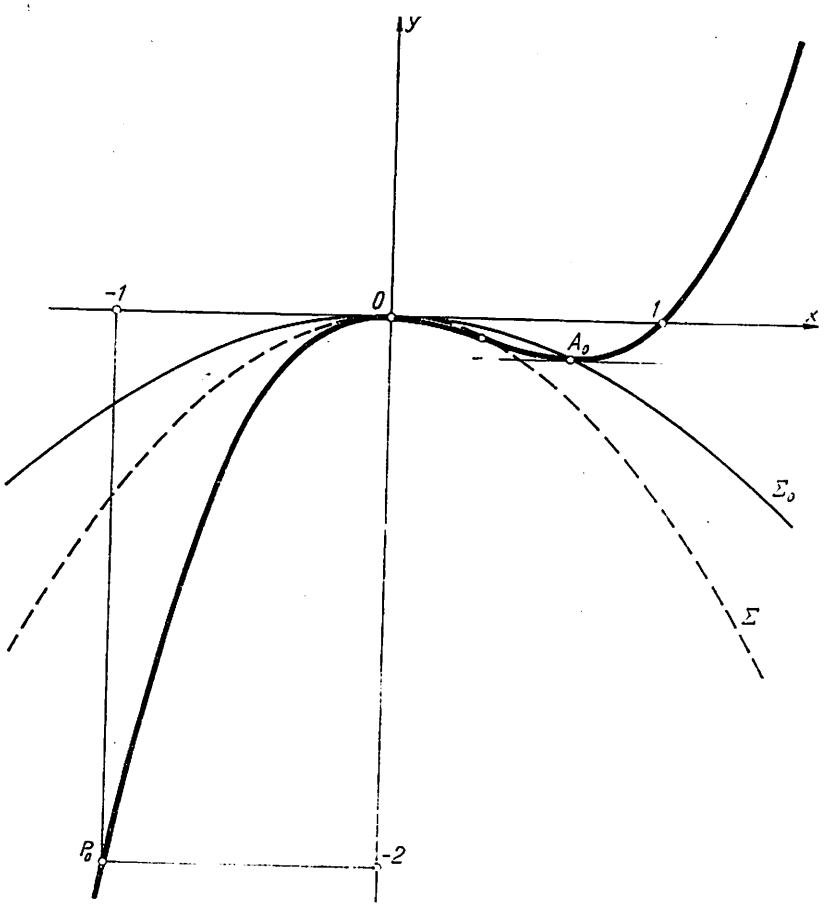


Fig. 421

Cum $\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \pm\frac{\lambda}{\mu}C|\xi|^{\lambda/\mu-1}\Big|_{\xi=0} = 0$, orice C_i e tangentă în O la $O\xi$; O se numește *nod* (ex.: $\frac{d\eta}{d\xi} = 2\eta/\xi$, cînd $\eta = C\xi^2$; fig. 423). II) λ, μ *reale și* $\lambda\mu<0$; fie $\lambda/\mu=-k$. Prin O nu trece nici o C_i, afară de $O\xi$ și $O\eta$. O se numește *șa* (ex.: $\frac{d\eta}{d\xi} = -\eta/\xi$, cînd $\xi\eta = C$; fig. 424). III) λ *și* μ *sînt complex conjugate*: $\lambda = p+iq$, $\mu = p-iq$; putem lua $\xi = \alpha x+\beta y = u+iv$, $\eta = \overline{\alpha x}+\overline{\beta y} = u-iv$, punînd ecuația diferențială sub forma $q(u\,du+v\,dv) = p(v\,du-u\,dv)$ cu $C_{ig}: \sqrt{u^2+v^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}}$ sau $\rho = Ce^{-p\theta/q}$ (o familie de spirale logaritmice în planul Ouv, cu punct asimptotic în O). O se numește *focar* (fig. 425). IV) λ *și* μ *sînt pur imaginare*: $\lambda = iq$, $\mu = -iq$; ca la III): $u\,du+v\,dv=0$, cu C_{ig}: $u^2+v^2=C$. O se numește *centru* (fig. 426). *Dacă*

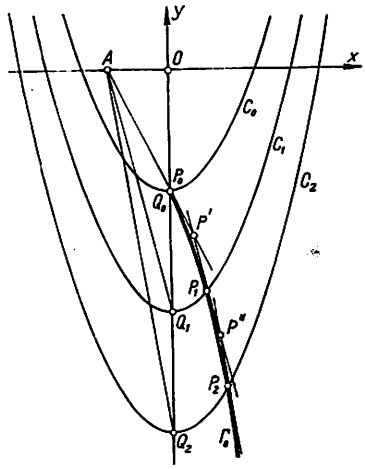


Fig. 422

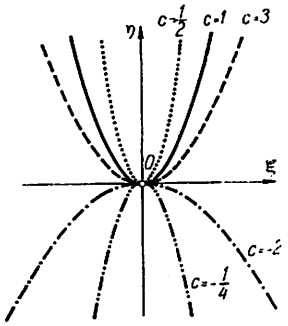


Fig. 423

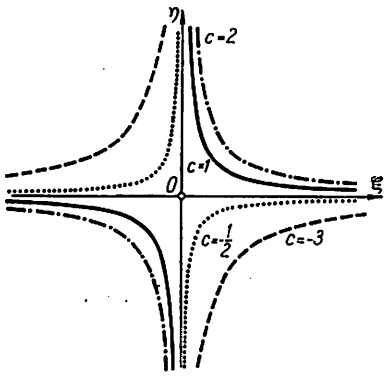


Fig. 424

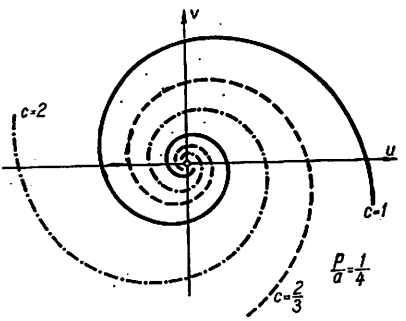


Fig. 425

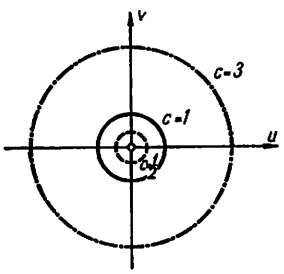


Fig. 426

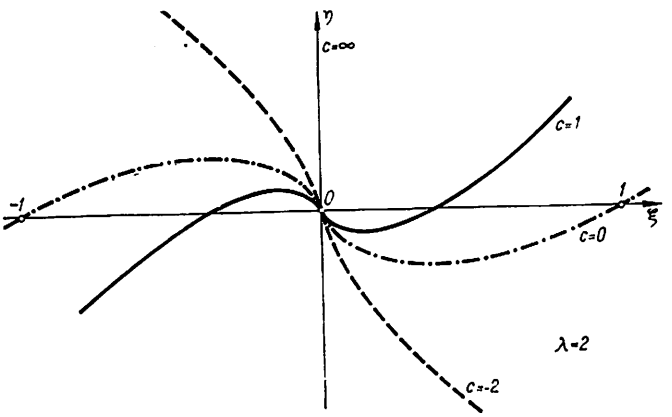


Fig. 427

$\lambda = \mu$; atunci $\lambda = (b + c)/2$, cînd $(b - c)\alpha - 2a\beta = 0$, $2d\alpha + (b - c)\beta = 0$ cu $(b - c)^2 + 4ad = 0$. *Cazuri*: V) $a^2 + d^2 \neq 0$; atunci $\alpha = a$, $\beta = (b - c)/2$. Prin $\xi = ax + (b - c)y/2$, $\eta = y : d\eta/d\xi = \eta/\xi + 1/\lambda$ cu $C_{tg} : \eta = \left(\frac{1}{\lambda} \ln |\xi| + C\right)\xi$; $C_{tp} : O\eta$ $(C = \infty)$. Cum $\lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = \lim_{\Delta\xi \to 0} \left\{\frac{1}{\lambda} \ln |\Delta\xi| + C\right\} = \pm\infty$, orice C_t e tangentă în O la $O\eta$. O e un *nod special* (fig. 427).

VI) $a^2 + d^2 = 0$, adică $a = d = 0$, $b = c = \lambda : \frac{dy}{dx} = y/x$ cu $C_{tg} : y = Cx$. O e un *nod critic* (fig. 428). *Obs.* Astfel de puncte singulare apar şi în cazul general (223); luîndu-l în O $(ad - bc \neq 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0\Big)$:

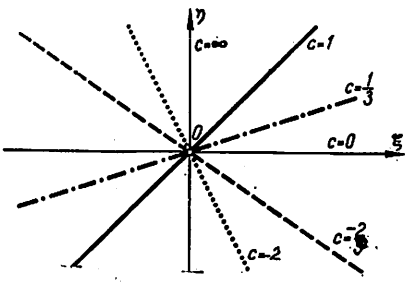


Fig. 428

$$P(x, y) = ax + by + \varphi(x, y), \quad Q(x, y) = cx + dy + \psi(x, y). \tag{223'}$$

Prin substituţia liniară precedentă, aducem termenii liniari din (223') la forme canonice. Direcţiile tangentelor în O la C_1 (ce trec prin O) : $m(c + dm) = a + bm$. *Ex.* : α) $x(y^2 - 1)\,dx + y(x^2 - 1)\,dy = 0$; $\rho^2 + 1 = 0$: O e centru (fig. 429). $C_{tg} : (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$; locul punctelor de extrem : $x = 0$. β) $(6x - 6y - 4x^2 + 5xy)\,y' = 6x - 9y - 4xy + 5y^2$ (ecuaţie Jacobi). $P = 0$, $Q = 0$ cu $x_0 = y_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ şi $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. O e şa, cu $m_0' = 2$ şi $m_0'' = 1/2$. Fie $x = X + 1$,

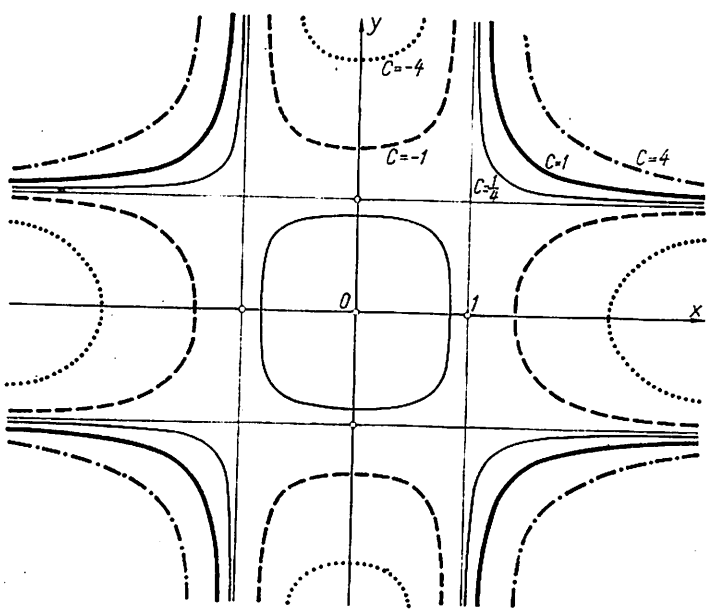


Fig. 429

$y = Y + 2$; în $P_1XY : P_1$ e un nod, cu $m_1' = 2$ şi $m_1'' = -1$. Procedînd la fel : P_2 e un nod (fig. 430). d) În fiecare punct $P \in D$, ecuaţia diferenţială (219) defineşte una sau mai multe direcţii; ele sînt rădăcinile reale distincte y' ale acestei ecuaţii. Soluţia problemei Cauchy cu datele iniţiale x_0, y_0 e unică, dacă prin $P_0(x_0, y_0)$ trec atîtea C_t cîte direcţii reale distincte defineşte ecuaţia (219) în P_0. Cum $\partial y'/\partial y = -F_x/F_{y'}$, condiţia Lipschitz nu e satisfăcută în punctele pentru care

$$F_{y'} = 0. \tag{224}$$

Eliminînd pe y' din (219) și (224), *curba caracteristică* C_c are ecuația

(224′) $$G(x, y) = 0 \text{ sau } y = \varphi(x) \text{ cu } G(x, \varphi(x)) = 0.$$

În general, curba (224′) nu e C_{is}, adică soluție a ecuației (219); căci:

(224″) $$F = 0,\ F_{y'} = 0,\ F_x + y'F_y = 0$$

nu e totdeauna un sistem compatibil. Deci: C_c poate cuprinde C_{is}, Σ_1 — locul punctelor multiple ale lui C_{ig}, sau Σ_2 — locul punctelor de contact ale acestora. *Exemple*: d$_1$) $y'^2[(x-y)^2-1]-2y'+[(x-y)^2-1]=0$, C_{ig}: $(x-C)^2+(y-C)^2=1$, C_c e formată din C_{is}: $(x-y)^2-2=0$ și Σ_2: $x-y=0$ (fig. 431). d$_2$) $(x-y)^2(1+y'^2)^3-a^2(1+y'^3)^2=0$ (două ecuații Lagrange), C_{ig}: $(x-C)^{2/3}+(y-C)^{2/3}=a^{2/3}$; C_c e formată din Σ_1: $y'=0$ ($x-y=\pm a$), Σ_2: $y'=-1$ ($x-y=0$) și C_{is}: $y'=1$ ($x-y=\pm a/2$) (fig. 432). Soluția generală a ecuației diferențiale (219) e

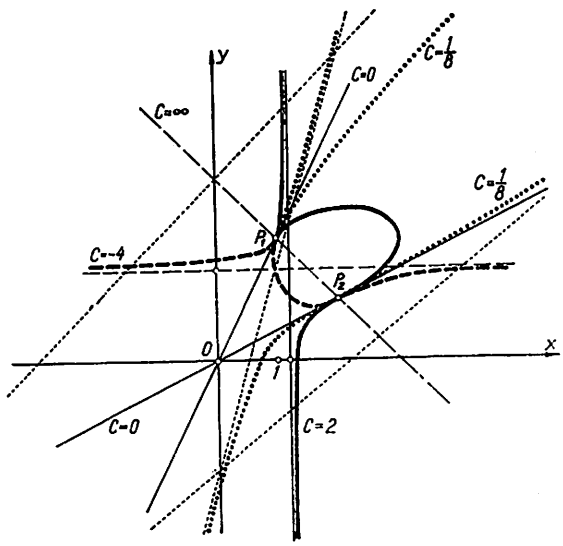


Fig. 430

(225) $$\Phi(x, y, C) = 0;$$

atunci: *Înfășurătoarea* Γ *a familiei* (225), *dacă există, e conținută în* C_c (224′) *a ecuației diferențiale* (219) *și e* C_{is}. Căci, să presupunem că prin P_0 trece curba $y = y(x)$ a familiei (225) și Γ: $Y = Y(x)$; deci: $F(x, y, y') = 0$, $F(x, Y, Y') = 0$ și $F_x + y'F_y + y''F_{y'} = 0$, $F_x + Y'F_Y + Y''F_{Y'} = 0$, iar în P_0: $y'_0 = Y_0$, $y'_0 = Y'_0$, $y''_0 \neq Y''_0$ încît $(F_{y'})_{x_0, y_0, y'_0}[y''_0 - Y''_0] = 0$, adică (224). Dacă $y''_0 = Y''_0, \ldots, y^{(n-1)}_0 = Y^{(n-1)}_0$, $y^{(n)}_0 \neq Y^{(n)}_0$, derivînd identitățile respective de $n-1$ ori și scăzînd una din alta se obține tot (224). *Ex.*: d$_3$) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ (două ecuații omogene), C_{ig}: $x^2 = 2C(y - 2C)$, Γ: $y^2 = 4x^2$ (fig. 433). *Curba discriminantă* C_d a familiei (225) poate conține și pe Σ_1. *Ex.*: d$_4$) $8y'^3/25 - 4y'^2/9 + x - y = 0$; C_{ig}: $(x - C)^3 = (y - C)^2$; C_d e formată din Σ_1: $x - y = 0$ și Γ: $x - y = 4/27$ (v. fig. 399). În P din D, $F_{y'} \neq 0$ reprezintă condiția ca să se poată

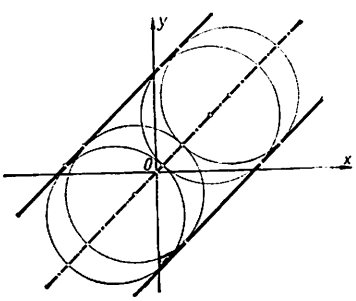


Fig. 431

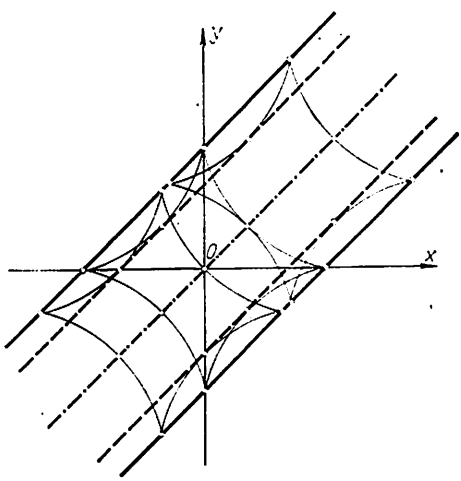


Fig. 432

exprimă cîmpul de direcții (219) sub forma normală (218). De aceea, pentru C_i de-a lungul cărora aceste condiții nu sînt îndeplinite, nu putem face uz, fără alte explicații, de C_{ig}(225); căci C_{ig} poate cuprinde C_{is} sau C_i definite de C_c (224′) în lungul cărora e satisfăcută condiția de unicitate a problemei Cauchy. *Ex.* : d_5) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$, $C_{ig} : y = C(x - C)^2$; $\Gamma : y = 0$ ($C = 0$) și $4x^3 - 27y = 0$ (fig. 434) aparține lui C_c (224′). d_6) $ay'^2 = 4(y - b)^3$ cu a, b-const,; $C_{ig} : y =$

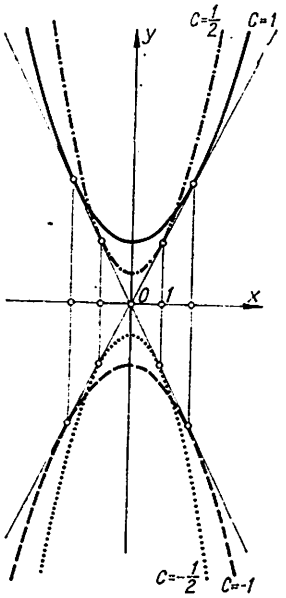


Fig. 433

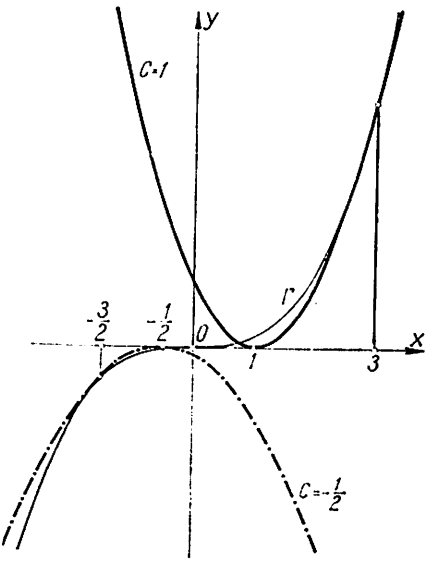


Fig. 434

$= a/(x+C)^2+b$ (fig. 435); C_i : $y=b$ satisface (224″) și nu e C_{is}, fiind asimptotă a curbelor integrale ($C = \infty$). Soluția generală (225) reprezintă una sau mai multe familii distincte de C_i și familii de arce ale aceleași curbe. *Ex.* : d_7) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$; în P cu $F_y \neq 0$, se descompune în $y' = -y/x$ și $y' = -2y/x$ cu $C_{ig} : xy = C_1$ și $x^2y = C_2$ (fig. 436). Pentru ambele ecuații diferențiale,

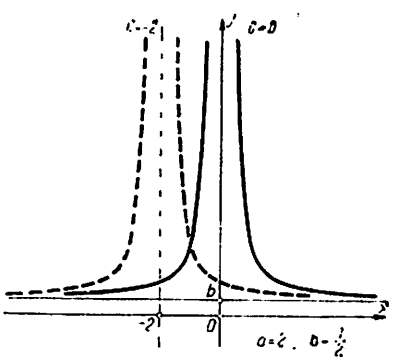


Fig. 435

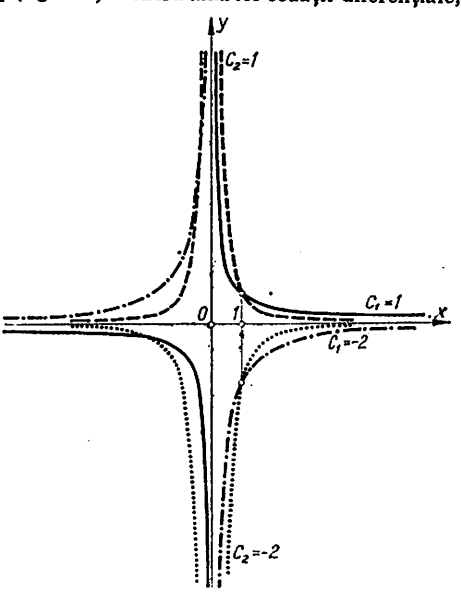


Fig. 436

C_{t_P}: $x = 0$ şi $y = 0$ ($C_1 = 0$ şi $C_2 = 0$); ele aparţin lui C_e, fiind asimptote ale curbelor integrale. O e o şa. d) $y'^2 + y^2 - 1 = 0$; în P cu $F_{y'} = 2y' \neq 0$, avem $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$ cu C_{t_Q}: $y = \sin(\pm x + C)$, $-\pi/2 < \pm x + C < \pi/2$ (familii de arce de sinusoidă luate de la punctul de minim pînă la cel de maxim, respectiv de la punctul de maxim pînă la cel de minim; fig. 437). $C_{t_0} = \Gamma$: $y = \pm 1$. Cum $\sin(-x + C) = \sin(x + \pi + C)$, putem lua familia de sinusoide complete $y = \sin(x + C)$, $x \in R$, în punctul de pe Γ curba dintr-o familie de arce trecînd în una din cealaltă familie.

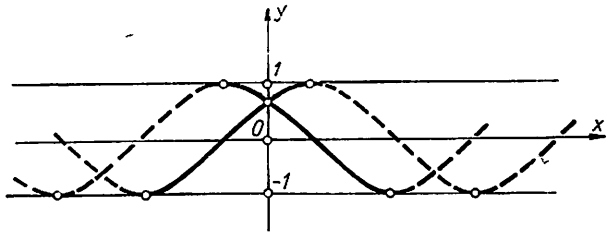


Fig. 437

200 Să se afle înfăşurătoarea familiei de cercuri ale căror centre $\Omega(x, y)$ descriu *curba deferentă* C: $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi de raze $R = R(t)$. *Apl.* la cazul cînd: a) $R = \text{const.}$; b) $R = k$. $O\Omega$.

R. $F_t = 0$ e dreapta $(X - x)x' + (Y - y)y' = RR'$, perpendiculară pe tangenta t_Ω în Ω la C. Fie C: $\rho = \rho(t)$ iar $\varphi = \widehat{t_\Omega, O\Omega}$ şi $\psi = \widehat{t_\Omega, \Omega P}$, cu P punct caracteristic al cercului. Cum $\operatorname{tg}\varphi = \rho'/\rho$: $\sin\varphi = \rho'/\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$. Distanţa de la Ω la dreapta punctelor caracteristice e $p = R\sin\psi = RR'/\sqrt{x'^2 + y'^2}$, deci $\sin\psi = R'/\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$. Rezultă $\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \dfrac{R'}{\rho'}$. *Obs.* Fie o undă luminoasă plană, emisă de o sursă aşezată în O; presupunem că deferenta C separă 2 medii izotrope. O rază de lumină $O\Omega$ e refractată după legea $\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi} = k$ (indice de refracţie). Deci, dacă $R'/\rho' = k$, adică $R = k\rho + K$ ($K = 0$, căci nu schimbă raza ΩP). Ramura de înfăşurătoare a cercurilor de centru Ω şi raze $R = k\rho$, conţinută în mediul al doilea, în Optică poartă numele de *caustică secundară* (sinonim: *anticaustică*); razele refractate sînt normalele acestei curbe. *Apl.* a) $F_t = 0$ e normala în Ω la C; punctele caracteristice P şi P_1 descriu curbe paralele cu C, adică Γ: $X = x \pm Ry'/\sqrt{x'^2 + y'^2}$, $Y = y \mp Rx'/\sqrt{x'^2 + y'^2}$; căci $\Omega P = \Omega P_1 = R$. Cînd C: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ (cerc), atunci Γ: $X = (a \pm R)\cos t$, $Y = (a \pm R)\sin t$ (cercuri concentrice). b) Caustica secundară a cercului e ovalul lui Descartes: $h\rho_1 + k\rho_2 = a$, ρ_1 şi ρ_2 fiind razele vectoare ale sursei O şi inversul lui O faţă de cercul dat.

201 Fie o familie de curbe C_α depinzînd de un parametru α. Dacă se consideră, după o lege determinată, un punct P pe fiecare curbă C_α din familie, punctul P descrie o curbă Γ_t numită *traiectorie* (sinonim: *curbă transversală*) a familiei C_α; cînd Γ_t taie curbele C_α sub un acelaşi unghi constant θ, obţinem o *traiectorie izogonală* Γ_{t_i}, care e o *traiectorie ortogonală* Γ_{t_0} pentru $\theta = \pi/2$. Să se afle: a) Traiectoriile izogonale Γ_{t_i} ale unui cîmp de direcţii. b) Înfăşurătoarea Γ (dacă există) şi traiectoriile orotogonale Γ_{t_0} ale familiei de curbe:

$$C_\alpha: \quad x = x(t, \alpha), y = y(t, \alpha). \tag{226}$$

Apl. a) Fie cercurile $C_\alpha(\Omega_\alpha(\alpha, 0)$; a). Se cere: a_1) traiectoria lui $P \in C_\alpha$, determinat prin condiţia $OP \perp P\Omega_\alpha$; a_2) traiectoriile orotogonale ale lui C_α; a_3) înfăşurătoarea cercurilor C_α. b) Să se afle înfăşurătoarea elipselor avînd aceleaşi axe, iar suma semiaxelor constantă.

R. a) În (218), respectiv (219), se înlocuiește y' cu $(y' \mp m)/(1 \pm my')$, unde $m = \operatorname{tg}\theta$; se obține o ecuație diferențială de tipul (219) și $C_{t_0} = \Gamma_{it}$. Cînd $\theta = \pi/2$, se înlocuiește y cu $-1/y'$. *Ex.*: a_1) $y' = 2y/x - \sqrt{3}$ (parabolele $x^2 = 2\alpha(y - x\sqrt{3})$) și $m = \sqrt{3}$; $\Gamma_{it}: (x - \sqrt{3}y)y' + y - \sqrt{3}x = 0$ sau $3(x^2 + y^2) - 2xy = C$. a_2) $(x^2 + y^2 - 1)xy' = (x^2 + y^2 - 1)y$ (hiperbolele $x^2 - 2\alpha xy - y^2 - 1 = 0$); $\Gamma_{t_0}: (x\,dx + y\,dy)(x^2 + y^2) = x\,dx - y\,dy$ sau $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = C$, prin O trecînd lemniscata Bernoulli ($C = 0$). Fie (225); eliminarea lui C conduce la ecuația diferențială (219). *Ex.*: a_3) $y = Cx$; deci $y' = y/x$, $\Gamma_{it}: y'(x - my) = mx + y$ sau $\rho = Ke^{\theta/m}$, Γ_{t_0}: $yy' + x = 0$ sau $x^2 + y^2 = K$. În coordonate polare, familia de curbe $\Phi(\rho, \theta, \alpha) = 0$; ecuația diferențială: $F(\rho, \theta, \rho') = 0$. Γ_{t_0} se obține înlocuind pe ρ' cu $-\rho^2/\rho'^2$ în $F = 0$. *Ex.* $\rho^n = C^n \cos n\theta$; Γ_{t_0}: $\rho^n = K^n \sin n\theta$. b) P e dat pe C_α de legea

(226′) $$t = t(\alpha);$$

deci P descrie traiectoria

(226″) $$\Gamma_t: x = x(t(\alpha), \alpha),\ y = y(t(\alpha), \alpha).$$

Scriind $C: \bar{r} = \bar{r}(t, \alpha)$, tangentele în P la C_α: $\bar{t}_\alpha = \bar{r}_t$ și la Γ_t: $\bar{t}_\Gamma = \bar{r}_t \frac{dt}{d\alpha} + \bar{r}_\alpha$. Din condiția $\bar{t}_\alpha \parallel \bar{t}_\Gamma$ ($\Gamma_t \equiv \Gamma$), deducem că (226′) verifică ecuația

(227) $$\bar{r}_t \times \bar{r}_\Gamma = 0, \text{ adică } \frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)} = 0.$$

Din condiția $\bar{t}_\alpha \cdot \bar{t}_\Gamma = 0$ ($\Gamma_t \equiv \Gamma_{t_0}$), determinăm că (226′) e soluție a ecuației

(228) $$\bar{r}_t^2 \frac{dt}{d\alpha} + \bar{r}_t \cdot \bar{r}_\alpha = 0.$$

Apl. a_1) $\cos t = -a/\alpha$; Γ_t e curba kappa (172). a_2) $a^2 \frac{dt}{d\alpha} - a \sin t = 0$, deci $\alpha = a \operatorname{lntg} \frac{t}{2} + C$; Γ_{t_0}: $x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + C)$, $y = a \sin t$. *Obs.* Cu C_α: $(x - \alpha)^2 + y^2 = a^2$, ecuația diferențială: $y^2(1 + y'^2) = a^2$, Γ_{t_0}: $y^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2$ sînt *tractrice* deduse din una din ele prin translații paralele cu baza $d = Ox$. a_3) Condiția, (227) dă $\cos t = 0$, adică $t = \pi/2 + k\pi$, încît $\Gamma: y = \pm a$. b) C_α: $x = \alpha \cos t$, $y = (a - \alpha) \sin t$; din (227): $\alpha = a \cos^2 t$. Γ e astroida (50). *Obs.* Cu t parametrul familiei și α parametru pe curbă: $x/a \cos t + y/a \sin t - 1 = 0$ (drepte pentru care suma pătratelor tăieturilor e const.)

202 Se cere înfășurătoarea unui diametru al unui cerc C care se rostogolește fără frecare pe: a) o dreaptă fixă; b) un cerc fix C_0.

203 Dacă familia de curbe depinde de doi parametri α și β:

(229) $$F(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

legați printr-o relație

(229′) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

obținem înfășurătoarea Γ eliminînd pe α, β din (229) — (229′) și

(229″) $$\frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0.$$

Apl. a) Să se afle înfășurătoarea familiei de curbe:
a_1) $x/\alpha + y/\beta - 1 = 0$ cînd $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$ (a — const.);
a_2) $(x/\alpha)^n + (y/\beta)^n - 1$ cînd $(\alpha/a)^m + (\beta/b)^m - 1 = 0$ (a, b — const.).
b) Înfășurătoarea elipselor de arie constantă și avînd aceleași axe.

R. Cînd (229′) se rezolvă în raport cu $\beta : \beta = \beta(\alpha)$, din (229) şi (229′) obţinem $F_\alpha + F_\beta \beta_\alpha = 0$, $\varphi_\alpha + \varphi_\beta \beta_\alpha = 0$; eliminînd pe β_α, rezultă (229″). *Apl.* a_1) $x^{m/(m+1)} + y^{m/(m+1)} = a^{m/(m+1)}$. a_2) $(x/a)^{mn/(m+n)} + (y/b)^{mn/(m+n)} - 1 = 0$. *Obs.* Pentru $n = 1$, $m = 2$ sau $n = 2$, $m = 1$: astroida alungită; cînd $a = b$: astroida. b) $F(x, y, \alpha, \beta) = (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 - 1 = 0$, $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\beta - k = 0$; deci $\Gamma : 2xy = \pm k$ (hiperbole echilatere).

204 Să se găsească, axele de coordonate fiind ortogonale, înfăşurătoarea dreptelor astfel ca: a) lungimea segmentului determinat pe ele de axele de coordonate; b) suma tăieturilor; c) suma pătratelor inverselor tăieturilor să fie constantă.

R. Fie $y = \alpha x + \beta$; deci $A(-\beta/\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$. a) $AB = a$, adică $\varphi(\alpha, \beta) = \beta^2(1 + 1/\alpha^2) - a^2 = 0$; Γ e astroida (50). b) $OA + OB = a$ se scrie $\beta(1 - 1/\alpha) = a$; $\Gamma : x = a/(\alpha - 1)^2$, $y = a\alpha^2/(\alpha - 1)^2$ sau $(x - y + a)^2 = 4ax$. c) $1/OA^2 + 1/OB^2 = 1/a^2$ devine $a^2(1 + \alpha^2) = \beta^2$; $\Gamma : x = -a\alpha/\sqrt{\alpha^2 + 1}$, $y = a/\sqrt{\alpha^2 + 1}$ sau $x^2 + y^2 = a^2$. *Obs.* Cu $F = x/\alpha + y/\beta - 1 = 0$, pentru b) şi c): $\varphi = \alpha + \beta - a = 0$, respectiv $\varphi = 1/\alpha^2 + 1/\beta^2 - 1/a^2 = 0$.

205 Dintr-un punct M al cercului $\gamma(O; a)$ se duce o coardă variabilă care taie un diametru dat AA' în N; perpendiculara în N pe MN şi mediatoarea lui ON se taie în P. Să se găsească: a) Locul C al lui P. b) Cînd M descrie pe γ, înfăşurătoarea Γ a lui C şi locul Γ_1 al punctelor unde această curbă taie pe OM.

206 Numind *transformata unei curbe* Γ *prin polare reciproce în raport cu o conică* C (sinonim: *polara reciprocă a lui* Γ *în raport cu* C) înfăşurătoarea Γ' a polarelor lui $P \in \Gamma$ în raport cu C, se cere: a) Să se arate că astroida proiectivă (139) e transformata curbei Schoute (140) prin polare reciproce în raport cu conica dată. b) Să se afle înfăşurătoarea polarelor în raport cu hiperbola $xy - a^2 = 0$ ale căror poluri se găsesc pe: b_1) hiperbola $xy - b^2 = 0$; b_2) cercul $x^2 + y^2 = a^2$.

R. a) C are ecuaţia (61). Fie $P(\alpha, \beta) \in (140)$. Cu (229″): $(a/\alpha)^3 = x/a$, $(b/\beta)^3 = y/b$. b) Polara lui $P(\alpha, \beta)$: $\beta x + \alpha y - 2a^2 = 0$. b_1) $b^2xy = a^4$; b_2) $b^2(x^2 + y^2) = 4a^4$. *Obs.* Dacă $b = 2a$, Γ' e chiar locul punctelor P.

207 Se numeşte *curbă analagmatică* o curbă C care se transformă în ea însăşi printr-o inversiune convenabil aleasă; centrului Ω al inversiunii i se zice *origine principală*. Să se arate: a) Orice curbă analagmatică e înfăşurătoarea unei familii de cercuri ale căror centre descriu o *curbă deferentă* Γ şi care sînt ortogonale unui *cerc principal* (sinonim: *cerc director*) γ_0 fix. b) Orice dreaptă d care trece prin centrul Ω al lui γ_0 taie pe C în 2 puncte ce formează un sistem armonic cu intersecţiile lui d cu γ_0. c) Ce e transformata unei curbe analagmatice printr-o inversiune arbitrară. *Apl.*: Γ e o conică.

R. a) Lui $P \in C$, pe ΩP, îi corespunde $P' \in C$ cu $\Omega P \cdot \Omega P' = k$ (puterea inversiunii). Q şi Q' fiind corespondente, atunci P, P', Q, Q' sînt conciclice pe $\widetilde{\gamma}$; căci $\Omega P \cdot \Omega P' = \Omega Q \cdot \Omega Q'$. Înfăşurătoarea mediatoarelor coardelor PP' e Γ; căci, dacă $\Omega QQ' \to \Omega PP'$, atunci $\widetilde{\gamma} \to \gamma$ care atinge curba în P şi P' şi avînd ca centru pe M unde mediatoarea lui PP' întîlneşte înfăşurătoarea sa. În plus, γ taie ortogonal pe $\gamma_0(\Omega; \sqrt{k})$; căci puterea lui Ω faţă de γ e k. Fie $\gamma_0(\Omega(a, b); R = \sqrt{k})$, iar Γ de ecuaţie tangenţială $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$. γ şi γ', cu centrele M şi M' pe Γ, se taie în R şi R'; dreapta RR' trece prin Ω şi e perpendiculară pe MM'. Cînd $\gamma' \to \gamma$, MM' tinde către tangenta în M la Γ, P şi P' fiind puncte caracteristice ale lui γ (fig. 438). Cum γ şi γ_0 sînt ortogonale, atunci $\Omega P \cdot \Omega P' = R^2$. Deci polara p a lui P în raport cu γ_0 trece prin P' şi e perpendiculară pe $\Omega PP'$. Rezultă că tangenta t în M la Γ e omotetica, de centru P şi modul 1/2, a lui p. Fie $P(x, y)$; deci $p : X(x - a) + Y(y - b) = ax + by - c$ cu $c = a^2 + b^2 - R^2$, încît $t : X(x - a) + Y(y - b) = (x^2 + y^2 - c)/2$. Deci

$$C : F(x - a, y - b, -(x^2 + y^2 - c)/2) = 0. \tag{230}$$

Obs. a_1) Cu γ de forma (90), atunci $\alpha a + \beta b + (c + \gamma)/2 = 0$; deci C e înfășurătoarea lui γ: $x^2 + y^2 + 2\alpha(x - a) + \beta(y - b) - c = 0$ cu $F(-\alpha, -\beta, 1) = 0$ a_2) Fie

(231) $$\Gamma : P_0\xi_3^n + P_1(\xi_1, \xi_2)\xi_3^{n-1} + \ldots + P_n(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

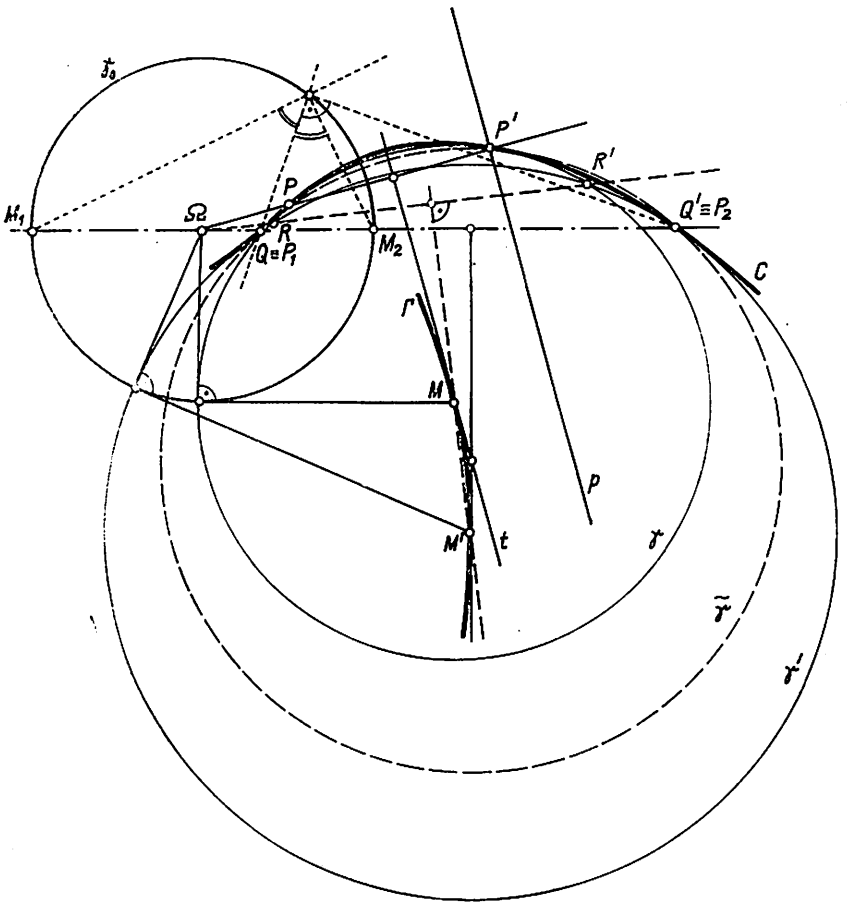


Fig. 438

cu P_i polinom omogen în ξ_1, ξ_2 de gradul $i = 0, 1, \ldots, n$; atunci

(233) $$C : P_0\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - c)\right)^n + P_1(x - a, y - b)\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - c)\right)^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + P_n(x - a, y - b) = 0.$$

Deci: Gradul lui C e, în general, dublul clasei lui Γ; el e micșorat cu (cel puțin) o unitate dacă Γ e o curbă parabolică (cînd $P_0 = 0$). a_3) Dacă Γ e de grad n, printr-un punct din plan trec n cercuri din familia care înfășoară analagmatica. Fie γ_0 ($\Omega = 0$; $R = \sqrt{k}$), $\Gamma : \rho = f(\theta)$ iar γ: $\rho^2 + 2\rho(\alpha_1 \cos\omega + \beta_1 \sin\omega) + \gamma_1 = 0$; cum $\alpha_1 = -f(\theta)\cos\theta$, $\beta_1 = -f(\theta)\sin\theta$, $\gamma_1 = R^2$, rezultă $\gamma : \rho^2 - 2\rho f(\theta)\cos(\omega - \theta) + R^2 = 0$. Din $f'(\theta)\cos(\omega - \theta) + f(\theta)\sin(\omega - \theta) = 0$ scoatem $\theta = \theta(\omega)$; deci

(230′) $$C : \rho^2 - 2\rho F(\omega) + R^2 = 0.$$

Obs. a_1) Γ e înfășurătoarea lui $x\cos\omega + y\sin\omega - F(\omega) = 0$. b) O dreaptă prin Ω taie pe C în P_1 și P_2 astfel încît $\Omega P_1 \cdot \Omega P_2 = R^2$; d taie pe γ_0 în M_1 și M_2. Atunci $(M_1M_2\ P_1P_2) =$

$= \Omega\,(R - R\ \rho_1\ \rho_2) = -1$. c) Se obține o nouă curbă analagmatică, cercurile lor principale fiind corespondente în inversiune. *Obs.* Deferentele sînt curbe de același grad și sînt proiectiv echivalente față de o omologie cu centrul în polul inversiunii, axa de omologie fiind axa radicală a cercurilor principale. *Apl.* Fie $\Gamma: A_{ij}\xi_i\xi_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$; după (233), C:

$$A_{33}(x^2 + y^2)^2 - 4(A_{13}x + A_{23}y)(x^2 + y^2) + f(x, y) = 0, \tag{234}$$

unde $f(x, y) = 2(2A_{11} - cA_{33})x^2 + 2A_{12}xy + 2(2A_{22} - cA_{33})y^2 - 4(2aA_{11} + 2bA_{12} - cA_{13})x - 4(2aA_{12} + 2bA_{22} - cA_{23})y + 4a^2A_{11} + 8abA_{12} + 4b^2A_{22} - 4acA_{13} - 4bcA_{23} + c^2A_{33}$. Deci: C e o ciclică de grad 4 sau 3, după cum e o conică cu centru ($A_{33} \neq 0$) sau o parabolă ($A_{33} = 0$). Reciproca e adevărată; și aceasta în patru moduri diferite.

11. EVOLUTA ȘI EVOLVENTA UNEI CURBE PLANE

208 Să se găsească *evoluta* (sinonim: *desfășurata*) curbei C: a) $xy = a^2$ (hiperbolă); b) $y = a \sin\frac{x}{a}$ (sinusoidă); c) $y = a \ln \cos\frac{x}{a}$ (lănțișor de egală rezistență); d) $3ay^2 = x^3$ (parabolă semicubică); e) $y^2(2a - x) = x^3$ (cisoidă); f) $x = -a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right)$, $y = a \sin t$ (tractrice).

209 Să se afle evoluta unei conice.

R. Pentru curba $C: y = y(x)$, evoluta are ecuațiile

$$\Gamma: X = x - y'(1 + y'^2)/y'', \quad Y = y + (1 + y'^2)/y''. \tag{235}$$

Fie *conica cu centru* (61); deci $y' = -\varepsilon b^2x/a^2y$, $y'' = -b^4/a^2y^3$. Γ e *sextica*

$$X = c^2x^3/a^4,\ Y = -c^2y^3/b^4,\ (x, y) \in (61);\ (aX)^{2/3} + \varepsilon(bY)^{2/3} = c^{4/3} \tag{236}$$

cu $c^2 = a^2 - \varepsilon b^2$; cînd $\varepsilon = 1$, Γ e o *astroidă alungită* (fig. 439), iar pentru $\varepsilon = -1$, Γ e o *astroidă hiperbolică* (fig. 440). *Obs.* Folosind proprietățile evolutei, găsim că evoluta elipsei are lungimea

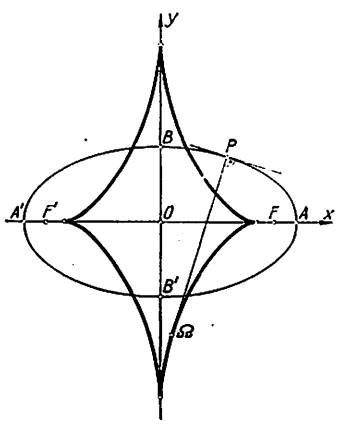


Fig. 439

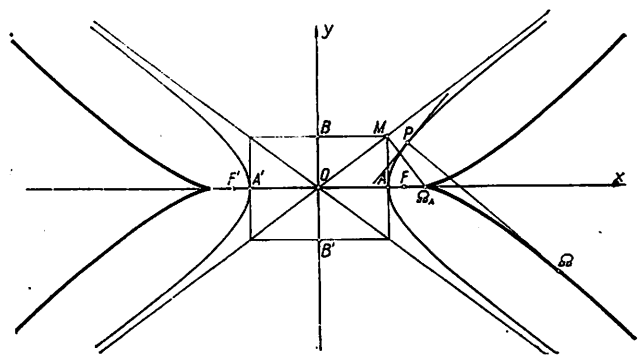


Fig. 440

$l = 4 \operatorname{arc} \Omega_A\Omega_B = 4(\rho_A - \rho_B) = 4c^2(a + b)/ab$. Polara reciprocă a evolutei elipsei în raport cu cercul $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, respectiv cu elipsa însăși, e curba cruciformă (155) cu $\varepsilon = -1$, respectiv tot o curbă cruciformă. Fie *parabola* (62); deci

$$X = 3x + p,\ Y = -y^2/p^2,\ (x, y) \in (62);\ 8(x - p)^3 - 27py^2 = 0 \text{ (fig. 441).} \tag{237}$$

Obs. Evoluta taie parabola în $\Omega_1(4p, 2\sqrt{2}p)$; Ω_1 e centrul de curbură în $P_1(p, -p\sqrt{2})$ de pe parabolă. Lungimea arcului evolutei cuprins în parabolă e $l = 2$ arc $\Omega_0\Omega_1 = 2(\rho_1 - \rho_0) = (3\sqrt{3} - 1)p$. Se poate afla evoluta conicei considerînd-o ca înfășurătoarea normalelor ei: $(x-\beta)F_\alpha - (y-\alpha)F_\beta = 0$ cu $F(\alpha, \beta) = 0$ sau $x'(X - x) + y'(Y - y) = 0$ cînd $C: x = x(t), y = y(t)$.

210 Să se afle evoluta cicloidei $C: x = a(t - \sin t), y = a(1 \cos t)$.

R. $\Gamma: X = a(t + \sin t)$, $Y = a(1 - \cos t)$ e o cicloidă congruentă cu cea dată, avînd baza $y = -2a$; se obține din cea inițială printr-o translație și schimbare de parametru: $x = \xi - \pi a$, $y = \eta - 2a$, $t = \tau - \pi$ (fig. 442).

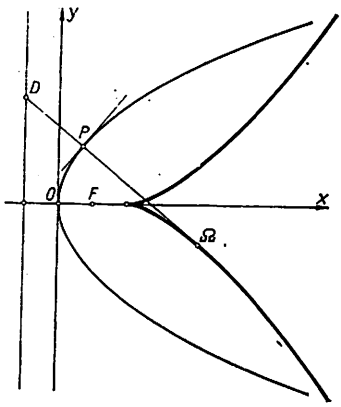


Fig. 441

211 Să se afle raportul dintre lungimea desfășuratei unei astroide și lungimea astroidei date.

R. Fie astroida (50_2); avem $s = \frac{3}{2} a^{1/3} \mid x^{2/3} \mid_{x_1}^{x_2}$; arcada între $x_1 = a$ și $x_2 = 0$ avînd lungimea $3a/2$, astroida are lungimea $l = 6a$. Raza de curbură: $\rho = 3(axy)^{1/3}$. Desfășurata astroidei (fig. 443):

$$X = x + 3x^{1/3}y^{2/3},\quad Y = y + 3x^{2/3}y^{1/3},\quad (x, y) \in (50); \tag{238}$$

$$(X + Y)^{2/3} + (X - Y)^{2/3} = 2a^{2/3}$$

e tot o astroidă, rotită cu $\pi/4$ și cu distanța dintre 2 vîrfuri opuse dublă față de a celei date. Fie $\Omega_0(a, 0)$ și $\Omega_1(2a/\sqrt{2}, 2a/\sqrt{2})$, care corespund lui $A(a, 0)$ și $P_1(a/2\sqrt{2}, a/2\sqrt{2})$ de pe (50_2); atunci $L = 8(\rho_0 - \rho_1) = 12a$. Deci $L/l = 2$. *Obs.* Cu (50_1), desfășurata are ecuațiile

$$X = a\cos\theta(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) \qquad X = \frac{3a}{2}\cos\theta - \frac{a}{2}\cos 3\theta$$

(238′) ;

$$Y = a\sin\theta(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta) \qquad Y = \frac{3a}{2}\sin\theta + \frac{a}{2}\sin 3\theta$$

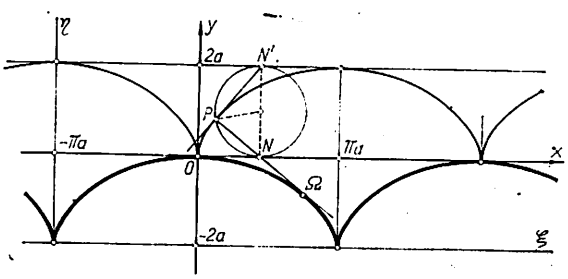


Fig. 442

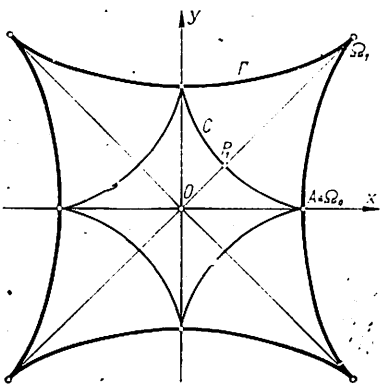


Fig. 443

212 Să se arate că evoluta unei curbe ciclice (normale) C e tot o curbă ciclică (normală) C', de aceeași natură (epi- sau hipocicloidă) și de același modul h; să se stabilească relația dintre razele a și a' ale cercurilor de bază γ_0 și γ_0'.

R. Fie (47‴) cu $\lambda = 1$. Luînd $a' = ah/(h \pm 2) : r' = a/(h \pm 2)$ şi (fig. 444)

$$X = \frac{a'}{h}\left[(h \pm 1)\cos\theta \pm \cos(h \pm 1)\,\theta\right], \quad Y = \frac{a^2}{h}\left[(h \pm 1)\sin\theta + \sin(h \pm 1)\,\theta\right]. \tag{239}$$

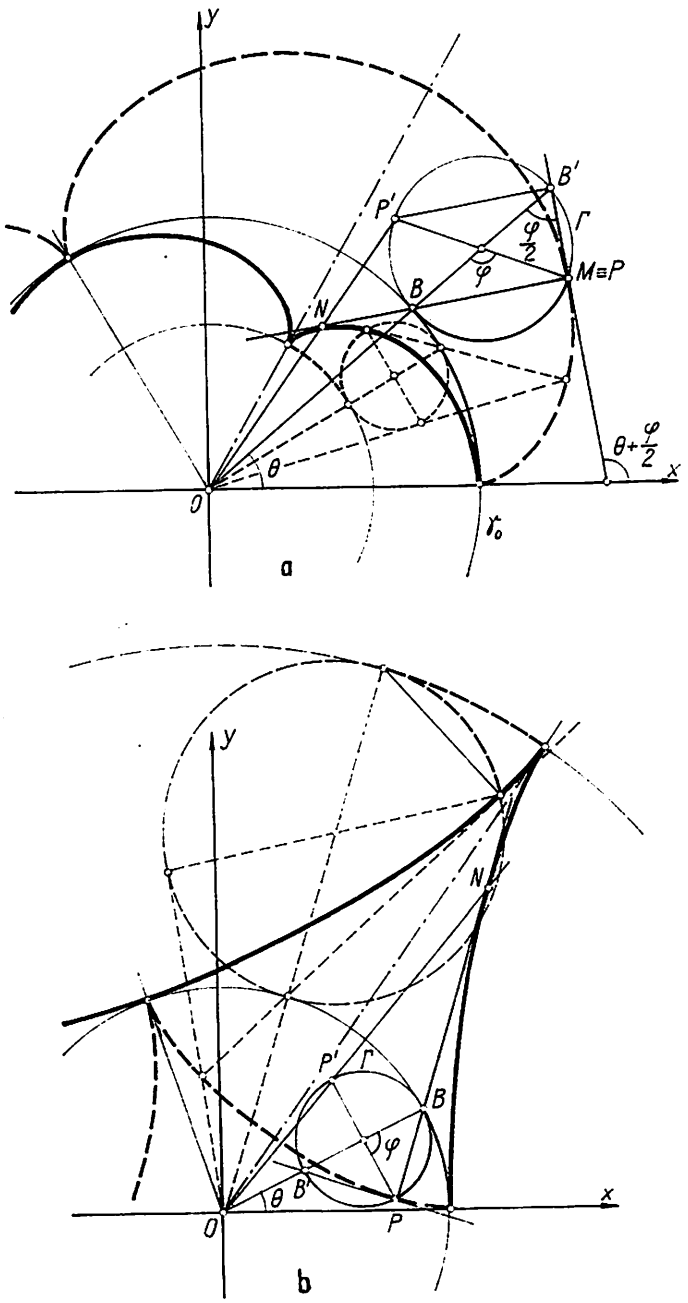


Fig. 444

Prin rotația de unghi π/h și notînd $\theta - \pi/h = \varphi$, C' are ecuațiile

$$(239') \qquad X_1 = \frac{a'}{h}\left[(h \pm 1)\cos\varphi \mp \cos(h\pm 1)\varphi\right],\quad Y_1 = \frac{a'}{h}\left[(h \pm 1)\sin\varphi - \sin(h\pm 1)\varphi\right].$$

În particular: C — *cardioidă* ($h = 1$, semn $+$), C' — cardioidă cu $a' = a/3$, $r' = r/3$ (fig. 445);

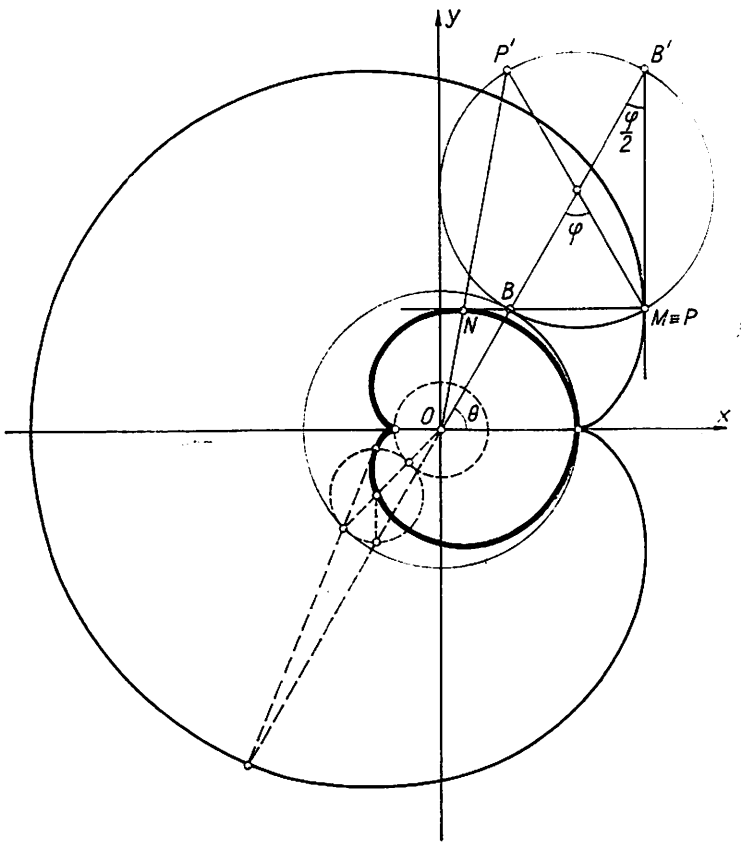


Fig. 445

pentru *o nefroidă* C ($h = 2$, semn $+$), C' e tot o nefroidă cu $a' = a/2$ și $r' = r/2$ (fig. 446); pentru evolventa C' a *hipocicloidei Steiner* ($h = 3$, semn $-$), găsim $a' = 3a$ și $r' = 3r$ (fig. 447); C — *astroidă* ($h = 4$, semn $-$). C' — astroidă cu $a' = 2a$ și $r' = 2r$ (v. fig. 443). *Obs.* Centrul de curbură în P la C e intersecția normalei la C cu dreapta ce unește centrul bazei γ_0 cu diametralul opus P', în cercul mobil γ, al lui P. Căci (v. fig. 444): $\varphi = h\theta$, $PB = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$; atunci (v. probl. 170): $R = [2(h\pm 1)/(h\pm 2)]\,PB$. $OP' \cap PB = N$. Din tr. $ONB \sim$ tr. $OP'B'$: $NB/P'B' = OB/OB' = a/(a \pm 2r) = h/(h + 2)$; dar $P'B' = BP$, încît $(NB + BP)/BP = 2(h \pm 1)/(h \pm 2)$ sau $PN = [2(h \pm 1)/(h \pm 2)]\,PB = R$.

213 Fie o curbă C avînd raza de curbură R; să se arate că raza de curbură R_1 a evolutei lui C e dată de relația

$$(240) \qquad R_1 = R\frac{dR}{ds}\left(\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds};\ \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta_1}{ds_1}\ \text{cu}\ s_1 = R\right).$$

Apl. a) Să se afle ecuaţia intrinsecă a evolutei lănţişorului. b) Să se găsească raza de curbură a evolutei curbei de ecuaţie intrinsecă $R^2 = 2as$.

R. $\theta_1 = \theta + \pi/2$; atunci $d\theta_1 = d\theta$ iar $R_1 = \dfrac{dR}{d\theta} = \dfrac{dR}{ds}\dfrac{ds}{d\theta}$. Sau (cu formulele Frenet): evoluta $C_1 : \overline{R} = \bar{r} + R\,\bar{n}$ are arcul $s_1 = R + \text{const.}$; deci $\dfrac{d\overline{R}}{ds_1} = \bar{n}$, $\dfrac{d^2\overline{R}}{ds_1^2} = -\bar{t}/R\dfrac{dR}{ds}$. *Apl.* a) $C_1 : x = \alpha - \beta \operatorname{sh}\dfrac{\alpha}{a}$, $y = 2\beta$ cu $(\alpha, \beta) \in (52)$ sau $x = a \ln [(y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2})/2a] \mp y\sqrt{y^2 - 4a^2}/4a$. $C : aR = a^2 + s^2$; cu (240), $C_1 : aR_1 = 2s_1\sqrt{as_1 - a^2}$. b) $R_1 = a$; deci C_1 e un cerc.

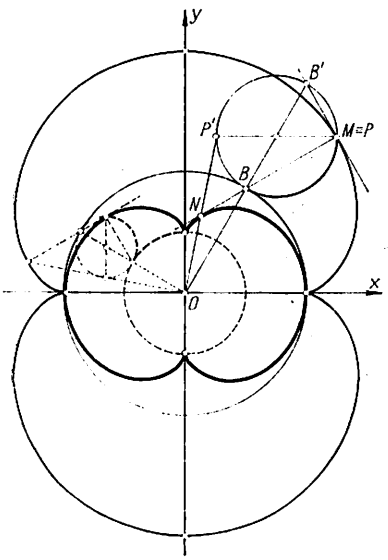


Fig. 446

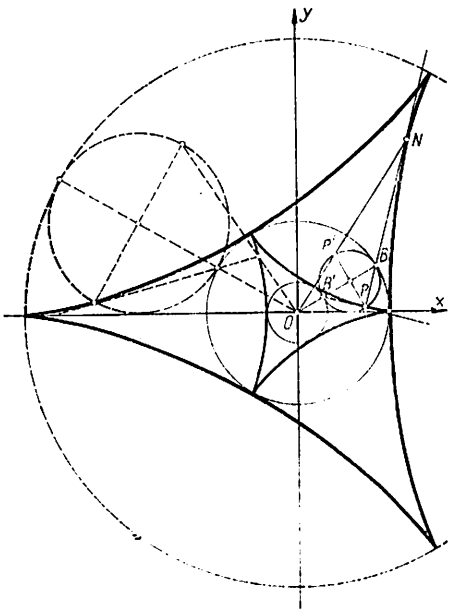


Fig. 447

214 Dacă curba C e dată prin ecuaţia polară (4), atunci evoluta Γ e

$$X = \rho\cos\theta - \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},\quad Y = \rho\sin\theta + \frac{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}. \tag{241}$$

Apl. Să se afle evoluta lemniscatei $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

215 Evoluta spiralei logaritmice e tot o spirală logaritmică, ce se obţine rotind prima spirală în jurul polului.

R. Fie C de ecuaţie (44). Centrul de curbură Ω (în P la C): $\rho_1 = ake^{k\theta}$, $\theta_1 = \theta + \pi/2$ (v. probl. 162); deci C': $\rho_1 = ae^{k(\theta_1 - \pi/2) + \ln|k|} \cdot C' = C$ cînd există relaţia $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\ln|k|}{k} = 2n\pi$, $n \in Z$. *Obs.* Cu $\rho_1 = ae^{k(\theta_1 - \alpha)}\, ke^{k(\alpha - \pi/2)}$ şi α astfel încît $ke^{k(\alpha - \pi/2)} = 1$, adică $\alpha = 2n\pi$, ceea ce e posibil rotind axa polară de un unghi α în jurul lui O: deci C': $\rho_1 = ae^{k\omega}$ ($\omega = \theta_1 - \alpha$).

216 Se numește *contrapodara curbei C în raport cu polul* Ω locul Γ al piciorului perpendicularei din Ω pe normala în punctul $P \in C$, cînd P descrie pe C. Să se arate că contrapodara lui C în raport cu Ω e podara evolutei C' a curbei C în raport cu Ω.

R. Normala la C e tangenta la evoluta C' (fig. 448).

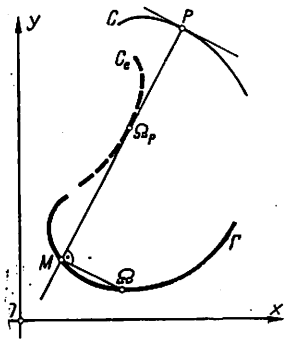


Fig. 448

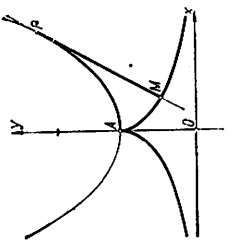


Fig. 449

217 Să se determine evolventele lănțișorului.

R. Fie $C: x = x(s), y = y(s)$; evolventele Γ_k ale lui C sînt date de ecuația

(242) $$X = x + (k - s)\,x',\quad Y = y + (k - s)\,y';\quad \overline{R} = \bar{r} + (k - s)\,\bar{\imath}.$$

Fie lănțișorul (52); avem $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Rezultă

(243) $$\Gamma_k: X = x - a \operatorname{th} \frac{x}{a} + k \operatorname{ch} \frac{x}{a},\quad Y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + k \operatorname{th} \frac{x}{a}.$$

Evolventa Γ_0: $k = 0$ e tractricea (fig. 449)

(243') $$X \pm \sqrt{a^2 - Y^2} = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - Y^2}}{Y}.$$

Obs. Invers, centrul de curbură al tractricei: $\alpha = X + \sqrt{a^2 - Y^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - Y^2}}{Y}$, $\beta = \frac{a^2}{Y}$; desfășurata: $\alpha = a\left(\ln \sqrt{\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 - 1} + \frac{\beta}{a}\right)$ sau $\beta = a \operatorname{ch} \frac{\alpha}{a}$.

218 Fie Γ_k evolventele unei curbe C. Se cere: a) Să se arate că diferența lungimilor arcelor σ_k ale evolventelor Γ_k $(k = 1, 2)$, cuprinse între 2 normale comune (ce fac unghiul α), e dată de relația

(244) $\sigma_2 - \sigma_1 = h\alpha$ ($h = k_2 - k_1$ distanța dintre evolventele Γ_k).

b) Să se determine curbura unei evolvente Γ_k. *Apl.* Să se afle lungimea unei orbiforme.

R. Din (242): $\frac{d\overline{R}}{ds} = (k - s)\frac{\bar{n}}{R}$. a) $d\sigma = \left|\frac{d\overline{R}}{ds}\right| ds = (k - s)\,d\theta$. Obținem

(245) $$\sigma = \int_0^s \frac{k - s}{R}\,ds.$$

Cum $d\sigma_k = (k - s)\,d\theta : d\sigma_2 - d\sigma_1 = h\,d\theta$; integrînd, rezultă (245). b) Fie versorii $\overline{T}$ și $\overline{N}$ ai tangentei și normalei la Γ_k. Cum $\overline{T} = \dfrac{d\overline{R}}{d\sigma}$, $\dfrac{d\overline{T}}{d\sigma} = \overline{N}/R_1$, găsim

(246) $$\overline{T} = \varepsilon\overline{n},\ \overline{N} = \varepsilon'\varepsilon\,\overline{i}\ (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1) \text{ și } R_1 = |k - s|.$$

Obs. Γ_k are în comun cu C punctul M_k, corespunzînd valorii $s = k$ a lungimii lui $\overset{\frown}{M_0M_k}$; luîndu-l ca origine a arcelor pe C, avem $k = 0$ în (242). *Apl.* O orbiformă, de lărgime constantă h, are lungimea $h\pi$ (aceeași ca a unui cerc de diametru h). Căci, fie A și B pe C, cu tangente paralele; ele împart curba în 2 arce paralele APB și $AP'B$. După (244), avem $APB - AP'B = h\pi$ sau $APB + BP'A = h\pi$. *Obs.* Există curbe de lărgime constantă h, care nu sînt cercuri (v. probl. 123); construcție: AB fiind un segment de lungime h, fie APB un arc de curbă convexă, normal la AB în extremități și avînd raza de curbură $< h$. Luînd distanța h pe normalele arcului APB, se obține un arc $BP'A$, paralel cu primul și care se racordează cu acesta în A și B; concavitatea acestui arc, fiind îndreptată spre centrele de curbură, e îndreptată spre AB. Curba $APBP'A$ e orbiformă. De exemplu: *triunghiul curbiliniu al lui Reuleaux*, format din trei arce de cerc de 60° centrate în vîrfurile opuse.

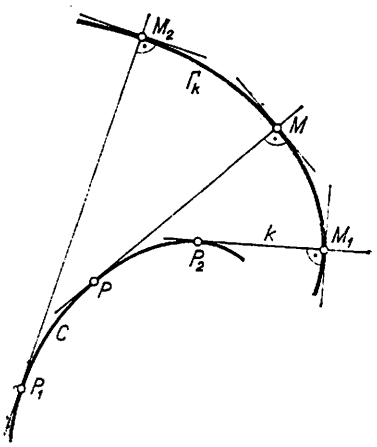


Fig. 450

219 Să se afle evolventele unei curbe C dată prin ecuațiile (29). *Apl.* Fie un cerc C. Se cere: a) Să se calculeze raza de curbură a evolventei cercului. b) Să se deducă lungimea cercului, folosindu-se proprietățile evolventei. c) Să se arate că podara centrului cercului, în raport cu o evolventă a cercului, e o spirală Arhimede. d) Să se găsească evolventa evolventei cercului C.

R. $M(X, Y) \in \Gamma$ fiind pe tangenta în $P(x, y) \in C$ (fig. 450), Γ are ecuațiile

(247) $$X = x + (k - s)\,x'/\sqrt{x'^2 + y'^2},\quad Y = y + (k - s)y'/\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Apl. $C: x = a\cos t,\ y = a\sin t$. Măsurat de la $A\ (t = 0)$: $s = at$. Ecuațiile (247) dau

$$X = a(\cos t - t\sin t) - k\sin t,\quad Y = a(\sin t - t\cos t) + k\cos t.$$

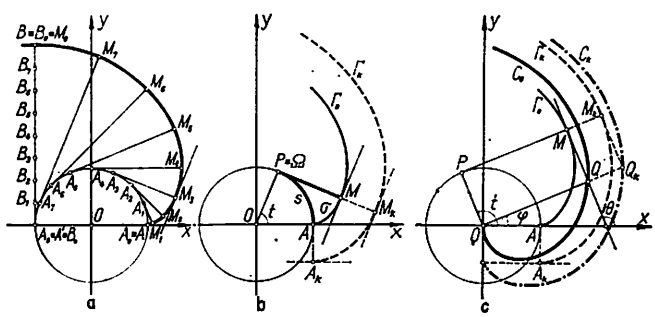


Fig. 451

Fie evolventa $\Gamma: k = 0$, cu punctul inițial A; atunci (fig. 451)

(248) $$\Gamma: X = a(\cos t + t\sin t),\ Y = a(\sin t + t\cos t);\ \rho^2 = a^2(1 + \theta^2),$$

deoarece $\theta = t$, cum rezultă din $dY/dX = \operatorname{tg} t$, $\theta = \widehat{\overline{T}, Ox}$. Construcția lui Γ: pe tangenta în A' se ia lungimea $A'B = a\pi$, se împarte $A'B$ în n părți egale prin punctele $B_0 = A', B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n = B$ (practic, se ia $n = 2^p$); tot așa semicercul superior de diametru AA', prin punctele $A_0 = A, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = A'$; pe tangenta în A_k la cerc se ia lungimea $A_kM_k = A'B_k$ iar $M_k \in \Gamma$.

a) $\sigma = \int_0^t d\sigma = s^2/2a$, căci $s = at$; sau cu (245). Deci $1/R_1 = \frac{d\theta}{d\sigma} = 1/s$ (v. şi (246)). b) arc $P_1P_2 = R_{M_2} - R_{M_1}$ cu $P_i \in C$ şi $M_i \in \Gamma$ $(i = 1, 2)$. Luînd $P_1(t_1 = 0)$ şi $P_2(t_2 = 2\pi) : l = a(t_2 - t_1) = 2a\pi$. c) Fie Q proiecţia lui O pe tangenta în M la Γ_k; coordonatele lui polare : $\rho = OQ = PM = s - k = at - k$, $\varphi = t - \pi/2$. Deci Q descrie $\rho = a(\varphi + \pi/2) - k$. d) $x = 2a(\cos t + t \sin t) - (at^2 + C)\cos t$, $y = 2a(\sin t + t \cos t) - (at^2 + C)\sin t$.

220 Să se arate că traiectoriile ortogonale Γ ale tangentelor unei curbe C sînt evolventele curbei C. *Apl.* la cazul parabolei.

R. Fie $C : \bar{r} = \bar{r}(s)$; tangentele $C_s : \bar{R} = \bar{r} + t\,\bar{l}$ depind de parametrul s. Cum $\bar{R}_t = \bar{l}$ şi $\bar{R}_s = \bar{l} + t\,\bar{n}/R$, ecuaţia diferenţială (228) se scrie $\frac{dt}{ds} + 1 = 0$, adică $t = k - s$; deci Γ sînt evolventele (242) ale lui C. *Apl.* C : $y^2 = 2px$; tangentele : $x = \alpha^2/2p + \alpha t/p$, $y = \alpha + t$. Ecuaţia (227) : $\frac{dt}{d\alpha} + \alpha t/(\alpha^2 + p^2) + 1 = 0$ cu soluţia $t = C/\sqrt{\alpha^2 + p^2} - \alpha/2 - p^2 \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + p^2})/2\sqrt{\alpha^2 + p^2}$. Cu $\sin\varphi = -\alpha/\sqrt{\alpha^2 + p^2}$, $\cos\varphi = p/\sqrt{\alpha^2 + p^2}$ şi $k = C/p - p \ln p/2$, tangentele devin $x\cos\varphi + y\sin\varphi + d = 0$ $(d = \alpha^2/2\sqrt{\alpha^2 + p^2})$ iar evolventele au ecuaţiile $x = -C\sin\varphi - \frac{p}{2}\sin\varphi \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi/2)$, $y = C\cos\varphi - \frac{p}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{p}{2}\cos\varphi \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi/2)$; $\alpha + \sqrt{\alpha^2 + p^2} = p \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

221 Se numeşte *caustica unei curbe* C înfăşurătoarea dreptelor care se obţin prin reflexie sau prin refracţie faţă de C din dreptele unui fascicul de centru Ω sau din tangentele la o curbă C_1; lui C i se zice *curbă dirimantă*. Să se arate, în cazul unui sistem de raze care provin de la un izvor punctual Ω : a) *Caustica prin reflexie* (sinonim : *catacaustică*) a lui C e evoluta omoteticei de modul 2 a podarei lui C în raport cu Ω. b) *Caustica prin refracţie* (sinonim : *diacaustică*) a lui C e evoluta causticei secundare a lui C. *Apl.* Să se afle : a) Catacaustica unui cerc pentru raze paralele. b) Diacaustica unei drepte pentru raze care provin de la un izvor punctual Ω. c) Catacaustica unei parabole pentru raze perpendiculare pe axa de simetrie a curbei dirimante.

R. a) Cum $\Omega Q = Q\Omega'$ iar $Q \in \Gamma_p$ (podara lui C în raport cu Ω), Ω' descrie omotetica Γ_0 a lui Γ_p, de centru Ω şi modul 2 (fig. 452) ; normala în Ω' la Γ_0 e raza reflectată a razei incidente ΩP. b) Razele emise de Ω sînt refractate de C în normalele causticei secundare a lui C (v. probl. 200). *Apl.* a) Fie cercul $C(O; a)$ şi razele incidente paralele cu Ox (fig. 453). Cu $M \in C$ şi

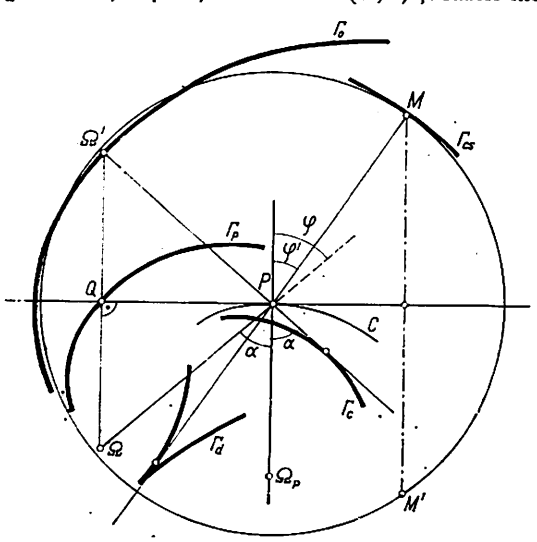


Fig. 452

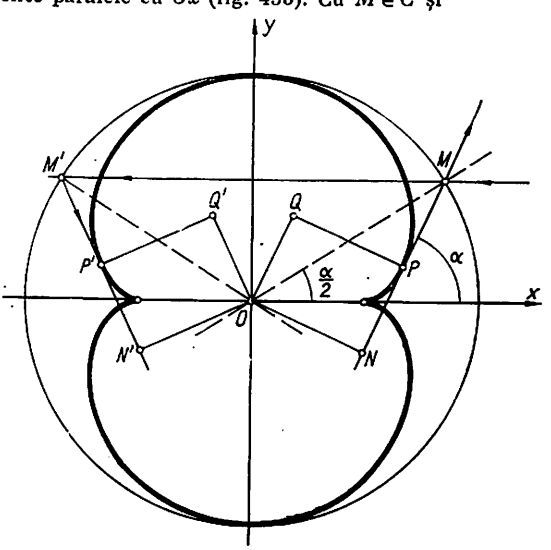


Fig. 453

$\alpha = \widehat{MN, Ox}$: $M\left(a\cos\frac{\alpha}{2}, a\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; deci raza reflectată MN. Din (228): $t = -\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; Γ (nefroidă): $x = \frac{a}{4}\left(3\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right)$, $y = \frac{a}{4}\left(3\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right)$. *Obs.* NM poate fi definită prin $\widehat{xON} = \alpha - \pi/2$ şi $p = ON = a\sin\frac{\alpha}{2}$. Din $F_\alpha = 0$: punctul caracteristic P e mijlocul lui MN, pe o paralelă la ON la distanţa $p' = OQ$. b) Cu (fig. 454) Ω $(0, a)$ avem $\sin\alpha/\sin\beta = n$, $y =$

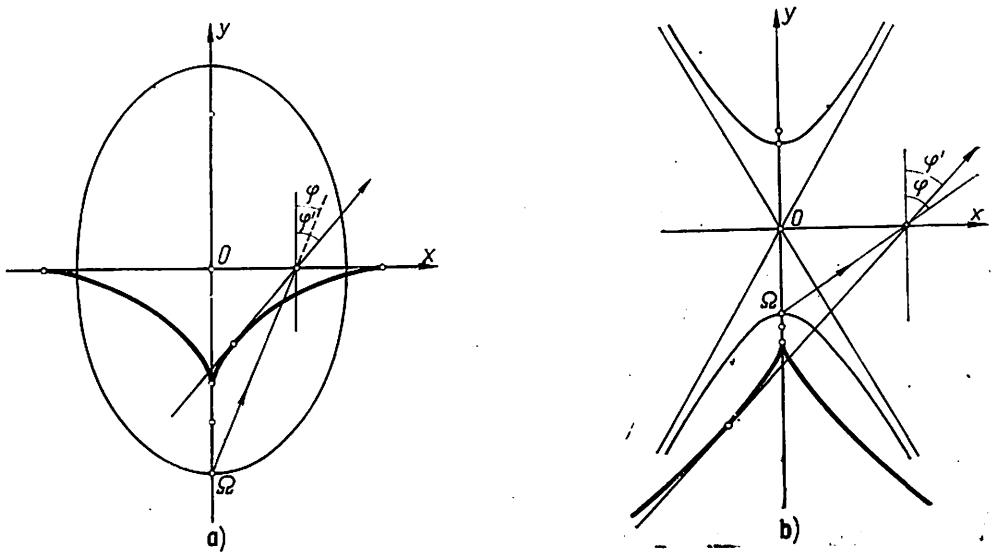


Fig. 454

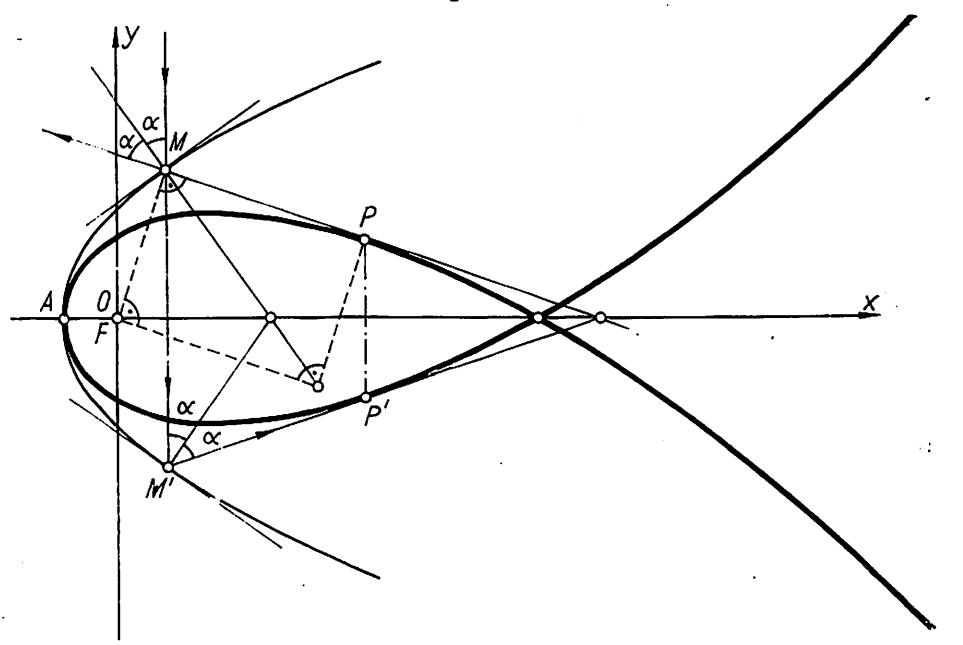


Fig. 455

$= -(x - a \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{ctg}\beta$. $\Gamma: (1-n)^{1/3}(x/an)^{2/3}+(y/an)^{2/3}=1$ (evoluta unei elipse sau hiperbole după cum $n \lessgtr 1$). c) Cubica lui Tschirnhausen; cu O focar și axa parabolei ca Ox, $C: y^2 = 2p(x + p/2)$ iar $\Gamma: 2(x-4p)^3(x+p/2) - 27py^2 = 0$ (fig. 455). *Obs.* În tabela 31 se dau catacausticele corespunzătoare unor anumite curbe dirimante. Dacă C e de grad n și de clasă m, catacaustica e de clasă $m+2n$.

Tabela 31

Curba dirimantă	Poziția izvorului de lumină Ω	Catacaustica
Cerc	pe cerc	cardioidă
Cerc	în interiorul cercului	melc
Cerc	centrul cercului	evolută de spirală Arhimede
Cardioidă	punctul de înapoiere	nefroidă
Cisoidă	focarul ordinar	cardioidă
Trisectoare	focarul curbei	parabola semicubilă
Cuadrifoliul	centru	astroidă
Cicloidă (normală) cu raza cercului egală cu a	la infinit în direcția perpendiculară bazei	cicloidă (normală), de aceeași bază și cu raza cercului egală cu $a/2$
Spirală logaritmică	pol	spirală logaritmică

222 Se numește *ruletă* traiectoria Γ a unui punct P asociat în mod rigid unei *curbe rulante* Γ_1, care se rostogolește fără alunecare pe o *curbă de bază* Γ_0 dată (din planul ei). Se cere: a) Să se determine condiția de rostogolire a lui Γ_1 pe Γ_0. b) Să se arate că, dacă Γ_0 e o curbă oarecare iar Γ_1 e o dreaptă, ruletele Γ descrise de punctele rulantei Γ_1 sînt evolventele curbei bază Γ_0. *Apl.* a) Γ_0 fiind lănțișorul (52) iar Γ_1 tangenta în vîrful lănțișorului, să se afle ruleta punctului de contact între Γ_0 și Γ_1. b) Dacă Γ_0 e un cerc de rază R, ruleta descrisă de un punct P cînd: b_1) e punctul de contact dintre Γ_0 și Γ_1; b_2) e situat la distanța R de tangenta Γ_1 și de partea cercului Γ_0.

R. a) La un același moment, avem condițiile (fig. 456)

(249) $\qquad \Gamma_0$ și Γ_1 în contact în $B_0 = B_1$ și arc $A_0B_0 =$ arc A_1B_1.

Obs. a_1) Prin trecerea lui Γ_1^0 în poziția Γ_1: arc $A_1B_1 =$ arc $A_1^0B_1^0$. a_2) $B_1^0, C_1^0, \ldots$ de pe Γ_1^0 se suprapun succesiv peste $B_0, C_0, \ldots$ de pe Γ_0 dacă arc $A_1^0B_1^0 =$ arc A_0B_0, arc $B_1^0C_1^0 =$ arc B_0C_0, ... b) Fie $\Gamma_0: \bar{r} = \bar{r}(s)$. Din (249) avem (fig. 457): $B_0 = B_1$, $\overline{PB_1} = \lambda\bar{t}$ iar $PB_1 =$ arc P^*B_0, unde P^* e poziția ocupată de P pe Γ_0; însă, A_0 fiind originea arcelor pe Γ_0, avem arc $A_0B_0 = s$, arc $P^*A_0 = -k$, încît $OP = OB_0 - PB_1$, adică (242). *Apl.* a) Vîrful $A_0(a, 0)$; condițiile de ruletă (fig. 458): $B_0 = B_1$, $PB_1 =$ arc A_0B_0. Avem arc$A_0B_0 = a \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$; cum $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $\Gamma: X = OB_1' - P'B_1' = x - a \operatorname{th}\dfrac{x}{a}$, $Y = B_1'B_1 - P''B_1 = a/\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ e o tractrice. *Obs.* Cum $x = a \arg \operatorname{ch}\dfrac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ și $\arg \operatorname{ch}\omega = \ln(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1})$, Γ are ecuația (54). b) Fie (fig. 459) $\Gamma_0: x = R\cos t, y = R\sin t$ și $\Gamma_1^0: x = R$ (tangenta în A_0 la Γ_0). Condițiile de ruletă: $B_0 = B_1$, $PB_1 =$ arc$A_0B_0 = Rt$. a_1) $\Gamma: X = OB' + B'P' = R(\cos t + t\sin t)$, $Y = B_1'B_1 + B_1P'' = R(\sin t - t\cos t)$; căci $B_1PP' = \pi/2 - \theta = \pi - t$. a_2) P e proiecția lui M pe tangenta în B_0 la Γ_0; $M(\rho, \theta)$ cu $\rho = OM = B_1P = at$ și $t = \theta + \pi/2$. Ruleta lui O e $\Gamma^*: \rho = R(\theta + \pi/2)$.

223 Fie mișcarea planului π pe planul Π. Să se arate: a) Această mișcare e realizată prin rostogolirea fără frecare a rulantei Γ_1 pe curba bază Γ_0, Γ_1 și Γ_0 fiind curbele descrise de centrul momentan de rotație C, respectiv, în π și Π; Γ_1 se numește *rostogolitoare* (sinonim: *centroidă mobilă*). b) Cu-

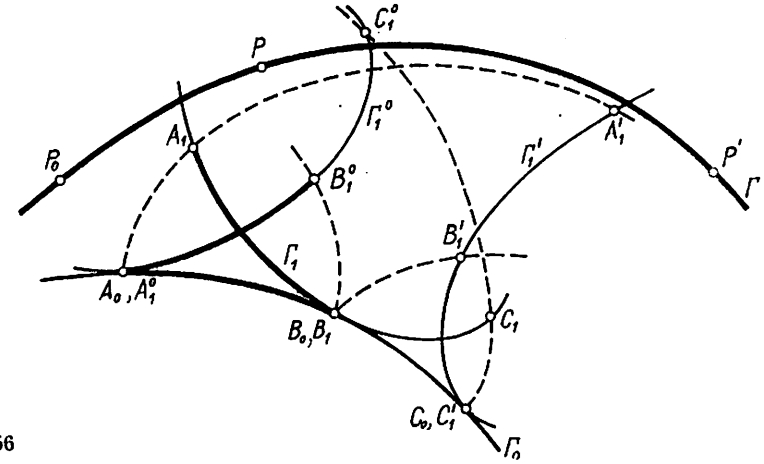


Fig. 456

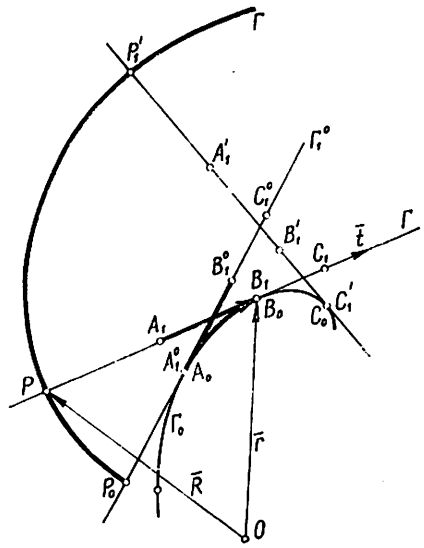


Fig. 457

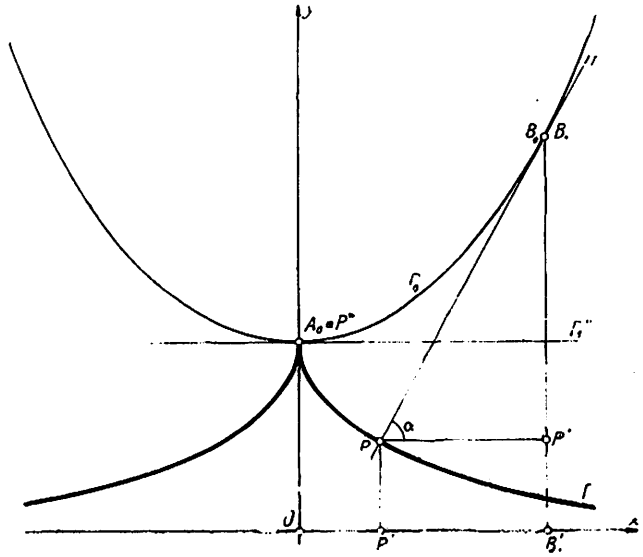


Fig. 458

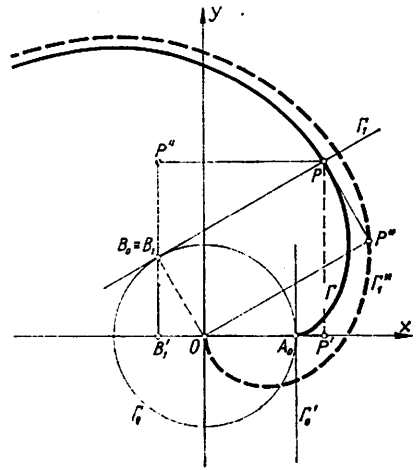


Fig. 459

noscîndu-se curburile $1/R_0$ și $1/R_1$ ale lui Γ_0 și Γ_1, curbura $1/p$ a ruletei Γ descrise în Π de P (din π) e dată de

$$1/p + 1/r = R^* \cos\theta / r^2$$

(250)

$$\text{cu } r = CP \text{ și } 1/R^* = 1/R_1 - 1/R_0 \,(\textit{Euler-Savary}),$$

unde θ e unghiul dintre CP și normala în C la Γ_0; să se construiască centrul de curbură Ω al lui Γ în P. c) Dacă $1/\rho_f$ e curbura unei curbe f solidară cu planul π, curbura $1/\rho$ a înfășurătoarei Γ e dată de

$$1/R_1 - 1/R_0 = (1/(\rho_f + r) - 1/(\rho + r))\cos\theta. \tag{250'}$$

Apl. a) Locul punctelor din planul π care, în pozițiile corespunzătoare lui C, pentru ruletele pe care le generează sînt : a_1) inflexionare sau a_2) cuspidale. b) Locul centrelor de curbură ale înfășurătoarelor dreptelor din planul π.

R. a) În π, respectiv în Π, C descrie curbele (v. probl. 191)

(251) $\Gamma_1 : x_1 = -\frac{b}{p}$, $y_1 = \frac{a}{p}$, respectiv $\Gamma_0 : X = X_0 - \frac{b}{p}\alpha_1 + \frac{a}{p}\beta_1$, $Y = Y_0 - \frac{b}{p}\alpha_2 + \frac{a}{p}\beta_2$.

La un moment dat t, Γ_0 și Γ_1 sînt în contact cu C; căci, în π, direcțiile tangentelor în C la Γ_1 : $(dx_1/dt, dy_1/dt)$ și la Γ_0 : $(\delta x/dt, \delta y/dt)$ iar, după (216′) și (251), avem $\delta x/dt = dx_1/dt + a - py_1 = dx_1/dt$, $\delta y/dt = dy_1/dt + b + px_1 = dy_1/dt$. Notînd cu s și s_1 lungimile de arc pe Γ_0 și Γ_1 : $s_1 = s + k_1$; $k_1 = 0$ dacă se ia originea arcelor în $A_0 \in \Gamma_0$ și $A_1 \in \Gamma_1$, adică arc A_0C = arc A_1C (fig. 460). b) Fie P solidar cu π ; în Π, P descrie pe Γ. Să considerăm reperul (planul) $\pi^* = Cxy$, format din tangenta și normala în C la Γ_0 ; cu $P(x = x(s), y = y(s))$, în π^*, din (216″) :

$$dx/ds_1 = y/R_1 - 1, \quad dy/ds_1 = -x/R_1. \tag{252}$$

În Π, P are o mișcare relativă față de π^*, satisfăcînd condiția (216′) :

$$\delta x/ds = dx/ds - y/R_0 + 1,$$
$$\delta y/ds = dy/ds + x/R_0. \tag{252'}$$

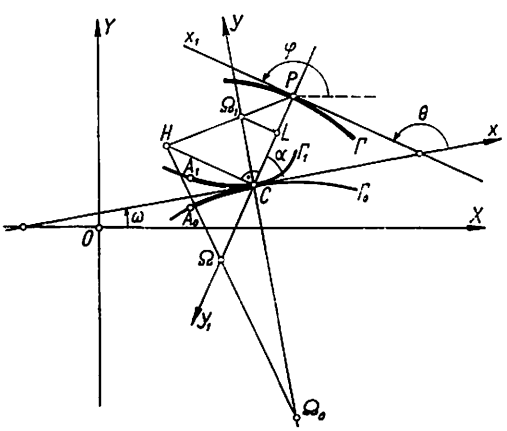


Fig. 460

Cum $ds = ds_1$, din (252) și (252′), deducem

$$\delta x/ds = y/R^*, \quad \delta y/ds = -x/R^*. \tag{252″}$$

Consecință. Tangenta $(\delta x/ds, \delta y/ds)$ în P la Γ e perpendiculară pe $\overline{CP}$ (x, y). Fie σ arcul pe Γ ; cum $\cos\theta = y/r$ și $\cos\theta = (y/R^*)\frac{ds}{d\sigma}$, rezultă

$$\frac{d\sigma}{ds} = r/R^*. \tag{252‴}$$

Cum $\theta = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ și $ds = ds_1$, cu (252) : $\frac{d\theta}{ds} = y/r^2 - 1/R_1 = \cos\theta/r - 1/R_1$; cum $1/R_0 = d\omega/ds$, din $1/p = d\varphi/d\sigma = \frac{d}{ds}(\omega + \theta)\frac{ds}{d\sigma}$ se deduce (250). *Obs.* a_1) Dacă $\theta = \pi/2$ (P pe tangenta în C la Γ_0), cu (250) : Ω (centrul de curbură al lui Γ) = C. a_2) Fie reperul polar (C, Ox), cu $\alpha = \theta + \pi/2$, ecuația (250) dă ecuația intrinsecă a lui Γ : $1/p + 1/r = R^* \sin\alpha/r^2$. Excepțînd cazul $\theta = \pi/2$, fie $r^* = r + p$ $(\overline{C\Omega} = \overline{CP} + \overline{P\Omega})$; din (250) obținem

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*}\right)\cos\theta \text{ sau } \frac{\Omega_1\Omega_0}{C\Omega_0} \cdot \frac{C\Omega}{P\Omega} \cdot \frac{r}{R_1\cos\theta} = 1. \tag{250″}$$

Dacă triunghiului $CP\Omega_1$ și transversalei $\Omega_0\Omega$ le aplicăm teorema Menelaus, (250'') se scrie $r/R_1 \cos\theta = HP/H\Omega_1$; cum $R_1 \cos\theta = CL : CP/CL = HP/H\Omega_1$, adică $CH \| L\Omega_1$ sau încă $CH \perp CP$. Rezultă *construcția lui Savary*: se intersectează perpendiculara în C pe CP cu $P\Omega_1$ în H, iar CP cu $\Omega_0 H$ în Ω. *Obs.* Cînd C, P, Ω_0 sînt coliniare ($\theta = 0$), (250'') e valabilă, însă cu altă construcție: pe Cx se iau $CU_0 = R_0$ și $CU_1 = R_1$; U_0P: $x/R_0 + y/r - 1 = 0$, $U_1\Omega$: $x/R_1 + y/r^* - 1 = 0$ și bisectoarea lui $\widehat{xCy}$: $x - y = 0$ sînt concurente, eliminarea lui x și y ducînd la (250'') cu $\theta = 0$; dreapta ce unește pe U_1 cu intersecția dintre U_0P și bisectoarea lui $\widehat{xCy}$ taie pe CP în Ω. c) Punctul caracteristic P e piciorul normalei lui f trecînd prin C; deci P descrie pe f în π și pe Φ în Π. În π^*, $P(x, y)$ satisface

$$(253)\quad \frac{\delta_f x}{ds_1} = \frac{dx}{ds_1} - \frac{y}{R_1} + 1, \frac{\delta_f y}{ds_1} = \frac{dy}{ds_1} + \frac{x}{R_1} \text{ și } \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R_0} + 1, \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R_0} \quad (s_1 = s),$$

după cum e considerat din π sau din Π (la același moment). Cum CP e normală la Φ și la f, pentru elementele lor de arc $d\sigma$ și $d\sigma_f$ avem

$$\cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{\delta x}{ds}\frac{ds}{d\sigma}, \quad \sin\theta = -\frac{x}{r} = \frac{\delta y}{ds}\frac{ds}{d\sigma} \text{ și } \cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{\delta_f x}{ds}\frac{ds}{d\sigma_f} \sin\theta = -\frac{x}{r} = \frac{\delta_f y}{ds}\frac{ds}{d\sigma_1};$$

de unde, ținînd cont de (253) și de $\theta = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, găsim

$$(253')\quad d\sigma/ds = -r(d\theta/ds + 1/R_0 - \cos\theta/r) \text{ și } d\sigma_f/ds = -r(d\theta/ds + 1/R_1 - \cos\theta/r).$$

Din $\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R_0} + \frac{d\theta}{ds}, \frac{1}{\rho_f}\frac{d\sigma_f}{ds} = \frac{1}{R_1} + \frac{d\theta}{ds}$ și (253'): $\frac{\cos\theta}{\rho + r} = \frac{1}{R_0} + \frac{d\theta}{ds}$ și $\frac{\cos\theta}{\rho_f + r} = \frac{1}{R_1} + \frac{d\theta}{ds}$,

adică (250'). Introducînd $r^* = C\Omega = r + \rho$, $r_f^* = C\Omega_f = r + \rho_f$, unde Ω și Ω_f sînt centrele de curbură ale lui Φ și f, ecuația (250') devine

$$(254)\qquad 1/R_1 - 1/R_0 = (1/r_f^* - 1/r^*)\cos\theta.$$

Obs. Cînd f se reduce la un punct P, avem $\Omega_f = P$, $r_f^* = r$ iar Φ e ruleta descrisă de P; (254) se reduce la (250''), deci: Ω e centrul de curbură al traiectoriei lui Ω_f, adică (fig. 461): Ω se determină prin construcția lui Savary plecînd de la Ω_f. *Apl.* a$_1$) Cu $1/p = 0$ în (250), obținem γ: $r = R^* \cos\theta$ — un cerc cu centrul pe normala $C\Omega_1$ (în C la Γ_1) și de diametru $CQ = R^*$, numit *cercul inflexionar* în C (fig. 462). Tangentele inflexionale la ruletele respective trec prin Q. Rezultă: dacă $T \in \pi$ descrie o dreaptă d, atunci $T \in \gamma$ și $d \in 0$. a$_2$) Un cerc γ', numit *cercul cuspidal* în C, care e simetricul lui γ în raport cu C. Rezultă: tangentele cuspidale la ruletele corespunzătoare conțin punctul Q', simetricul lui Q. Cercurile γ și γ' se mai numesc *cercurile lui de la Hire*. b) Fie f o dreaptă d. Deci Ω e dat de (250) cu $1/\rho_f = 0$ sau de (254) cu $1/r_f^* = 0$; obținem cercul $r^* = -R^* \cos\theta$, cu diametrul CQ', de lungime $-R^*$, pe normala în C la Γ_1. *Obs.* O asemenea înfășurătoare e evolventă a locului centrelor de curbură; ea are un punct cuspidal în Ω cînd $d \in \Omega$, adică $d = \Omega Q'$. Rezultă: centrele de curbură ale înfășurătoarelor dreptelor din π formează cercul cuspidal.

224 Să se afle ruleta Γ descrisă de un focar F al unei conice Γ_1 cînd baza Γ_0 e o dreaptă; cînd conica Γ_1 e cu centru, ruleta Γ se numește *curba lui Delaunay*.

R. În π, *elipsa* Γ_1 e raportată la axele ei; fie $C(x_1, y_1)$. În Π avem

$$(255)\qquad \Gamma: X = s - cy_1\, Y/b^2,\ Y = b\sqrt{(a^2 - cx_1)/(a^2 + cx_1)}\ (c^2 = a^2 - b^2,\ s = \text{arc } AC = A_0C)$$

formată dintr-o infinitate de arce egale cu arcul $F_0F_1F_2$, unde $OF_0 = a - c$, $OF_0' = a + c$ iar F_0F_2 e egală cu lungimea elipsei (fig. 463). Arcul $F_0F_1F_2$ are 2 puncte de inflexiune $I_{1,2}$, situate pe $Y = b$; I_1 e corespunzător unui sfert din lungimea totală a elipsei și are abscisa egală cu o optime din această lungime. Cu $F(X, Y) \in \Gamma$ și $C(x_1, y_1) \in \Gamma_1$ iar

$$(255')\qquad x_1 = a^2(b^2 - Y^2)/c(b^2 + Y^2),\ y_1 = b^2\sqrt{4a^2Y^2 - (b^2 + Y^2)^2}/c(b^2 + Y^2).$$

Curbura în F e $1/R = (Y^2 - b^2)/2aY^2$. Cum $r = CF = 2aY^2/(b^2 + Y^2)$, obținem

(255″) $$1/R + 1/r = 1/a.$$

Lungimea arcului lui Γ cu originea în F_0 și extremitatea în F:

(255‴) $$\sigma = 2a \operatorname{arc\,tg} \sqrt{(Y^2 - (a-c)^2)/((a+c)^2 - Y^2)};$$

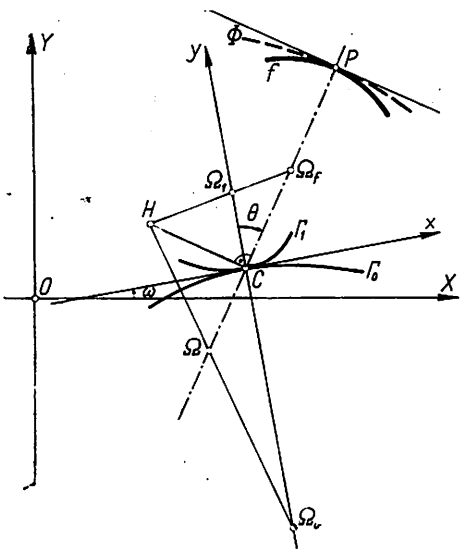


Fig. 461

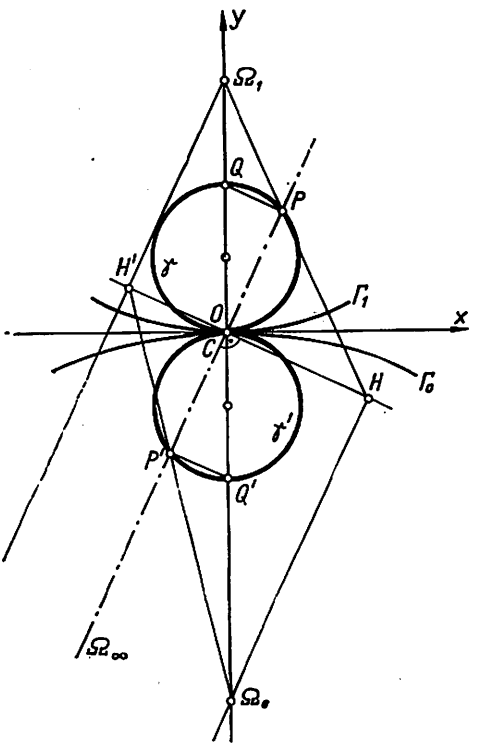


Fig. 462

deci lungimea arcului $F_0F_1F_2$ e $2a\pi$. Cum $d\sigma = ad\,dr/(2a - r)\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}$ ($e = c/a$), eliminarea lui r din (255″) dă ecuația intrinsecă

(255IV) $$1/R = e\left(e - \cos\frac{s}{a}\right) \Big/ \left(1 - 2e\cos\frac{s}{a} + e^2\right).$$

Obs. Focarul F_0' descrie o curbă congruentă cu cea descrisă de F_0.

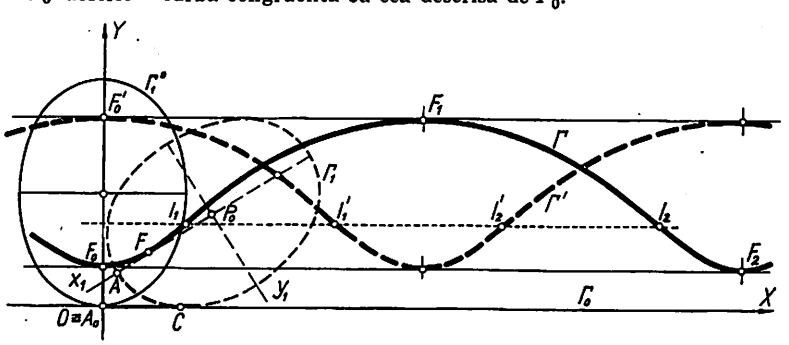


Fig. 463

Cînd Γ_1 e o *hiperbolă*, ruleta Γ descrisă de F care e interior ramurii care se rostogolește e dată de ecuația găsită în cazul elipsei în care se înlocuiește b^2 cu $-b^2$. Această curbă Delaunay n-are puncte de inflexiune ; în punctele în care e tăiată de $Y = b$, tangentele sînt perpendiculare pe OX. Γ are puncte nodale (fig. 464). *Obs.* Considerînd arcele de curbe plane avînd extremitățile în 2 puncte fixe din plan și care, prin rotirea lor în jurul unei drepte date, determină corpuri avînd un același volum dat, curbele lui Delaunay generează suprafețele de arie minimă. Cînd $\Gamma_1 : y_1^2 = 2px_1$ e o *parabolă*, ruleta $\Gamma_1 : Y = a \operatorname{ch} \frac{X}{a}$ cu $2a = p$ e *lănțișorul* (fig. 465).

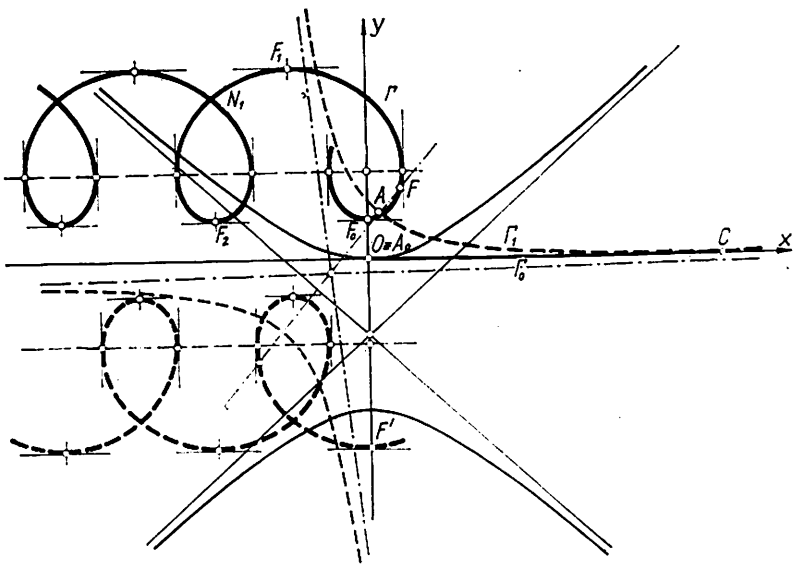


Fig. 464

225 Se numește *mișcare simetrică definită de curba* Γ_0 *ca bază* mișcarea de rostogolire (fără alunecare) a simetricei Γ_1^0 a lui Γ_0 față de tangenta în $C_0 \in \Gamma_0$. Să se arate : a) O astfel de mișcare păstrează mereu simetrie curbei de bază Γ_0 și a rulantei Γ_1 în raport cu tangenta în punctul de contact. b) Podara unei curbe date Γ_0 față de polul O e omotetica față de O și de modul

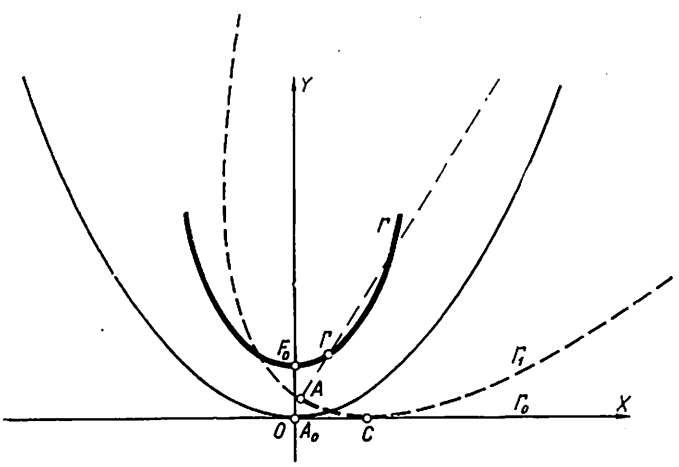


Fig. 465

1/2 a unei rulete Γ a mişcării simetrice definită de curba Γ_0 ca bază. *Apl.* Să se afle ruleta descrisă de vîrful unei parabole în mişcarea simetrică definită de parabola dată ca bază.

R. a) $C_1 \in \Gamma_1^0$ va veni în $C \in \Gamma_1$ dacă arc C_0C=arc C_0C_1 (fig. 466). Deci C_1 şi C sînt simetrice faţă de tangenta C_0x_0 (în C_0 la Γ_0); de asemenea, şi tangentele C_1x_1 (în C_1 la Γ_1^0) şi Cx (în C la Γ_1).

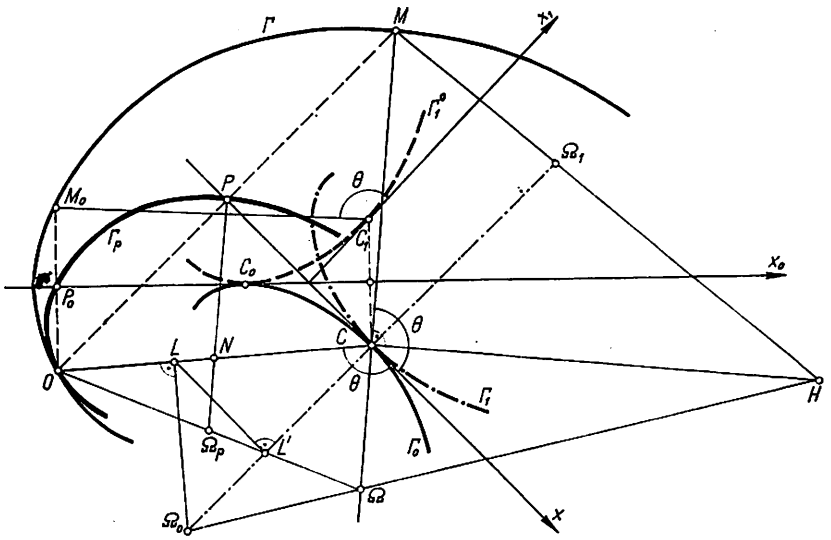


Fig. 466

Deci: Γ_0 şi Γ_1 *sînt în contact în* C. Fie $O \in \Pi$ şi M_0 simetricul său faţă de C_0x_0. Cu M_0 în π_0 solidar cu Γ_1^0, fie M poziţia sa cînd Γ_1^0 vine în Γ_1. Cum C_1 vine în C, avem $\widehat{x_0C_0M_0} = \widehat{xCM}$ şi $C_1M_0 = CM$; din cauza simetriei faţă de C_0x_0, avem şi $\widehat{x_1C_1M_0} = -\widehat{xCO}$ şi $C_1M_0 = CO$. Rezultă $\widehat{xCM} = -\widehat{xCO}$ şi $CO = CM$, adică M e simetricul lui O faţă de Cx. Deci: *simetricul unui punct fix faţă de tangentele unei curbe* Γ_0 *descrie o ruletă* Γ *avînd ca bază pe* Γ_0 *şi ca rulantă pe* Γ_0^1. În particular, dacă $O \in \Gamma_0$, atunci $M_0 \in \Gamma_1^0$ iar $M \in \Gamma_1$ astfel încît M e simetricul lui O faţă de tangenta Cx; deci: Γ_1 *e simetrica lui* Γ_0 *faţă de* Cx. b) Fie P proiecţia lui O pe Cx; curba Γ_p descrisă de P e *podara lui* Γ_0 faţă de polul O. Cum P e mijlocul lui OM, ruleta Γ descrisă de M e omotetica podarei faţă de O, în raportul 2/1. *Obs.* Construcţia normalei şi centrului de curbură ale podarei Γ_p se realizează prin această omotetie, cunoscînd pe cele ale lui Γ: b_1) Normala lui Γ în M fiind MC, normala lui Γ_p în P e PN, unde N e mijlocul lui OC. b_2) Centrele de curbură Ω_0 şi Ω_1 (în C ale lui Γ_0 şi Γ_1) sînt simetrice faţă de C; cu construcţia lui Savary, sau direct: se proiectează Ω_0 în L pe OC şi L în L' pe $C\Omega_0$ iar $\Omega = OL' \cap PN$. *Apl.* Fie $\Gamma_0: y^2 = 2px$ şi $t: y = mx + p/2m$ o tangentă mobilă (fig. 467). Simetricul $P(x, y)$ al lui O faţă de t satisface condiţiile $y/x = -1/m\,(OP \perp t)$ şi $y = mx + p/m$ ($M \in t$ şi $OM = MP$). Obţinem $\Gamma: x(x^2 + y^2) + py^2 = 0$, care e o cisoidă.

12 PROBLEME DIVERSE

226 Podara spiralei logaritmice (44) faţă de pol e o spirală logaritmică.

227 Să se arate că ortoptica astroidei (50) e curba C: $2(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$; să se afle punctele multiple ale curbei C.

228 Să se arate că locul punctelor din care se pot duce două normale perpendiculare între ele la o parabolă e o parabolă.

229 Curba $4y = ax - x^3$ taie axa Ox sub un unghi de 45° dacă $a = 4$.

230 Fiind dat un poligon regulat cu n laturi, se numeşte *curba lui Serret* (sinonim : *cassiniană cu n poli*) locul C al punctelor din plan pentru care produsul distanţelor de la un punct al locului la cele n vîrfuri ale poligonului e constant : $d_1.d_2...d_n = b^n$, poligonului i se mai spune *poligon fundamental* asociat lui C. Să se arate : a) În reperul polar avînd polul O în centrul poli-

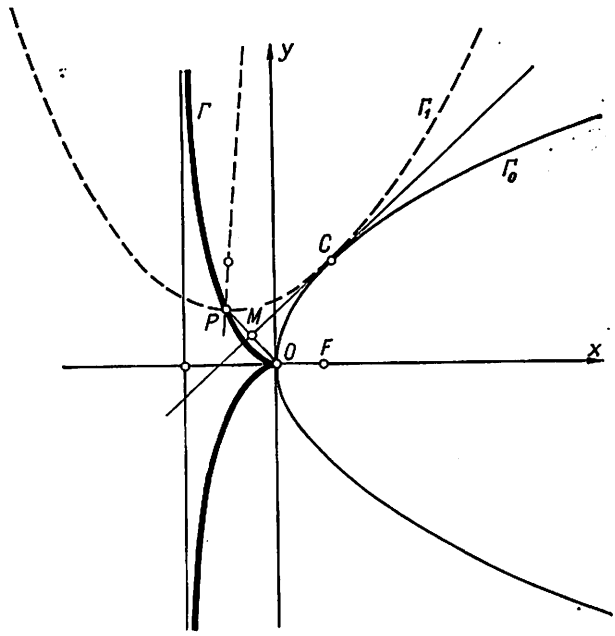


Fig. 467

gonului şi a cărei axă polară Ox conţine unul din vîrfurile lui, curba lui Serret are ecuaţia $\rho^{2n} - 2a^n\rho^n\cos n\theta + a^{2n} = b^{2n}$, unde a e raza cercului cicumscris poligonului. b) Ecuaţia carteziană e $(x^2+y^2)^n - 2a^n(x^2 - C_n^2x^{n-2}y^2 + C_n^1x^{n-4}y^4 + \ldots) + a^{2n} = b^{2n}$, fiind o curbă algebrică de grad $2n$ şi n-circulară. c) Forma curbei C depinde de relaţia de ordonare dintre a şi b : dacă $b<a$, C e formată din n ovale egale, fiecare din ele avînd o axă de simetrie care conţine polul O şi unul din vîrfurile poligonului ; în cazul $a = b$, C e o spirală sinusoidă ; cînd $b>a$, C e formată dintr-un singur oval, avînd un centru de simetrie în polul O şi compus din n arce egale cu cel corespunzător lui $\theta\in[0,2\pi/n]$. d) Dacă, în $P\in C, V$ e unghiul dintre tangentă şi raza vectoare, atunci $\cos V = a^n\sin n\theta/b^n$. e) Curba admite $2n$ puncte de inflexiune, care sînt reale dacă $a<b<a\sqrt[n]{n}$ şi sînt situate pe spirala sinusoidă $\rho^n + (n-1)a^n\cos n\theta = 0$. f) Rectificarea unei curbe Serret se efectuează, în general, prin integrale hipereliptice (e curbă Serret în sensul definiţiei de la probl. 122). g) Cu $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta_p = e^{ip/n}$, ecuaţia lui C poate fi pusă sub forma $P.Q = b^{2n}$ cu $P(z) = \prod_{p=0}^{n-1}(z - a\zeta_p)$, $Q(\bar{z}) = \prod_{p=0}^{n-1}(\bar{z} - a\zeta_p)$ sau sub forma $(P+\lambda b^n)(Q+\lambda' b^n) = \lambda\lambda'(P + b^n/\lambda')(Q + b^2/\lambda)$ cu $\lambda\lambda' \neq 0$, adică

$$\sum_{p=1}^{n}[(x - a_{p1})^2 + (y - a_{p2})^2] = \lambda\lambda' \sum_{p=1}^{n}[(x - b_{p1})^2 + (y - b_{p2})^2].$$

h) Unei curbe Serret i se asociază 2 sisteme de cîte n puncte fiecare, numite *poli secundari* : $A_p(a_{p1}, a_{p2})$ şi $B_p(b_{p1}, b_{p2})$ cu $p=1, 2, \ldots, n$, astfel încît fiecare punct $P \in C$ verifică relaţia $PA_1 . PA_2 \ldots PA_n = \sqrt{\lambda\lambda'}\ PB_1 . PB_2 \ldots PB_n$. i) Curbele Serret aparţin curbelor definite de relaţia $PA_1 . PA_2 \ldots PA_n = k PB_1 . PB_2 \ldots PB_n$, unde A_p şi B_p sînt 2 sisteme de puncte fixe distincte, luate arbitrar, iar k e o constantă : A_p, B_p se numesc *polii* curbei. Orice astfel de curbă poate fi reprezentată, într-o infinitate de moduri diferite, prin alte ecuaţii de aceeaşi formă, raportate la alte sisteme de poli convenabili aleşi; de asemenea, ea poate fi considerată, într-o infinitate de moduri, ca fiind formată din punctele planului astfel ca suma unghiurilor orientate sub care sînt văzute segmente fixe date să fie constantă.

231 Să se găsească curbele ale căror tangente şi subnormale taie axa Ox în 2 puncte conjugate armonic cu 2 puncte fixe A şi B.

232 Să se demonstreze că, într-o transformare prin inversiune, unghiul a două curbe se păstrează.

233 Să se afle locul punctului P de intersecţie al normalei în punctul curent M al unei curbe C cu perpendiculara din originea O pe dreapta OM. *Apl.* la cazul cînd C e : a) cisoida lui Diocles ; b) melcul lui Pascal ; c) cicloida normală.

234 Fie curba $C : x = 1/t^2 - 3, y = 1/t^3 - 3/t$ şi dreapta $d : 2x + y + 6 = 0$. Se cere : a) Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale lui C cu d. b) Să se afle ecuaţia carteziană a curbei C.

235 Fie un fascicul de cercuri γ tangente în O unui cerc dat C ; se duc tangente la C şi la γ. Se cere : a) Să se arate că locul punctelor de tangenţă e o cisoidă, avînd ca pol punctul O iar ca cerc fundamental cercul din fascicul simetric cu C. b) Să se deducă o construcţie geometrică a cisoidei.

236 Fie M un punct variabil pe o parabolă, M' proiecţia lui pe axa parabolei şi A simetricul focarului F în raport cu M'. Se cere să se găsească şi să se construiască curbele date de : a) locul proiecţiei lui F pe MA ; b) locul proiecţiei lui A pe FM ; c) locul ortocentrului triunghiului FAM. Să se arate că aceste curbe sînt unicursale.

237 Vîrfurile A, B ale triunghiului dreptunghic ABC (variabil) fiind fixe, să se construiască locul punctelor de intersecţie ale catetelor AC, BC cu cercul de centru C şi tangent ipotenuzei AB.

238 Să se afle podara hipocicloidei Steiner în raport cu un punct al cercului tritangent (*foliul triplu*).

239 Fie lemniscata $C : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Se cere : a) Să se afle podara în raport cu centrul ei. b) Ducîndu-se 2 perechi de tangente paralele cu o direcţie dată, dreptele care unesc punctele de tangenţă ale fiecărei perechi fac între ele un unghi de 120°. c) Ecuaţia tangenţială e $27a^4(u^2 + v^2)^2 = (a^2(u^2 - v^2) + 4)^3$. d) Din $P \in C$ se pot duce 4 tangente la C, punctele de contact fiind coliniare ; dreapta punctelor de contact înfăşoară hiperbola echilateră $4(x^2 - y^2) = a^2$. e) Din $M \notin C$ se pot duce 6 tangente la C, punctele de contact fiind pe o conică.

240 Fie P punctul curent pe un cerc de centru O şi M poiecţia sa pe diametrul AB. Dacă M' e simetricul lui M în raport cu raza OP, să se construiască : a) locul lui M' ; b) locul polului dreptei PM' în raport cu cercul ; c) locul intersecţiei dreptelor MM' şi OP.

241 Se dă trapezul ortodiagonal $ABCD$, în care BC şi AD sînt paralele iar $\hat{C} = \hat{D} = 90°$. Presupunînd că extremităţile A şi C ale diagonalei AC sînt fixe, să se arate că B descrie o cisoidă.

242 Fie o cisoidă C; să se arate: a) Tangentele în 3 puncte coliniare ale lui C retaie curba în 3 puncte coliniare. b) Cercurile osculatoare în 4 puncte conciclice retaie pe C în 4 puncte conciclice. c) Diferenţa $s-y$ dintre arcul cisoidei şi ordonata lui $P \in C$ tinde către o limită finită, cînd P tinde către infinit pe curbă.

243 Fie cardioida $C: \rho = a(1 + \cos\theta)$. Să se arate: a) Curba inversă a lui C în raport cu polul e o parabolă cu focarul în pol şi de parametru $p = k^2/a$. b) Din punctul P se pot duce 3 tangente la C, locul lui P pentru care cele 3 puncte de tangenţă sînt coliniare fiind un cerc. c) Curbele care taie pe C sub un unghi α, oricare ar fi a, sînt $\rho = k(1 + \cos 2(\theta - \alpha))$. d) C poate fi rostogolită pe o cicloidă astfel ca punctul ei cuspidal să descrie o dreaptă.

244 Fie M' şi M'' proiecţiile punctului M al cercului $x^2+y^2=a^2$ pe Ox şi Oy; dacă $A(a, 0)$, să se arate că locul intersecţiei lui AM'' şi MM' e curba $C: (x/a)^2 + [y/(a - x)]^2 = 1$. Se cere graficul lui C.

245 Fie curba C: $x = t^2$, $2y = t^4(2 - t^2 + 2at^3)$. Să se arate: a) C are un punct de întoarcere de a doua speţă în origine. b) Una din ramuri are un maxim şi taie pe Ox într-un singur punct. c) Cealaltă ramură are un maxim şi un minim cînd $0 < a < 1/7$, tăind pe Ox în 2, 1 sau în nici un punct, după cum $a \lessgtr 1/3\sqrt{6}$; n-are nici un extremum cînd $a \geqslant 1/7$, avînd cel puţin un punct cu tangentă staţionară pentru $1/7 \leqslant a \leqslant 4\sqrt{2}/35$ (punct de inflexiune cu tangentă paralelă sau neparalelă cu Ox cînd $a = 1/7$ sau $1/7 < a < 4\sqrt{2}/35$ şi un punct de ondulaţie pentru $a = 4\sqrt{2}/35$); n-are nici un punct cu tangentă staţionară cînd $a > 4\sqrt{2}/35$.

246 Fie o curbă C de ecuaţie explicită (polară); să se determine curba Γ astfel ca, în punctele de aceeaşi abscisă (corespunzătoare aceleiaşi valori a unghiului polar), subtangentele sau subnormalele carteziene (polare) ale lui C şi Γ să fie egale.

247 Tangenta şi normala la curba $x = 2a \ln \sin t - 2a \sin^2 t$, $y = a \sin 2t$, determină pe Ox un segment de lungime $2a$.

248 Fie parabola generalizată (146). Se cere: a) Lungimea unui arc al curbei cu originea în O; cazurile cînd rectificarea se face prin funcţii elementare. b) Dacă T şi N sînt intersecţiile axei Ox cu tangenta şi normala în P la curbă iar N_1 e punctul comun normalei (în P) şi paralelei prin T la Oy, să se stabilească relaţia dintre raza de curbură R şi segmentul NN_1.

249 Să se arate că locul capetelor subtangentei polare la spirala hiperbolică $\rho\theta = a$ e un cerc.

250 Să se arate că normala la curba C: $x = 4/(t^2 + 1)$, $y = (t^2 + 4t + 1)/(t^2 + 1)$ trece printr-un punct fix; explicaţie.

251 Să se afle curbele pentru care segmentul din normală, într-un punct al curbei, cuprins între axele de coordonate să fie constant.

252 Reprezintă ecuaţia $\rho = a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ sau $\rho = a/\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$ o strofoidă?

253 Fie B şi C punctele de contact ale tangentelor la curba $\Gamma: x^3 = (x^2 - 1)y$ duse din punctul $A \in \Gamma$; dreapta BC retaie curba în D. Cînd A descrie pe Γ, se cere: a) Să se afle locul intersecţiei tangentelor în A şi D la Γ. b) Să se arate că punctul caracteristic al dreptei BC e conjugatul armonic al lui D în raport cu BC. c) Să se construiască locul centrului de greutate al triunghiului ABC.

254 Fie A unul din punctele de intersecţie a 2 cercuri date. O secantă prin A taie cercurile în B şi C. Se cere: a) Locul Γ al conjugatului armonic al lui A în raport cu B şi C. b) Să se determine punctele multiple ale lui Γ. c) În ce cazuri Γ poate fi o strofoidă sau o cisoidă.

255 Fie sinuspirala $C: \rho^n = a^n \cos n\theta$. Se cere: a) Să se arate că normala polară în punctul curent e egală cu produsul razei de curbură prin $n + 1$. b) Unghiul dintre raza vectoare şi tangenta în $P(\rho, \theta)$ la C e $V = n\theta + \pi/2$. c) Să se afle podara lui C faţă de pol.

256 Fie curba $C: x = -at^2/(1 + t^2), y = at(1 - t^2)/2(1 + t^2)$. Să se arate: a) Dacă, pe C, 3 puncte sînt coliniare sau 4 puncte sînt conciclice, între parametrii lor avem respectiv relaţiile $1 + \Sigma t_1 t_2 = 0$, $\Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 t_3 = 0$. b) Dreapta AB, cu $A(t)$ şi $B(1/t)$, $|t| < 1$, înfăşoară o parabolă, iar centrul cercului Γ, circumscris triunghiului ABO, descrie o altă parabolă. c) AB şi Γ taie pe C respectiv în D şi E; dreapta DE înfăşoară aceeaşi parabolă ca şi AB, iar tangentele în A şi B la C trec prin E. d) C e o strofoidă cu punctul dublu $(-a/2, 0)$.

257 Fie mişcarea de bielă în cazul sistemului format din manivela OM_1 şi biela M_1M_2 a cărei extremitate M_2 se mişcă într-o culisă rectilinie d. Se cere: a) Să se arate că traiectoria Γ a unui punct P rigid legat de biela M_1M_2 e o cuartică, ce admite — în general — două puncte duble (care se pot confunda într-un tacnod); Γ mai poate avea (dacă nu se descompune) cel mult încă un punct dublu, cînd Γ e o curbă unicursală. b) Să se studieze cazul în care $P \in M_1M_2$ şi $O \in d$.

258 Fie parabolele Γ şi Γ' coaxiale şi de acelaşi parametru. Dacă $M \in \Gamma'$, să se arate că locul proiecţiilor vîrfului O a lui Γ pe polarele lui M faţă de Γ e o cubică circulară, cu punct dublu în O, avînd ca asimptotă directoarea parabolei Γ.

259 Să se arate că, dacă dreapta $d: y = mx + \lambda$ e asimptotă a unei curbe algebrice $C_n: \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0$, atunci m e rădăcină a ecuaţiei $\varphi_n(1, m) = 0$. Dacă m e rădăcină simplă, atunci λ e dată de ecuaţia $\varphi_{n-1}(1, m) + \lambda\varphi_n'(1, m) = 0$; dacă m e rădăcină multiplă, însă e rădăcina simplă a ecuaţiei $\varphi_{n-1}(1, m) = 0$, atunci λ verifică ecuaţia

$$\varphi_{n-2}(1, m) + \lambda\varphi_{n-1}'(1, m) + \lambda^2\varphi_n''(1, m)/2 = 0.$$

260 Dacă punctele de contact a n tangente la o curbă algebrică C_n de grad n este pe o dreaptă, celelalte puncte de intersecţie ale tangentelor cu C_n sînt pe o curbă algebrică C_{n-2} de grad $n - 2$.

261 Fiecare rază vectoare a curbei $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ o intersectează în trei puncte diferite de pol. Să se arate că tangentele în aceste puncte formează un triunghi echilateral.

262 Să se arate că o curbă algebrică de gen diferit de zero are cel puțin un punct de inflexiune sau un punct cuspidal.

263 Un segment AB, de lungime dată a, alunecă cu capetele sale A și B respectiv de-a lungul axelor ortogonale Ox și Oy. Să se arate că locul piciorului perpendicularei pe AB din : a) originea O a axelor e cuartica $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2y^2$, numită *cuadrifoliu*; să se reprezinte grafic. b) vîrful C al dreptunghiului $OACB$ e astroida (50).

264 Să se determine numărul condițiilor impuse coeficienților ecuației unei curbe algebrice C_n de existența unui punct multiplu de ordin k. Ce se întîmplă cînd se dau și tangentele în punctul multiplu? Discuție cînd curba C_n admite numai puncte duble.

265 Dacă o curbă plană e închisă și nu posedă puncte cu tangentă staționară, lungimea totală a evolutei e egală cu dublul diferenței dintre suma valorilor maxime și suma valorilor minime ale razei de curbură a curbei date.

266 Fiind date două puncte A, B și o dreaptă d trecînd prin A, se numește *transformarea lui Maclaurin* procedeul prin care unui punct M îi corespunde punctul M', intersecția paralelei prin B la AM cu paralela prin M la d. Să se afle, prin transformarea lui Maclaurin, transformata C' a unei curbe C.

267 Fie d o paralelă la Oy. O dreaptă variabilă dusă prin O taie pe d în P; perpendiculara în P pe OP taie pe Ox în Q; perpendiculara în Q pe PQ taie pe d în R; perpendiculara în R pe QR taie pe OP în M. Punctul M descrie o cubică cu punct dublu în O (cubica lui Newton).

268 Un punct M e variabil pe un cerc. Fie A, B proiecțiile lui pe doi diametri perpendiculari. Locul proiecției centrului pe dreapta AB admite un punct multiplu.

269 Să se determine punctele multiple, punctele de inflexiune, tangentele în aceste puncte și caracteristicile plückeriene ale curbei C : a) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2x^2 = 0$; b) $(x^2 + y^2)(x - ay)^2 - b^2x^2 = 0$ $(ab \neq 0)$; c) $x^3 - y^3 + x(y^3 - 1) + y(x^3 - 1) = 0$ (*cuartica lui Caporali*).

270 Să se determine ecuația unei quintice ireductibile care să aibă trei puncte tacnodale cu tangentele (în aceste puncte) concurente. Dacă o astfel de quintică e unicursală, ea are unul sau trei puncte de inflexiune.

271 Să se arate că sînt proiectiv echivalente cubicele nedegenerate care au date un nod, un punct de inflexiune și un punct ordinar.

272 Fie P punctul curent al unei strofoide oblice. Se cere : a) Locul Γ al intersecției razei vectoare a lui P față de punctul nodal al strofoidei cu polara lui P în raport cu cercul de bază al strofoidei. b) Să se afle punctele multiple ale curbei Γ. c) Să se reprezinte graficul curbei Γ, în cazul strofoidei drepte.

273 Fie M un punct mobil pe o parabolă de vîrf O; M se proiectează pe axă în P, iar P pe dreapta OM în Q. Locul lui Q e o cuartică circulară, cu punct triplu în O, cu tangente confundate.

274 Se consideră familia de hiperbole $x^2 + 2xy - (\alpha + 1)y^2 + \alpha^2x + \alpha y + \alpha^4 = 0$ (α parametru). Să se arate : a) Locul centrelor lor e Ox. b) Înfășurătoarea polarei lui O față de aceste conice e parabola semicubică C : $2x^3 + 27y^2 = 0$. c) Podara lui C față de O e cuartica $y^2(x^2 + y^2) + 2x^3 = 0$.

275 Să se facă studiul cuarticei $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4$.

276 Fiind date (într-un acelaşi plan) trei curbe algebrice C_i: $f_i(x_1, x_2, x_3) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, se numeşte *jacobiana* lor curba algebrică definită de ecuaţia $\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 0$. Să se arate că, dacă curba C_i e de gradul n_i, atunci jacobiana lor e de gradul $n_1 + n_2 + n_3 - 3$.

277 Se numeşte *curbă armonică* curba C de ecuaţie (29_2) cu F verificînd ecuaţia lui Laplace $\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$; cînd $F(x, y)$ e un polinom de grad n, C e o *curbă algebrică potenţială*. Se cere: a) Să se arate că, dacă $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ e o funcţie monogenă în D, ecuaţia $P(x, y) = 0$ şi $Q(x, y) = 0$ reprezintă 2 curbe armonice, ale căror puncte comune sînt imaginile rădăcinilor ecuaţiei $f(z) = 0$, tangentele la cele 2 curbe în aceste puncte fiind ortogonale; cînd $f(z)$ e un polinom de grad n (cu coeficienţi complecşi), curbele $P = 0$ şi $Q = 0$ sînt curbe algebrice potenţiale. b) Dacă una din curbele algebrice potenţiale $P = 0$ şi $Q = 0$ admite un punct multiplu Ω de ordin m, cele m tangente în Ω formează un fascicul de drepte care determină unghiuri egale între ele, avînd ca măsuri $\pi/2p$ sau $\pi/(2p + 1)$ după cum $m = 2p$ sau $m = 2p + 1$. c) Cele m centre de curbură corespunzătoare ramurilor curbei prin Ω sînt coliniare. Cînd Ω e comun curbelor $P = 0$ şi $Q = 0$, dreptele centrelor de curbură corespunzătoare coincid.

278 Să se construiască cuarticele $(y^2 - x^2)(x - 1)(x - 3/2) - 2(x^2 + y^2 - 2x)^2 = k$ (k parametru), împărţind planul în regiuni prin cele două bisectoare, dreptele $x = 1$, $x = 3/2$ şi cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

279 Să se găsească primele două rădăcini pozitive ale ecuaţiei $x \cos x = 1$, reprezentînd grafic curbele $y = \cos x$ şi $xy = 1$.

280 Să se determine ordinul contactului între curbele: a) $y = \sin x^3$ şi $y = x^3$; b) $y = x^4$ şi $y = x^2 \sin^2 x$; c) $y = x^3$ şi $y = x \sin x$; d) $x^{2m} + y^{2m} = 1$ $(m > 10)$ şi $x^2y^2 - (x^2 + y^2) + 1 = 0$; e) $y = \sin x$ şi $y = \operatorname{tg} x$.

281 Să se afle curbele osculatoare într-un punct multiplu al unei curbe C, care să reprezinte curba în vecinătatea acestui punct.

282 Fie curba $C: x^y = y^x$. Se cere: a) Să se arate că C se descompune în bisectoarea întîia şi curba $\Gamma: x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, unde n e un parametru. b) Să se demonstreze că Γ taie bisectoarea întîia sub un unghi drept. c) Să se determine punctele singulare ale lui C. d) Să se studieze curba C (concavitate, asimptote, reprezentare grafică). e) Să se afle curbura lui Γ într-un punct singular al lui C.

283 Să se găsească curbele a căror rază de curbură se află într-un raport constant faţă de proiecţia razei vectoare pe normală.

284 Să se arate că raza de curbură R a curbei integrale a ecuaţiei diferenţiale $a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy = 0$ $(b \neq 0)$ e dată de formula

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| ab\left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) - b^2 \frac{\partial a}{\partial x} - a^2 \frac{\partial b}{\partial y} \right|}{(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

285 Fiind dată o elipsă, să se arate : a) Dacă a şi b sînt semiaxele elipsei, R_1 şi R_2 razele de curbură în 2 puncte oarecare P_1 şi P_2 de pe elipsă, d distanţa dintre centrele de curbură şi p distanţa de la centrul elipsei la axa radicală a cercurilor de curbură în P_1 şi P_2, atunci $2dp = 3a^{2/3}b^{2/3}(R_1^{2/3} - R_2^{2/3})$. b) Dacă d şi d' sînt diametrele cercurilor care trec respectiv prin focarele F, F' şi sînt tangente în P la elipsă, iar R e raza de curbură în P, avem $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{2}{R}$. c) Pe elipsă există, în general, 3 puncte astfel ca cercurile de curbură ale curbei în ele trec printr-un punct dat al elipsei.

286 Fie spirala Arhimede (36); să se arate : a) Centrele de curbură în punctele spiralei care se află pe aceeaşi rază sînt situate pe o elipsă ale cărei dimensiuni nu depind de alegerea razei. b) Dacă punctul spiralei tinde la infinit, centrul de curbură se mişcă pe o curbă ce tinde către cercul $\rho = 1$. c) Centrul cercului care trece prin pol şi e tangent spiralei pentru $\theta = \pi/4$ e $\Omega(a(\pi-4)/8\sqrt{2},\ a(\pi+4)/8\sqrt{2})$.

287 Să se afle curbele astfel ca, transformîndu-le prin inversiune, să existe o relaţie dată între curburile în 2 puncte corespondente.

288 Să se arate că raza de curbură a curbei $C : y^2 = e^x + 1$ într-un punct P e egală cu segmentul cuprins între punctele de intersecţie ale tangentei şi normalei în P cu axa Ox.

289 Printr-un punct P din planul unei parabole se duc cele trei normale PP_i $(i = 1, 2, 3)$ la parabolă; fie R_i raza de curbură în P_i. Să se arate că locul lui P astfel ca : a) $\sum_i R_i^{2/3} = a$ e o perpendiculară pe axa parabolei; b) $(R_1R_2)^{2/3} + (R_2R_3)^{2/3} + (R_3R_1)^{2/3} = a$ se compune din 2 perpendiculare pe axa parabolei; c) $R_1R_2R_3 = a$ e un cerc (a-const.).

290 Fie foliul Descartes : $x^3 + y^2 - 3axy = 0$. Se cere : a) Să se arate că e o curbă unicursală, dîndu-i-se o parametrizare. b) Să se determine condiţia ca 3 puncte $P_i(i = 1, 2, 3)$ de pe curbă să fie coliniare. c) Să se demonstreze că fiecare tangentă la curbă în P_i retaie curba în punctele Q_i coliniare. d) Să se construiască graficul curbei. e) Să se afle lungimea buclei foliului. f) Să se găsească ecuaţia tangentelor paralele cu a doua bisectoare a reperului. g) Să se scrie ecuaţia unui cerc de rază a tangent în punctul M de abscisă $x = 4a/3$ şi ecuaţia cercului osculator în M la curbă.

291 Dintr-un punct P situat în planul unei conice se duc cele 2 tangente PP_i $(i = 1, 2)$ la conică; fie R_i raza de curbură în P_i la conică. Să se arate că $R_1 . PP_2^3 = R_2 . PP_1^3$.

292 Fie familia de conice $(x - 1)^2 - y(1 + \lambda x) = 0$. Se cere : a) Să se găsească locul Γ_1 al centrelor conicelor, să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic. b) Să se determine locul Γ_2 al punctelor de extremum ale conicelor şi să se reprezinte grafic. c) Să se afle curba Γ_0 din familie care are un extremum P_0 pe Oy. În acest caz : c_1) să se reprezinte grafic curba Γ_0; c_2) să se calculeze curbura lui Γ_0 în P_0; c_3) să se găsească locul mijlocului lui MM' determinat de Γ_0 pe o paralelă la Ox şi să se construiască acest loc.

293 Să se afle punctele de contact, centrele şi razele cercurilor supraosculatoare ale unei conice, respectiv ale unei cicloide.

294 Să se arate că cercul de curbură la o conică în vîrful ei are un contact de ordinul trei cu conica.

295 Să se afle înfășurătoarea familiei de curbe: a) $x^2/\alpha + y^2/\beta = 1$, cînd $\alpha + \beta = \text{const.}$ sau $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; b) $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ cînd $\alpha + \beta = \alpha\beta$.

296 Fiind dată o parabolă Γ, să se arate că înfășurătoarea cercului variabil care trece printr-un punct fix P_0, situat pe axa parabolei, și al cărui centru descrie parabola e o cubică. Să se cerceteze dacă această cubică are puncte singulare și să se reprezinte grafic. Caz particular: punctul P_0 e vîrful parabolei.

297 Pe coardele paralele cu una din axele de simetrie ale unei conice, cu centru, ca diametri, se construiesc cercuri. Să se arate că înfășurătoarea acestor cercuri sînt elipse și hiperbole.

298 Transformata trisectoarei Longchamps $\rho \cos 3\theta = a$ prin polare reciproce în raport cu cercul $C(O; a)$ e hipocicloida Steiner.

299 Să se arate că înfășurătoarea cercurilor trecînd printr-un punct fix și tăind o dreaptă dată după coarde de lungime constantă și egală cu dublul distanței a de la punct la dreaptă e $\rho = a\cos\theta + a/\cos\theta$, alegînd polul în punctul fix și axa polară paralelă cu dreapta dată. Să se construiască graficul curbei.

300 Vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic se mișcă pe o dreaptă fixă iar una din catete trece printr-un punct fix. Să se determine înfășurătoarea celeilalte catete.

301 Pe un cerc de centru O se consideră un punct fix A și două puncte mobile M și N de o parte și de alta a lui A astfel ca $\overset{\frown}{NOA} = 2\,\overset{\frown}{AOM}$. Să se arate că înfășurătoarea coardei MN e o hipocicloidă.

302 Să se afle înfășurătoarea și traiectoriile ortogonale ale familiei de drepte $x = t - a/\alpha^2$, $y = \alpha t$.

303 Dacă razele de lumină emise dintr-un punct A al unui cerc de rază a se reflectă de n ori pe epicicloida $x = (r_0 + r)\cos t - r\cos\frac{r_0 + r}{r}t$, $y = (r_0 + r)\sin t - r\sin\frac{r_0 + r}{r}t$, caustica pentru ultimele raze reflectate e epicicloida $X = \frac{(n+1)a}{2n+1}\cos t + \frac{na}{2n+1}\cos\frac{n+1}{n}t$, $Y = \frac{(n+1)a}{2n+1}\sin t + \frac{na}{2n+1}\sin\frac{n+1}{n}t$.

304 Fiind dată curba C, dacă C_1 e evoluta lui C, C_2 e evoluta lui C_1 etc., se cere să se determine curbele C astfel încît: a) să fie îndeplinită relația $aR + 2bR_1 + cR_2 = 0$, unde R, R_1, R_2 să fie respectiv razele de curbură ale lui C și primele două evolute ale lui C; b) razele de curbură ale lui C_n să fie egale cu a lui C în puncte corespondente.

305 Fie curba $C: x = t - \text{sh}\,t\,\text{ch}\,t$, $y = 2\,\text{ch}\,t$. Se cere: a) Să se calculeze raza de curbură într-un punct oarecare $P \in C$; dacă Ω e centrul de curbură în P iar N și T punctele în care normala și tangenta în P taie axa Ox, atunci $PT^2 = P\Omega \cdot PN$. b) Să se determine ecuațiile evolutei și ale evolventelor curbei C.

306 De-a lungul elipsei $\Gamma_0 : b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ se rostogoleşte, fără alunecare, o altă elipsă Γ_1 congruentă cu Γ_0; în poziţia iniţială, axele lor mari erau în prelungire. Să se arate că ruleta centrului rulantei Γ_1 e cuartica $\Gamma : (x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$.

307 Fie, pe cercul $C(\Omega; a)$ un punct fix O şi un punct mobil M. Să se arate că, în coordonate polare cu polul O şi axă polară $O\Omega$: a) Locul intersecţiei dreptei OM cu bisectoarele unghiului $MO\Omega$ are ecuaţia $\rho \sin 3\theta = a \sin 4\theta$. b) Dacă A e simetricul lui O în raport cu piciorul perpendicularei din M pe diametrul $O\Omega$, piciorul perpendicularei din O pe dreapta AM descrie curba $\rho = 2a \sin\theta \sin 2\theta$.

Să se reprezinte grafic curbele găsite.

308 Fie familia de drepte $x \sin\theta - y \cos\theta = \theta - \cos\theta$. Se cere: a) Să se afle înfăşurătoarea C a familiei. b) Să se arate că înfăşurătoarea normalelor la C e cercul $\gamma(S(0, 1); 1)$; de aici, să se deducă o definiţie geometrică a curbei C. c) Ω fiind centrul de curbură în P la C, pe normala $P\Omega$ se ia punctul M astfel ca $\Omega M = f(\theta)\, \Omega P$; să se determine curba Γ descrisă de punctul M. d) Să se găsească curbele Γ care taie normalele $P\Omega$ sub un unghi constant şi evoluta lor.

Capitolul II

CURBE STRÎMBE

1. REPREZENTĂRI ANALITICE ALE UNEI CURBE ÎN SPAȚIU

1 Să se arate că un drum echivalent cu un drum simplu (închis) e de asemenea un drum simplu (închis). *Apl.* Să se cerceteze dacă sînt echivalente drumurile date de reprezentările parametrice: a) $r: x = a(1-t^2)$, $y = bt\sqrt{1-t^2}$, $z = ct$, $t \in [-1, 1]$ și $r': x = a\sin^2 u$, $y = \frac{b}{2}\sin 2u$, $z = c\cos u$, $u \in [\pi, 2\pi]$; b) $r: x = t$, $y = t$, $z = 0$, $t \in [0, 1]$ și $r': x = |2u-1|$, $y = |2u-1|$, $z = 0$, $u \in [0, 1]$.

R. Fie drumurile $d_i = (r_i, \Gamma_i)$ date de reprezentările parametrice

$$(1) \qquad r_i: x = f_i(t),\ y = g_i(t),\ z = h_i(t),\ t \in [a_i, b_i] = I_i \quad (i = 1,2).$$

Dacă $d_2 \sim d_1$, fie $\theta = I_1 \to I_2$ difeomorfismul astfel ca $r_2 \cdot \theta = r_1$. *Presupunînd că d_1 e simplu*, dacă d_2 n-ar fi simplu, ar exista 2 valori t' și t'' astfel ca $a_2 \leqslant t' < t'' \leqslant b_2$, $r_2(t') = r_2(t'')$ și cu cel puțin una din egalitățile $a_2 = t'$, $b_2 = t''$ falsă; făcînd o alegere, fie $a_2 < t'$. Atunci avem $a_1 < \theta^{-1}(t') < \theta^{-1}(t'') \leqslant b_1$ și $r_1(\theta^{-1}(t')) = r_1(\theta^{-1}(t''))$ adică d_1 e simplu, contrazicînd ipoteza. *Dacă d_1 e închis*, avem $r_1(a_1) = r_1(b_1)$; cum $\theta(a_1) = a_2$, $\theta(b_1) = b_2$, rezultă $r_2(a_2) = r_2(b_2)$. *Apl.* a) Da; $\theta(u) = \cos u$. b) Nu, deși au ca imagine segmentul de dreaptă cu extremitățile O și $A(1, 1, 0)$; $d = (r, \Gamma)$ e simplu, $d' = (r', \Gamma')$ nu e simplu $\left(\left|2\cdot\frac{1}{4}-1\right| = \left|2\cdot\frac{3}{4}-1\right|\right)$.

2 *Drumurile* d_i $(i = 1, 2)$, date de reprezentările parametrice (1), se numesc *juxtapozabile* dacă $b_1 = a_2$ și $r_1(b_1) = r_2(a_2)$. În acest caz, reuniunea lor: $d = d_1 \cup d_2$ e — prin definiție — drumul $d = (r, \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ dat de

$$(2) \qquad r: x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ t \in [a_1, b_2]$$

unde

$$(2') \qquad f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in I_1 \\ f_2(t), & t \in I_2 \end{cases},\quad g(t) = \begin{cases} g_1(t), & t \in I_1 \\ g_2(t), & t \in I_2 \end{cases},\quad h(t) = \begin{cases} h_1(t), & t \in I_1 \\ h_2(t), & t \in I_2 \end{cases}.$$

Curbele C_1 și C_2 definite de reprezentările parametrice: a) $r_1: x = a$, $y = 0$, $z = -t$, $t \in [-1, 1]$ și $r_2: x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = t/2\pi$, $t \in [0, 2\pi]$; b) $r_1: x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 4\pi]$ și $r_2: x = -t$, $y = 0$, $z = -t$, $t \in [-4\pi, 0]$ sînt juxtapozabile sau nu? În caz afirmativ, să se găsească un drum care aparține curbei $C_1 \cup C_2$.

R. a) Nu, deoarece $r_1(1) = (a, 0, -1) \neq r_2(0) = (a, 0, 0)$. *Obs.* C_2 și C_1 sînt juxtapozabile; căci $r_2(2) = r_1(-1) = (a, 0, 1)$ iar prin schimbarea de parametru $t = \tau - 2\pi - 1$ în r_1 obținem drumul echivalent $d_1' = (r_1', \Gamma_1)$ cu $r_1': x = a$, $y = 0$, $z = 1 + 2\pi - \tau$, $\tau \in [2\pi, 2\pi + 2]$. Drumul d aparține curbei $C_2 \cup C_1$. b) Da. Curba $C_1 \cup C_2$ e închisă și nu e simplă.

3 Fie curba

$$x = \frac{2}{3}f(5^0 t) + \frac{2}{3^2}f(5^3 t) + \frac{2}{3^3}f(5^6 t) + \dots,$$

$$y = \frac{2}{3}f(5^1 t) + \frac{2}{3^2}f(5^4 t) + \frac{2}{3^3}f(5^7 t) + \dots, \text{ cu } f : R \to R \text{ o funcție}$$

$$z = \frac{2}{3}f(5^2 t) + \frac{2}{3^2}f(5^5 t) + \frac{2}{3^3}f(5^8 t) + \dots,$$

continuă, periodică cu perioada 2, definită pe intervalul $[-1, +1]$ prin graficul din fig. 1. Să se arate că această curbă e o curbă continuă, care umple un cub $K = \{(x, y, z) \in R^3 / 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\} \subset R^3$.

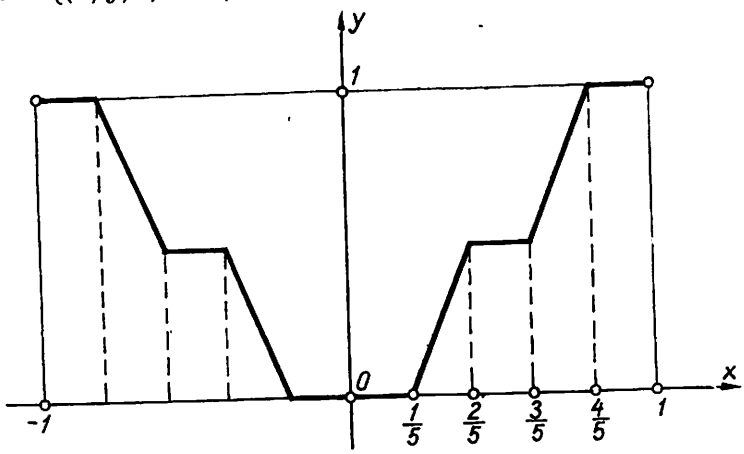


Fig. 1

R. Deoarece $0 \leqslant f(\tau) \leqslant 1$ pentru $\tau \in R$, seriile din membrul al doilea sînt fiecare, majorate de seria numerică convergentă $\sum_n 2/3^n$; deci aceste serii sînt uniform convergente în orice interval finit. Cum termenii acestor serii sînt funcții continue de t atunci $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sînt funcții continue de t și $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant y(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant z(t) \leqslant 1$. Dacă $(x_0, y_0, z_0) \in K$, putem scrie (în baza de numerație 3): $x_0 = a_0/3 + a_3/3^2 + \dots + a_{3n}/3^{n+1} + \dots$, $y_0 = a_1/3 + a_4/3^2 + \dots + a_{3n+1}/3^{n+1} + \dots$, $z_0 = a_2/3 + a_5/3^2 + \dots + a_{3n+2}/3^{n+1} + \dots$, unde a_i sînt 0, 1, 2. Atunci există $t_0 \in (0, 1)$ astfel încît $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$; această valoare e $t_0 = 2a_0/5 + 2a_1/5^2 + \dots + 2a_{k-1}/5^k + \dots$. În adevăr, să calculăm $f(5^k t)$ pentru $k = 0, 1, 2, \dots$ Însă $5^k t$ = număr par $+ 2a_k/5 + 2a_{k+1}/5^2 + \dots$ Dacă $a_k = 0$, atunci $0 \leqslant 2a_k/5 + 2a_{k+1}/5^2 + \dots \leqslant 0 + 2 \cdot 2/5^2 + 2 \cdot 2/5^3 + \dots = 1/5$; deci $f(5^k t_0) = 0$. Dacă $a_k = 1$, atunci $2/5 \leqslant 2a_k/5 + 2a_{k+1}/5^2 + \dots \leqslant 2/5 + 2 \cdot 2/5^2 + 2 \cdot 2/5^3 + \dots = 3/5$; deci $f(5^k t_0) = 1/2$. Dacă $a_k = 2$, atunci $4/5 \leqslant 2a_k/5 + 2a_{k+1}/5^2 + \dots \leqslant 4/5 + 2 \cdot 2/5^2 + 2 \cdot 2/5^3 + \dots = 1$. Așadar, în oricare din cele 3 cazuri: $f(5^k t_0) = a_k/2$; atunci $x(t_0) = a_0/3 + a_3/3^2 + \dots = x_0, \dots, z(t_0) = a_2/3 + a_5/3^2 + \dots = z_0$.

4 Fiecare punct al unei curbe regulate C de clasă C^k $(k \geqslant 1)$ aparține unui arc simplu și regulat pe care una din coordonatele carteziene e un parametru admisibil.

R. Fie C o curbă în spațiu, dată prin ecuațiile parametrice

$$r : x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ t \in I, \tag{3}$$

parametrizarea fiind regulată pe o vecinătate $J \subset I$ a valorii $t_0 \in I$; lui t_0 îi corespunde punctul $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, Γ fiind imaginea lui C. Presupunem — ceea ce e posibil — că în J nu există o altă valoare $t_0' \neq t_0$ astfel ca $r(t_0') = r(t_0)$. Pe J, conform condiției de regularitate

$$f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t) \neq 0 \text{ pentru orice } t \in J, \tag{3'}$$

derivatele $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ nu se pot anula simultan; fie, de exemplu, $f'(t) \neq 0$. Deci aplicația $f_J : J \to X \subset Ox$ e un difeomorfism; atunci

$$x = f(t), \quad t \in J$$

e un parametru admisibil. În condițiile date, există o funcție $\varphi(x)$, egală cu t_0 pentru $x = x_0$ și satisfăcînd ecuația $x = f(\varphi(x))$ în vecinătatea $X = f_J(J)$ a lui x_0. Atunci arcul $C_0 = \{r_J, \Gamma' = r_J(J)\}$ al curbei e dat de ecuațiile

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in X, \tag{4}$$

unde $y(x) = g(\varphi(x))$ și $z(x) = h(\varphi(x))$ sînt funcții regulate de x.

5 Se numește *spirală strîmbă* (simplificat: *spirală*) traiectoria unui punct care parcurge o curbă în spațiu după o anumită lege, cînd curba se mișcă după o altă lege. Fie o dreaptă d care se rotește uniform cu o viteză

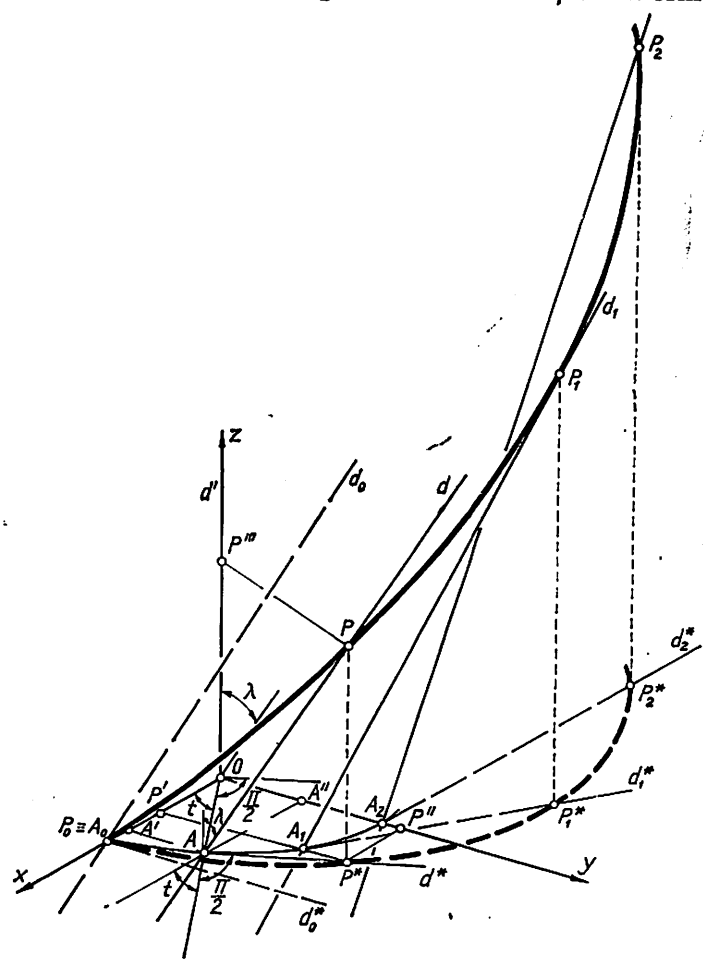


Fig. 2

unghiulară ω în jurul altei drepte d'. Să se afle ecuația spiralei unui punct P care parcurge pe d: a) cu o viteză constantă; b) cu o viteză v proporțională cu distanța parcursă.

R. Luînd $d' = Oz$ și perpendiculara comună lui d și d' ca Ox, avem (fig. 2): $t = \omega\tau$, $v = ds/d\tau$(τ-timpul), $OA = r$, $AP = s$, $AP^* = AP \sin \lambda = s \sin \lambda$, $P^*P = AP \cos \lambda = s \cos \lambda$;

aşadar, deducem $x = OP' = OA' + A'P' = OA\cos t + AP\cos(t + \pi/2)$, $y = OP'' = OA'' + A''P'' = OP\sin t + AP\sin(t + \pi/2)$, $z = OP''' = P^*P$. a) Dacă $v = \text{const}$, cu $v/\omega = k$, $a = k\sin\lambda$, $b = k\cos\lambda$, cum $s = v\tau = kt$, spirala e

$$x = r\cos t - at\sin t,\ y = r\sin t + at\cos t,\ z = bt. \tag{5}$$

Proiecţiile ei pe Oxy e $\rho = at + b$ (o concoidă a spiralei Arhimede). Apar 3 cazuri: α) $\lambda = 0$, $r \neq 0$ ($d_1 \| d'$, d descriind un cilindru de rotaţie); deci $a = 0$, $b = k$, încît obţinem curba numită *elicea circulară* (fig. 3a)

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = kt. \tag{6}$$

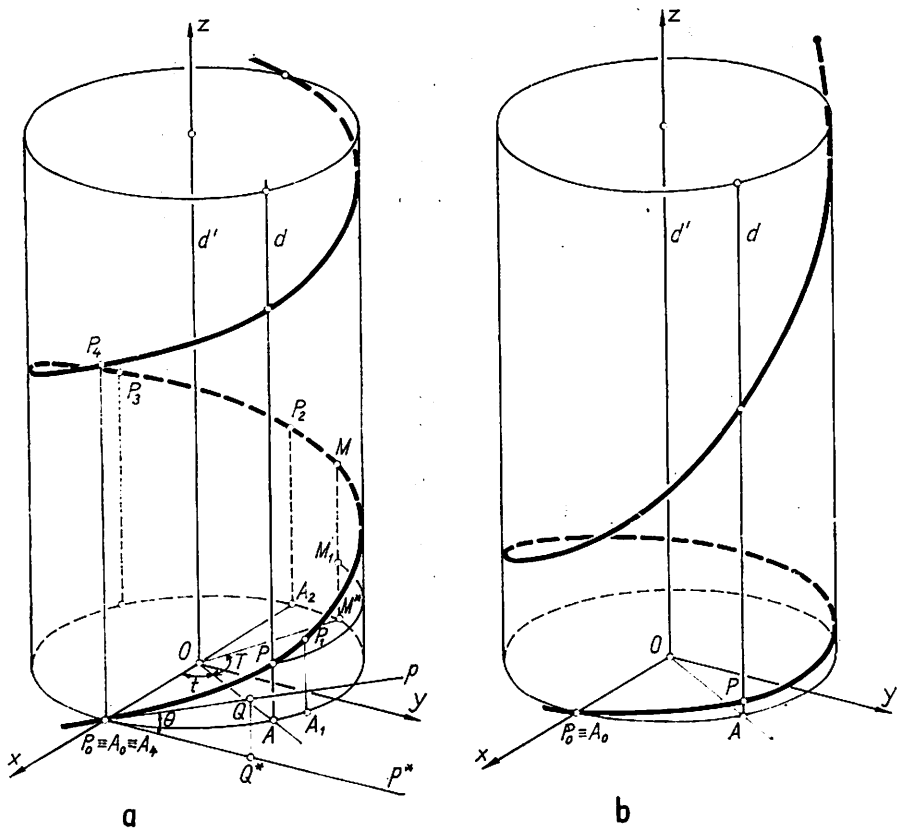


Fig. 3

Ea taie o generatoare oarecare a cilindrului de o infinitate de ori; distanţa dintre 2 poziţii consecutive de pe generatoare, numită *pasul elicei*, e $2k\pi$, arcul de elice avînd aceste poziţii ca extremităţi fiind o *spiră*. Între punctele unei spire şi valorile lui $t \in [t_0, t_0 + 2\pi]$ se poate stabili o bijecţie. Să reprezentăm spira dată de intervalul $[0, 2\pi]$, luînd ca parametru abscisa x. Avem $t = \arccos\dfrac{x}{r}$ cu $t \in [0, \pi]$ şi $t \in [\pi, 2\pi]$; atunci $y = r\sin\left(\arccos\dfrac{x}{r}\right)$, $z = k\arccos\dfrac{x}{r}$ (arcul $A_0P_1P_2$) şi $y = -r\sin\left(\arccos\dfrac{x}{r}\right)$, $z = k\left(\pi + \arccos\dfrac{x}{r}\right)$ (arcul $P_2P_3P_4$). Proiecţia elicei (6) pe Oxy e cercul $x^2 + y^2 = r^2$, iar pe un plan trecînd prin (paralel cu) axa cilindrului e o sinusoidă; de exemplu pe Oyz: $y = r\sin\dfrac{z}{k}$, $x = 0$. Proiecţia centrală pe un plan perpendicular pe axa cilindrului e o spirală hiperbolică, dacă centrul de proiecţie aparţine axei; din $P_0(0, 0, z_0)$: $\rho =$

$= rz_0/(kt - z_0)$, $z = 0$. *Obs.* Dacă σ e lungimea arcului A_0A al cercului de bază al cilindrului, avem $\sigma = rt$; deci: *deplasarea, în lungul generatoarei cilindrului, e proporțională cu lungimea arcului descris de A pe cercul de bază.* Punctul M corespunzător lui $t + T$ îl deducem din P, rotind pe P în jurul axei Oz de un unghi T (arcul $PM_1 = rT$) și deplasînd pe M_1 cu lungimea $M_1M = kT$ paralel cu Oz. Această dublă mișcare imprimată lui P se zice *mișcare (deplasare) elicoidală* și are ca efect alunecarea elicei de-a lungul ei însăși. De altfel, prin mutarea originii în $O_1(0, 0, k\alpha)$ și prin rotația axelor absciselor și ordonatelor în jurul axei O_1z_1 cu unghiul α, ecuațiile (6) devin $x_1 = r\cos t_1$, $y_1 = r\sin t_1$, $z_1 = kt_1$. Dreapta d se poate mișca în 2 sensuri: direct (ca mai sus) sau retrograd. În al doilea caz, P descrie tot o elice circulară, simetrică primei față de Oxz; evident, reprezentarea ei parametrică e

(6′) $$x = r\cos t,\ y = -r\sin t,\ z = kt.$$

Aceste 2 elice nu pot fi puse în coincidență; prima e o elice orientată sinistrorsum, cealaltă fiind orientată dextrorsum. Alte generări: α_1) Fiind dată o dreaptă d într-un plan π, elicea circulară se obține din d cînd π e înfășurat pe un cilindru circular. Căci, fie, în planul π tangent în $A_0(r, 0, 0)$ la cilindrul $x^2 + y^2 = r^2$, dreapta $d: x = r,\ z = my$ ($m = \operatorname{tg}\theta$; v. fig. 3a); avem $A_0P = A_0Q^* = rt$, $AP = Q^*Q = A_0Q^*\operatorname{tg}\theta = mrt = kt$. α_2) E locul descris de un capăt al unui segment de lungime constantă care se rotește uniform în jurul unei axe, în timp ce celălalt capăt alunecă uniform pe această dreaptă.

β) $\lambda \neq 0$, $r = 0$ ($d \cap d' = 0$, prin rotație d descriind un con de rotație), deci $a \neq r$, $r = 0$; făcînd și o rotație de axe în jurul lui Oz de unghi $-\pi/2$, obținem *spirala elicoidalo-conică* (fig. 4a):

(7) $$x = at\cos t,\ y = at\sin t,\ z = bt,\ b^2(x^2 + y^2) = a^2z^2,\ z = b\ \text{arc tg}\ \frac{y}{x}.$$

Proiecția curbei pe planul Oxy e spirala lui Arhimede: $\rho = at$.

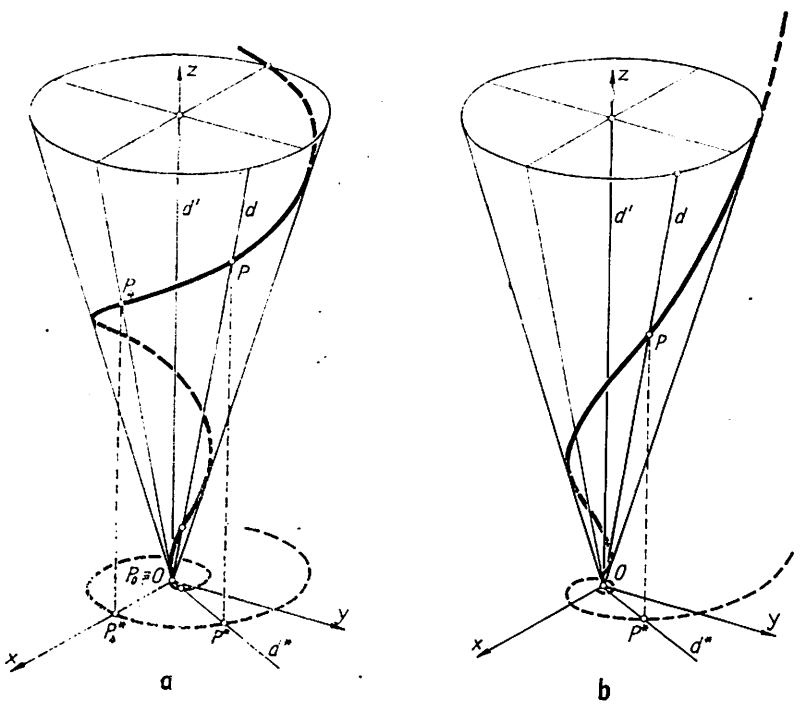


Fig. 4

γ) $\lambda \neq 0$, $r \neq 0$ (d și d' sînt strîmbe între ele, prin rotație d descriind un hiperboloid de rotație cu o pînză); obținem *spirala hiperboloidică* (fig. 5a). b) Dacă $v = ms$, notînd $m/\omega = k$, $a = s_0\sin\lambda$, $b = s_0\cos\lambda$, deoarece $s = s_0e^{mz} = s_0e^{kt}$, obținem *spirala strîmbă* de ecuații

(8) $$x = r\cos t - ae^{kt}\sin t,\ y = r\sin t + ae^{kt}\cos t\ z = be^{kt},$$

proiecția ei pe Oxy e concoida spiralei logaritmice $\rho = ae^{kt} + b$. Apar aceleași 3 cazuri $\alpha - \gamma$).

în cazul β), spirala se numește *elice cilindro-conică* (sin. : *spirală conică*; v. fig. 4b) și, pintr-o rotație de axe în jurul lui Oz de unghi $-\pi/2$, are ecuațiile

$$x = ae^{kt}\cos t,\ y = ae^{kt}\sin t,\ z = be^{kt}; \tag{9}$$

se proiectează în planul Oxy după spirala logaritmică $\rho = ae^{kt}$.

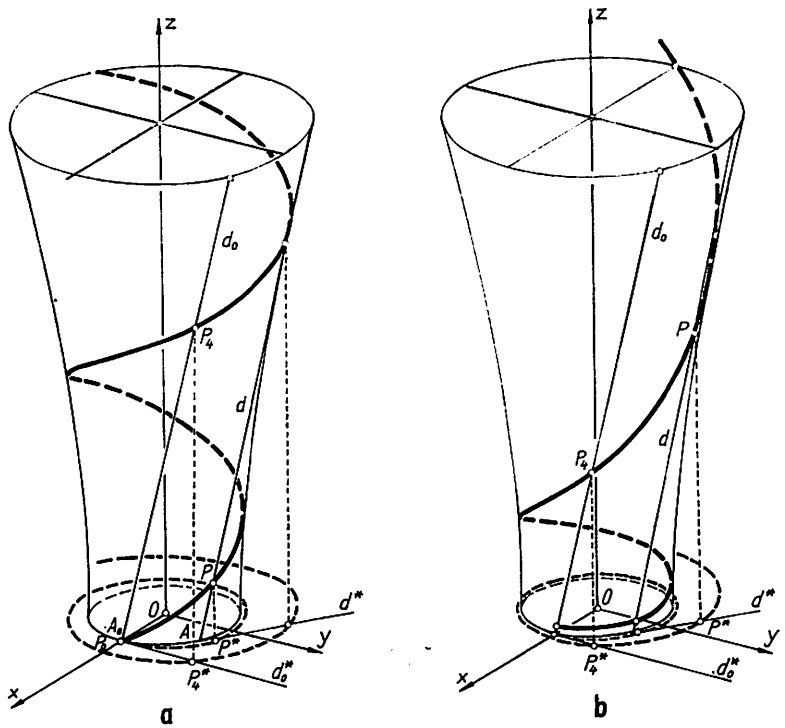


Fig. 5

6 Se numește *curbă bipătratică* curba de intersecție a două cuadrice care nu au o generatoare comună; dacă una dintre cuadricele de intersecție e o sferă, bipătratica e o *analagmatică sferică*. Se cere: a) Să se studieze o astfel de curbă. b) Ce reprezintă proiecția centrală a unei bipătratice, centrul de proiecție fiind pe curbă. c) Să se determine proiecția stereografică a unei analagmatice sferice pe un plan. *Apl.* Fie curba bipătratică obținută ca intersecție a unui elipsoid cu un cilindru eliptic de axe egale și paralele cu 2 dintre semiaxele elipsoidului, tangent interior elipsoidului într-un vîrf. Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

R. a) O curbă bipătratică C e, în general, o cuartică strîmbă. Dacă cuadricele nu sînt tangente, coordonatele lui C se exprimă prin funcții uniforme dublu periodice de un parametru u. Patru puncte $P_i(u_i) \in C$ sînt coplanare dacă $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = c$ (mod. ω_1, ω_2), c fiind o constantă iar ω_1, ω_2 — perioadele. Dacă cele 2 cuadrice sînt tangente într-un punct, C e o curbă unicursală, care are punctul de contact ca punct multiplu (dublu sau de întoarcere). Printr-o bipătratică trec 4 conuri de ordinul al doilea. Dacă C e o analagmatică sferică, ea poate fi considerată, în 4 moduri deosebite, ca înfășurătoare a cercurilor de pe sferă care taie ortogonal un cerc fix al sferei și au centrele pe o conică sferică. Polii inversiunii sînt vîrfurile celor 4 conuri care conțin pe C. b) O cubică plană; dacă C e unicursală, cubica e și ea unicursală. c) O analagmatică plană. *Obs.* Reci-

proc, proiecția stereografică a unei analagmatice plane de gradul 3 sau 4 e o analagmatică sferică. *Apl.* Raportînd elipsoidul la axele sale, obținem

(10) $$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0,\ (x/a)^2 + (y/b)^2 - x/a = 0.$$

Făcînd substituția $x = a\sin^2 t$ sau $x = a\cos^2 t$, rezultă parametrizările

(10′) $$x = a\sin^2 t,\ y = \frac{b}{2}\sin 2t,\ z = c\cos t;\quad x = a\cos^2 t,\ y = \frac{b}{2}\sin 2t,\ z = c\sin t;$$

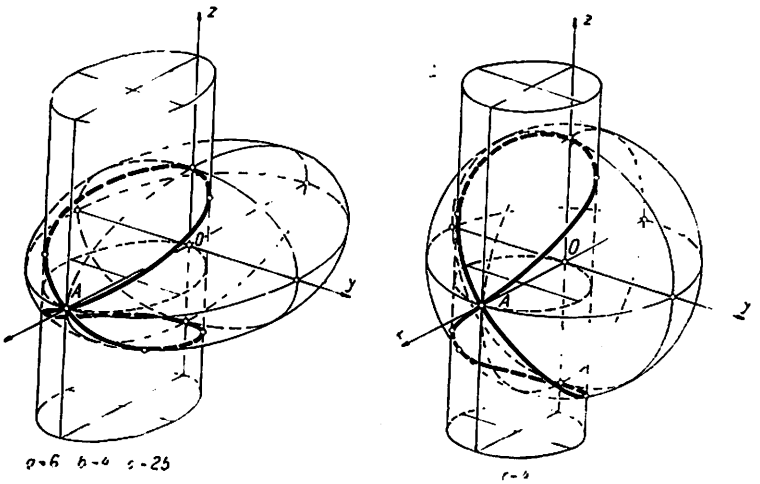


Fig. 6

punînd ec. cilindrului sub forma $4(x - a/2)^2/a^2 + 4y^2/b^2 = 1$, găsim

(10″) $$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t),\ y = \frac{b}{2}\sin t,\ z = c\sin\frac{t}{2}.$$

Luînd $tg\frac{t}{2} = u$, obținem că bipătratica e o curbă unicursală. Dacă $a = b = c$ (cazul intersecției unei sfere cu un cilindru circular avînd diametrul egal cu raza sferei și tangent interior sferei), bipătratica se numește curba *(fereastra) lui Viviani* (fig. 6). În acest caz, luînd ca parametru t longitudinea punctului P de pe sferă, din triunghiurile AP^*O, $P'P^*O$ și PP^*O obținem reprezentarea de tipul (10′).

7 Se numește *curbă ciclică sferică* (simplificat : *ciclică*) intersecția unei sfere cu un con pătratic (de gradul al doilea). Se cere : a) Ecuațiile carteziene (implicite) ale curbei. b) Inversa unei ciclice sferice. c) Să se studieze cazul cînd una din axele de simetrie ale conului trece prin centrul sferei (*lemniscata lui Robers*).

R. a) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + c(z - z_0)^2 = 0$. b) O ciclică sferică, dacă polul nu e pe sferă ; o cuartică bicirculară plană, dacă polul aparține sferei ; o cubică circulară plană, cînd polul e pe curbă. Dacă polul e pe o axă a reperului cartezian și conul e de rotație, inversa ciclicei se numește *cartesiană sferică*. c) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,$(x/\mathrm{tg}\alpha)^2 + \varepsilon(y/\mathrm{tg}\,\beta)^2 = (z - z_0)^2$, conul de vîrf $V(o, o, z_0)$ avînd conica directoare de semiaxe $a = (c - z_0)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $b = (c - z_0)\,\mathrm{tg}\,\beta$ din planul $z = c$, α și β fiind resp. unghiurile cu Oz ale generatoarelor din planele Oxz și Oyz (elipsă : $\varepsilon = 1$, hiperbolă : $\varepsilon = -1$; fig. 7). *Obs.* Dacă $V = 0$ (cînd putem considera numai $\varepsilon = 1$), lemnis-

cata e o *elipsă sferică* (în sens larg). În sens restrîns, elipsa sferică e locul punctelor unei sfere astfel încît suma distanțelor sferice la 2 puncte fixe ale sferei să fie constantă (distanța sferică dintre 2 puncte ale sferei e egală cu lungimea, mai mică decît π, a arcului de cerc mare determinat de cele 2 puncte).

8 Se numește *bicilindrică* cuartica de intersecție a 2 cilindri circulari, de raze respectiv a și b, ale căror axe sînt perpendiculare. Se cere:

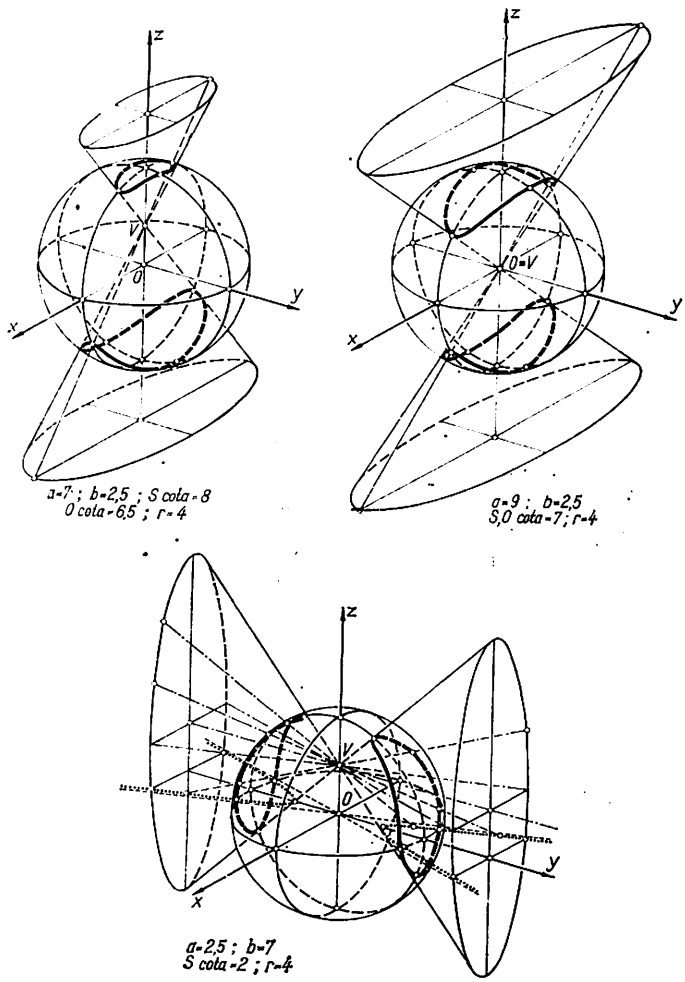


Fig. 7

a) Ecuațiile carteziene; discuție. b) O reprezentare parametrică, atunci cînd axele se taie. c) Curba care se obține în cazul $a = b$.

R. a) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$; sînt 4 cazuri, după cum penetrația e parțială, totală, simplu sau dublu tangențială (fig. 8). b) $x = a \cos t$, $y = \pm\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}$, $z = a \sin t$. c) Două elipse (v. fig. 8d).

9 Se numește *hipopedă* (sin.: *lemniscată sferică*) cuartică de intersecție a unei sfere și a unui cilindru de rotație tangent interior sferei. Se cere:

a) Ecuaţiile carteziene ale curbei. b) O reprezentare parametrică a curbei. c) Proiecţiile curbei pe planele ei de simetrie.

R. a) Fie reperul cartezian ortogonal cu O în centrul sferei şi Oxy perpendicular pe generatoarele cilindrului, Ox conţinînd punctul de tangenţă A între sferă şi cilindru. Ecuaţiile curbei (fig. 9)

(11) $$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad (x - a)^2 + y^2 - (r - a)^2 = 0.$$

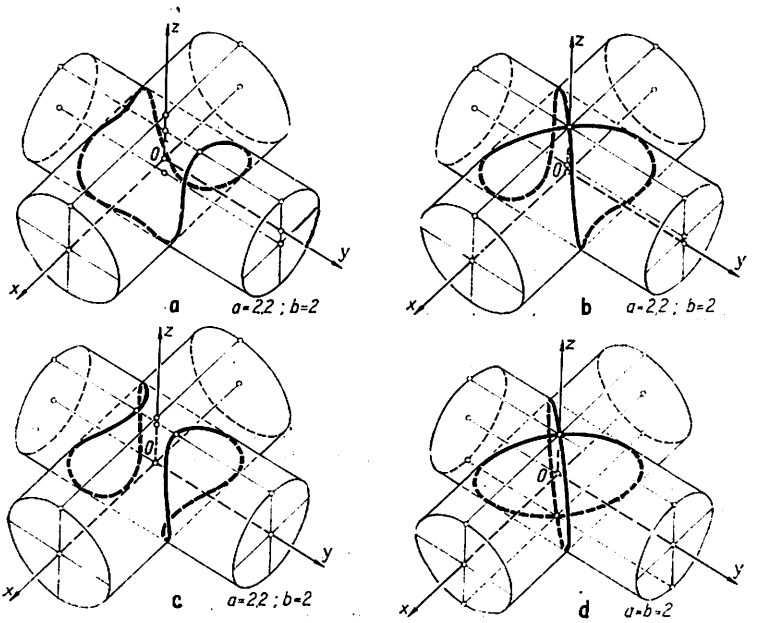


Fig. 8

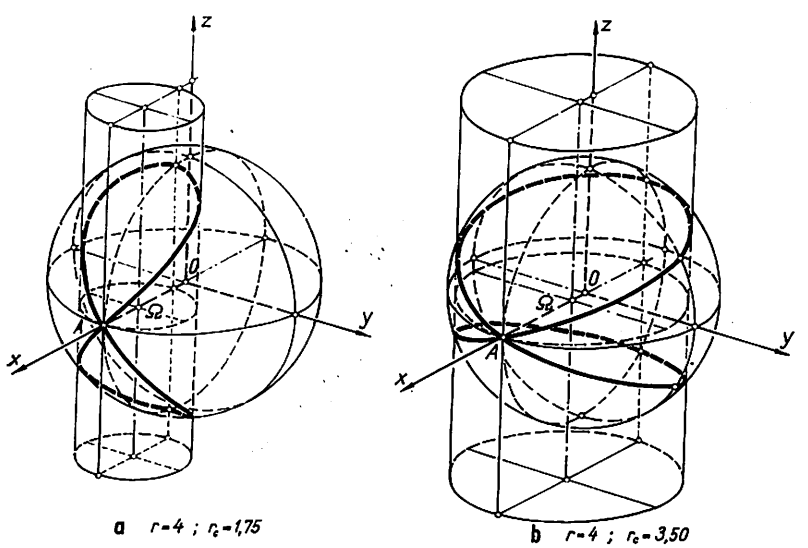


Fig. 9

Curba există dacă $-r<a<r$ și are forma cifrei opt descrisă pe sferă, cu un punct dublu în A și cu 2 vîrfuri în punctele comune sferei și dreptei $x = 2a - r$; dacă $a = r/2$, obținem *fereastra Viviani*. b) Găsim

$$x = r + 2(a - r)\sin^2 t,\ y = 2(a - r)\sin t\cos t,\ z = -2\sqrt{a(r - a)}\sin t. \tag{11'}$$

c) Planele Oxy și Oxz sînt plane de simetrie ale curbei; obținem cercul: $(x - a)^2 + y^2 - (r - a)^2 = 0$, $z = 0$ și parabola: $z^2 = 2a(r - x)$, $y = 0$.

10 Să se arate că ecuațiile

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \tag{12}$$

unde parametrii u, v sînt legați de o relație

$$\Phi(u, v) = 0, \tag{12'}$$

reprezintă o curbă în spațiu Γ.

R. Eliminînd u, v între (12), (12'), obținem ecuațiile implicite ale lui Γ:

$$F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0. \tag{13}$$

Dacă x, y, z sînt funcții raționale de u, v iar Φ e un polinom în u, v, atunci Γ e o *curbă algebrică*; în particular, cînd ecuațiile (12') reprezintă în planul (u, v) o curbă unicursală, Γ se numește *curbă rațională*. Reciproc, existînd drepte paralele care nu taie curba decît într-un punct și alegînd axa Oz paralelă cu ele, prin eliminarea lui z între ecuația (13) obținem un cilindru cu axele paralele cu axa Oz:

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{13'}$$

A doua ecuație care determină pe Γ, deoarece paralele la Oz întîlnesc pe Γ cel mult într-un punct, trebuie să se rezolve în raport cu z:

$$z = z(x, y). \tag{13''}$$

Dacă curba (13) e algebrică, atunci $z(x, y)$ din (13'') e rațională.

11 *Rodoneea sferică de indice n* e curba de pe o sferă dată prin

$$v = nu\ \ (n \in R), \tag{14}$$

u, v fiind longitudinea și colatitudinea unui punct al sferei. Se cere: a) O reprezentare parametrică a curbei. b) Proiecția ortogonală a curbei pe planul ecuatorial Oxy. c) Proiecția centrală a rodoneei din centrul O al sferei pe planul tangent în polul P la sferă.

R. a) Din parametrizarea sferei, ținînd seama de (14), obținem

$$x = a\sin nu\cos u,\ y = a\sin nu\cos u,\ z = a\cos nu. \tag{14'}$$

b) Rodoneea de indice n: $\rho = a\sin nu$. c) Tangentoida polară: $\rho = a\,\mathrm{tg}\,nu$. *Obs.* α) O rodonee sferică e formată din ovale avînd în comun polul P (fig. 10) sau polul diametral opus P'. Fiecare oval are un vîrf și un plan de simetrie. Dacă n e irațional, curba e transcendentă. Dacă n e rațional, cu rba e rațională; în acest caz, numărul ovalelor situate în fiecare din regiunile determinate de Oxy e egal cu numărul ovalelor rodoneei propiecție pe acest plan. β) Pentru $n = 1$ se obține *curba lui Viviani*. Pentru $n = 1/4$, rodoneea sferică se numește *spirala Pappus* și e o curbă algebriee

de grad 10; generare: Traiectoria unui punct P care se mişcă cu o viteză constantă de-a lungul unui cerc mare C al unei sfere S date, în timp ce C se roteşte uniform în jurul unui diametru d al lui S, astfel ca P să parcurgă un sfert din C la o rotaţie completă a lui C în jurul lui d (fig. 11).

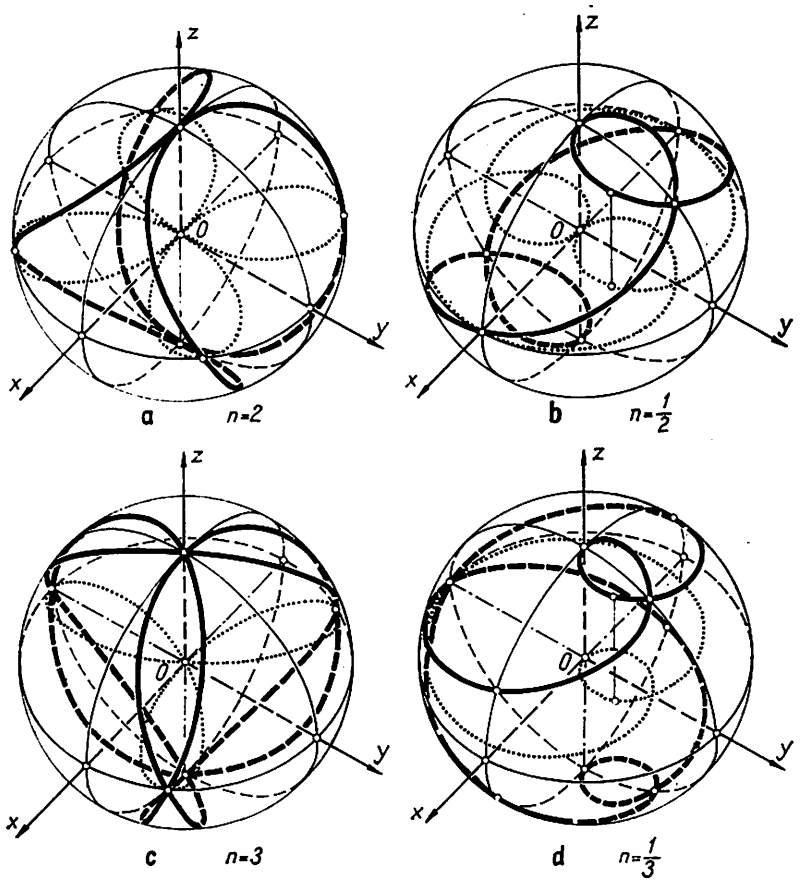


Fig. 10

12 Se numeşte *curbă ciclocilindrică* locul punctelor unui cilindru de rotaţie care sînt situate la o distanţă constantă de un punct fix P_0 al cilindrului. Se cere: a) O reprezentare parametrică a curbei. b) Proiecţia stereografică a curbei pe planul perpendicular generatoarelor cilindrului.

R. Cu $O = P_0$ şi Oz generatoarea cilindrului prin P_0, obţinem

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2by = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Γ e simetrică în raport cu Oxy şi Oyz, fiind formată din 1 sau 2 ramuri închise, după cum $a \lesseqgtr 2b$

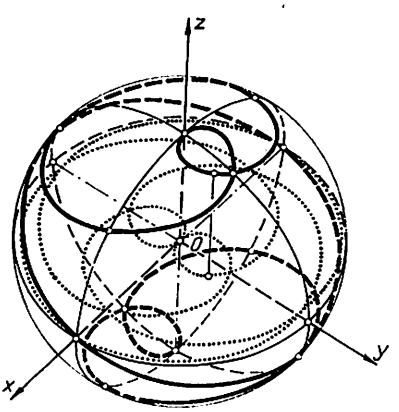


Fig. 11

(fig. 12); dacă $a = 2b$, Γ e *curba Viviani*. a) Folosind o reprezentare parametrică a sferei, ecuațiile lui Γ sînt

$$x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = a\sin u \tag{15'}$$

$$a\cos u = 2b\sin v. \tag{15''}$$

Obs. Desfășurînd cilindrul pe Oxy și cu $O' = (0, b, 0)$, Γ se desfășoară după curba plană $y^2 = a^2 - 4b^2\cos^2\frac{x}{2b}$, $z = 0$.

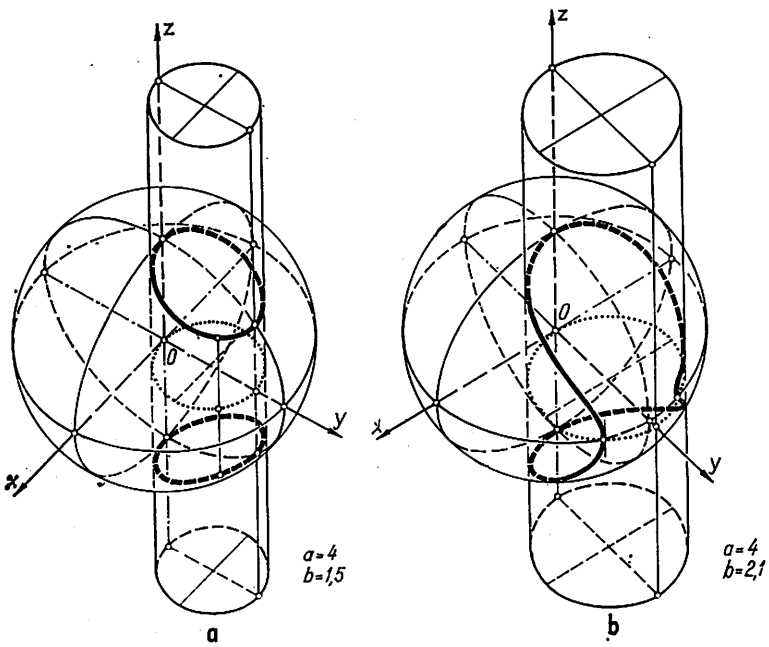


Fig. 12

13 Să se afle proiecțiile pe planele de coordonate ale curbei

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{16}$$

Apl. a) $\bar{r} = (t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k})/(1 + t^4)$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z^2 = r(r - x)$; c) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $y = b\cos t$, $z = b\sin t$.

14 Locul centrelor unui fascicul de cuadrice e o cubică.

R. Centrul unei cuadrice din fasciculul $f + \lambda g = 0$ e dat de $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$, $f_z + \lambda g_z = 0$; rezolvîndu-le în x, y, z, obținem funcții raționale de gradul trei în λ. *Obs.* a) Punctele la infinit ale cubicei corespund centrelor celor 3 paraboloizi din fascicul. b) Cînd cuadricele de bază se taie după 2 conice, locul centrelor e *conica celor nouă puncte*.

15 Să se arate că picioarele normalelor duse dintr-un punct P_0 la o cuadrică (nedegenerată) se găsesc pe o cubică strîmbă, numită *cubica lui Apollonius* relativă la punctul P_0 și cuadrica dată, care cubică trece prin punctul dat, prin centrul cuadricei și prin punctele de la infinit ale axelor.

R. Ecuațiile normalei în $P(x, y, z)$ la cuadrica

$$x^2/A + y^2/B + z^2/C - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad x^2/A + y^2/B = 2z, \tag{17}$$

care trece prin punctul $P_0(\alpha, \beta, \gamma)$, sînt

$$A(\alpha - x)/x = B(\beta - y)/y = C(\gamma - z)/z \quad \text{sau} \quad A(\alpha - x)/x = B(\beta - y)/y = -(\gamma - z);$$

de unde, egalînd cu t şirul de rapoarte, obţinem ecuaţiile cubicei

$$(18) \qquad x = A\alpha/(t + A), y = B\beta/(t + B), z = C\gamma/(t + C) \text{ sau } x = A\alpha/(t + A), y = B\beta/(t + B), z = t + \gamma.$$

Obs. a) Parametrul t e rădăcină a ecuaţiei

$$\frac{A\alpha^2}{(t + A)^2} + \frac{B\beta^2}{(t + B)^2} + \frac{C\gamma^2}{(t + C)^2} - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{A\alpha^2}{(t + A)^2} + \frac{B\beta^2}{(t + B)^2} - 2(t + \gamma) = 0;$$

deci: *Dintr-un punct P_0 se duc 6 sau 5 normale la o cuadrică, după cum cuadrica e cu sau fără centru.* b) Cilindrii proiectanţi fiind

$$(A - B)xy + B\beta x - A\alpha y = 0, \quad (A - C)xz + C\gamma x - A\alpha z = 0, \quad (B - c)yz + C\gamma y - B\beta z = 0$$

sau

$$(A - B)xy + B\beta x - A\alpha y = 0, xz + (A - \gamma)x - A\alpha = 0, yz + (B - \gamma)y - B\beta = 0,$$

se pot obţine ecuaţiile explicite ale cubicei; de exemplu:

$$(18') \qquad y = B\beta x/[(B - A)x + A\alpha], z = C\gamma x/[(C - A)x + A\alpha] \text{ sau } x = A\alpha/(z + A - \gamma), y = B\beta/(z + B - \gamma).$$

c) Conul cu vîrful în P_0 şi avînd cubica lui Apollonius ca directoare e de gradul doi (P_0 e pe cubică, încît un plan prin P_0 o taie în P_1 şi P_2, iar conul după generatoarele P_0P_1 şi P_0P_2); deci: *Normalele din P_0 la o cuadrică sînt pe un con pătratic (teorema lui Chasles).*

16 Fie o cubică strîmbă Γ. Să se arate: a) Cubica se obţine prin intersecţia a 2 cuadrice care au o generatoare comună. b) Orice cubică strîmbă e curbă raţională. c) Toate cubicele strîmbe sînt proiective între ele. d) Γ poate fi generată ca locul punctelor de intersecţie a razelor omoloage în 2 stele omografice. e) O cubică e determinată dacă se dau 6 puncte ale ei. f) Printr-un punct O al spaţiului trece întotdeauna o coardă a cubicei strîmbe Γ.

R. a) Două cuadrice se intersectează, în general, după o *curbă bipătratică*. Dacă cuadricele au o dreaptă comună, ele mai au în comun o *cubică strîmbă*; cînd cuadricele sînt tangente de-a lungul generatoarei comune, cubica e degenerată în acea generatoare comună şi o conică, adică intersecţia cuadricelor e constituită din generatoare (luată de 2 ori) şi o conică (degenerată sau nu). b) O omografie în spaţiu transformă cuartica de intersecţie a 2 cuadrice K_i în cuartica de intersecţie a cuadricelor transformate $K_i'(i = 1, 2)$; în cazul a), transformă cubica strîmbă Γ în cubica strîmbă Γ'. Cuadricele K_i determină un fascicul ce conţine 4 conuri şi, luînd drept cuadrice de bază ale fasciculului 2 din conuri, rezultă că Γ apare ca intersecţie a 2 conuri ce au o generatoare comună. Printr-o transformare proiectivă, putem lua generatoarea ca dreaptă improprie în planul Oxy iar vîrfurile celor 2 conuri în $X_\infty(1, 0, 0)$ şi $Y_\infty(0, 1, 0)$, deci:

$$(19) \qquad \varphi_2(x_3, x_4) + x_1\varphi_1(x_3, x_4) = 0, \ \psi_2(x_3, x_4) + x_2\psi_1(x_3, x_4) = 0,$$

unde φ_2, ψ_2 sînt forme pătratice şi φ_1, ψ_1 forme liniare în x_3, x_4. Ec. (19) ale celor 2 conuri sînt satisfăcute dacă luăm

$$(19') \qquad x_1 = -\rho\varphi_2(1, t)/\varphi_1(1, t), \ x_2 = -\rho\psi_2(1, t)/\psi_1(1, t), x_3 = \rho, \ x_4 = \rho t;$$

această reprezentare exclude generatoarea $x_3 = x_4 = 0$. Luînd $\rho = \varphi_1(1, t)\cdot\psi_1(1, t)$, din (19') obţinem că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt polinoame cel mult de grad trei în t, deci Γ e o curbă raţională. *Obs.* Dacă φ_1 şi ψ_1 sînt proporţionale, conurile sînt tangente de-a lungul generatoarei comune; luînd $\rho = \varphi_1(1, t)$, x_1, x_2, x_3, x_4 sînt polinoame de grad doi în t. În coordonate carteziene neomogene, cubica strîmbă Γ are ecuaţia

$$(20) \qquad x = P_1(t)/P_4(t), y = P_2(t)/P_4(t), z = P_3(t)/P_4(t),$$

unde

(20′) $$P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 \text{ cu } \Delta = |a_i\, b_i\, c_i\, d_i| \neq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dacă $\Delta = 0$, curba e plană. c) În coordonate carteziene omogene, Γ e

(20″) $x_i = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sau $y_1 = \rho t$, $y_2 = \rho t^2$, $y_3 = \rho t^3$, $y_4 = \rho$,

printr-o transformare proiectivă de coordonate

(21) $$x_i = a_i y_4 + b_i y_1 + c_i y_2 + d_i y_3;$$

deci, în coordonate carteziene neomogene, cubica strîmbă are ecuațiile

(22) $$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3 \text{ sau } xz = y^2,\ y = x^2,$$

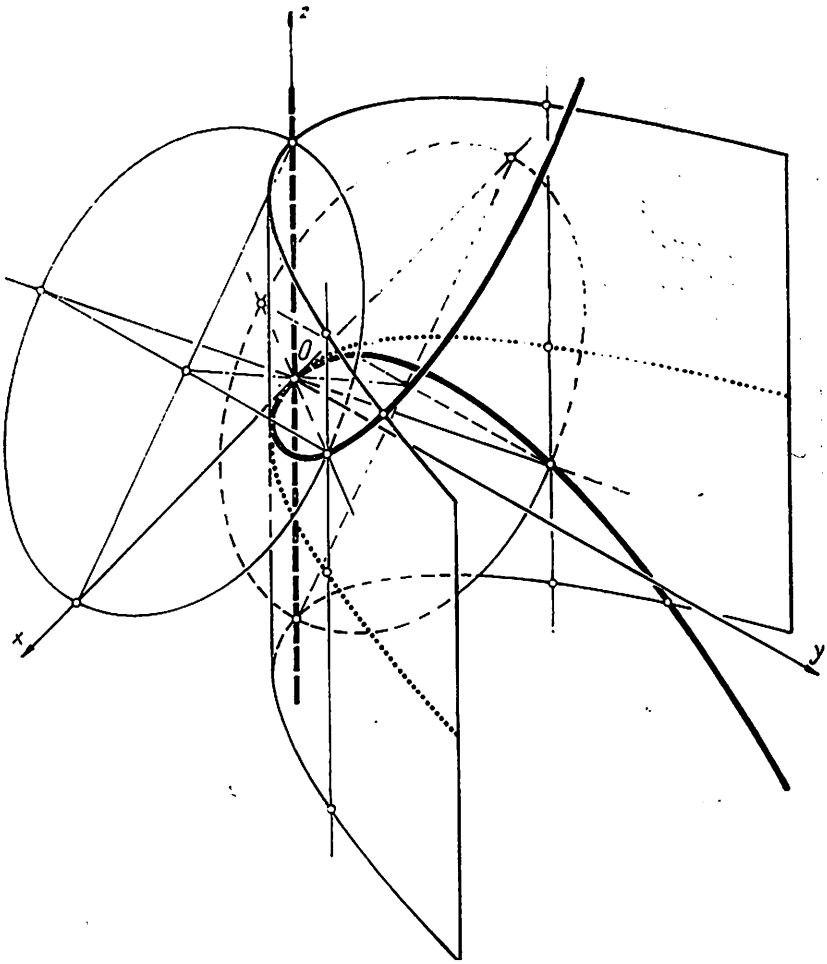


Fig. 13

fiind situată pe 2 conuri cu vîrfurile în O, respectiv $Z_\infty(0, 0, 1)$, și cu Oz generatoare comună (fig. 13). Cubica strîmbă se numește *parabolă cubică* dacă are cele 3 puncte improprii confundate; în acest caz, în (20) avem $P_4(t) = (\alpha + \beta t)^3$. *Obs.* Ecuațiile (22) reprezintă o parabolă cubică. Uneori se consideră parabola cubică de ecuații

(22′) $$x = t/1\,!,\ y = t^2/2\,!,\ z = t^3/3\,!$$

d) Fie 2 stele omografice de centre O şi O'. Fie a dreapta din O care corespunde lui OO' şi b' dreapta din O' care corespunde lui OO'; în general, a şi b' sînt strîmbe între ele. Dacă o dreaptă p întîlneşte omoloaga ei p', rezultă că planului ap prin O îi corespunde planul $O'Op$, deci la plane prin a corespund plane prin $O'O$. Planele prin a descriind un fascicul proiectiv cu fasciculul prin $O'O$, p sînt drepte de intersecţie ale planelor omoloage în 2 fascicule omografice, deci ele sînt pe un con cu centrul în O şi avînd generatoarea OO'. Analog deducem că dreptele p' sînt pe un con cu centrul în O' şi avînd generatoarea $O'O$. Rezultă că punctele de intersecţie P ale razelor care se întîlnesc în 2 stele omografice sînt puncte de intersecţie a 2 conuri care au o generatoare comună; deci, acest loc e o cubică strîmbă trecînd prin O şi O'. Reciproca e adevărată: dacă unim punctele unei cubice cu 2 puncte fixe de pe cubică, se obţin 2 stele omografice. e) Fie A_α ($\alpha = 1, \ldots, 6$) cele 6 puncte; considerînd 2 din ele, fie A_1 şi A_2, ca vîrfuri a 2 stele, celelalte puncte determină o omografie între stele luînd ca drepte omoloage A_1A_i şi A_2A_i ($i = 3, \ldots, 6$). f) Prin 6 puncte trec o infinitate de cuadrice care conţin cubica determinată de aceste puncte. Luînd una din aceste cuadrice, care trece prin O, o generatoare a ei va tăia cuadrica în 2 puncte, deci va fi o coardă a cubicei.

17 Fie curba în spaţiu (20) cu $P_i(t) = a_it^2 + b_it + c_i$ ($i = 1, \ldots, 4$). Se cere: a) Să se arate că această curbă e o conică, fiind o elipsă, hiperbolă sau parabolă după cum $\Delta = b_4^2 - 4a_4c_4 \lessgtr 0$. b) Să se aducă, printr-o transformare omografică de parametru, ecuaţiile conicei la forma canonică.

R. a) Un plan oarecare:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{23}$$

taie curba în 2 puncte corespunzătoare rădăcinilor ecuaţiei

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + Da_4)t^2 + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 + Db_4)t + Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 + Dc_4 = 0. \tag{24}$$

Conica e o elipsă, hiperbolă sau parabolă după cum $P_4(t) = 0$ are rădăcinile imaginare, reale distincte sau confundate. Planul conicei e

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{23'}$$

b) Fie $t = (\alpha\theta + \beta)/(\gamma\theta + \delta)$ cu $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Dacă $\Delta < 0$, putem scrie $P_4(t) = a_4[(t + b_4/2a_4)^2 - \Delta/4a_4^2]$; deci, cu $2a_4t = \theta\sqrt{-\Delta} - b_4$, *elipsa are ecuaţiile canonice*

$$x = \frac{\alpha_1\theta^2 + \beta_1\theta + \gamma_1}{\theta^2 + 1}, \quad y = \frac{\alpha_2\theta^2 + \beta_2\theta + \gamma_2}{\theta^2 + 1}, \quad z = \frac{\alpha_3\theta^2 + \beta_3\theta + \gamma_3}{\theta^2 + 1}. \tag{24}$$

Cu O în Ω ($(\alpha_i + \gamma_i)/2$) cu $i = 1, 2, 3$, obţinem parametrizarea (20) cu $P_i(\theta) = (\alpha_i - \gamma_i)(\theta^2 - 1)/2 + \beta_i\theta$, $P_4(\theta) = \theta^2 + 1$. Schimbînd θ în $-1/\theta$, deducem că Ω e centrul elipsei. Punînd $\theta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, rezultă (20) cu $P_i(\varphi) = \frac{1}{2}(\gamma_i - \alpha_i)\cos\varphi + \beta_i \sin\varphi$, $P_4(\varphi) = 1$. Dacă $\Delta > 0$, prin $t = (\theta t_2 - t_1)/(\theta - 1)$ cu $P_4(t_i) = 0$ ($i = 1, 2$), deducem *ecuaţiile canonice ale hiperbolei*

$$x = (\alpha_1\theta^2 + \beta_1\theta + \gamma_1)/\theta, \quad y = (\alpha_2\theta^2 + \beta_2\theta + \gamma_2)/\theta, \quad z = (\alpha_3\theta^2 + \beta_3\theta + \gamma_3)/\theta. \tag{24'}$$

Translatînd originea în Ω ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$), obţinem (20) cu $P_i(\theta) = \alpha_i\theta^2 + \gamma_i$ $P_4(\theta) = \theta$ ($i = 1, 2, 3$). Schimbînd θ în $-\theta$, deducem că $\Omega = 0$ e centrul hiperbolei. Dacă $\Delta = 0$, prin $t = 1/\theta + t_1$ cu t_1 rădăcină dublă a ecuaţiei $P_4(t) = 0$, *parabola are ecuaţiile canonice*

$$x = \alpha_1\theta^2 + \beta_1\theta + \gamma_1, \quad y = \alpha_2\theta^2 + \beta_2\theta + \gamma_2, \quad z = \alpha_3\theta^2 + \beta_3\theta + \gamma_3. \tag{24''}$$

18 *Lănţişorul sferic* e curba care reprezintă figura de echilibru a unui fir greu, omogen, flexibil şi inextensibil, situat pe o sferă pe care poate

aluneca fără frecare și ale cărei extremități sînt situate în două puncte ale sferei. Să se studieze această curbă.

R. Fie sfera $S(0; a)$; de centru O și rază a; în coordonate cilindrice r, θ, z, lănțișorul sferic e o curbă integrală a ecuației diferențiale $d\theta = \frac{A}{(z^2 - a^2)\,Z}\,dr$, cu $Z = (z-h)^2(a^2 - z^2) - A^2$ și h, A constante. Funcția Z poate fi pusă sub forma $Z = -P(z,\varphi).Q(z,\varphi)$ cu $P(z,\varphi) = z^2 + 2kz\sin^2\varphi + k^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi$, $Q(z,\varphi) = z^2 - 2kz\cos^2\varphi + k^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi$ și $h = k\cos^2 2\varphi$, $A = \frac{1}{2}(a^2 - k^2)\sin^2 2\varphi$. În cazurile $k\sin\varphi = a$ sau $k\cos\varphi = a$, integrarea se poate efectua prin funcții elementare; în orice alt caz, integrarea se efectuează prin funcții eliptice.

19 Să se arate că ecuațiile : a) $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2\cos t$; b) $x = t^3/(t^4 + t^2 + 1)$, $y = t^2/(t^4 + t^2 + 1)$, $z = t/(t^4 + t^2 + 1)$ reprezintă o curbă sferică, iar ecuațiile : c) $x = t^3$, $y = t$, $z = t^{-1}$ sînt ale unei curbe de pe o cuadrică.

20 Să se arate că e plană curba de ecuații : a) $x = (t^2 + 2t)/(t^2 - 3t + 2)$, $y = (t+1)/(t^2 - 3t + 2)$, $z = 1/(t^2 - 3t + 2)$; b) $y = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$, $z = x^3 - 2x^2 + x + 1$; c) $x = t/(t+1)^2$, $y = t^2/(t+1)^2$, $z = (t^2 + 1)/(t+1)^2$; d) $y^2 = 2ax$, $z^2 = 2bx$; e) $x = (1+t)/(1-t)$, $y = 1/(1-t^2)$, $z = t/(1+t)$; f) $x^2 + y^2 = 1$, $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$.

R. a) Elipsă în planul $x - 5y + 7z - 1 = 0$. b) Cubică în planul $x + y - 2z + 5 = 0$. c) Parabolă în planul $2x + z - 1 = 0$. d) Două curbe plane, dacă $ab > 0$; dacă $ab < 0$: originea. e) Hiperbolă în planul $x - 4y - 2z + 3 = 0$. f) Două curbe plane în $z = 0$ și $x + y - z = 0$.

21 Să se determine relația între coeficienții a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ astfel încît curba de ecuații $x = a_1\varphi(t) + b_1\psi(t) + c_1\zeta(t) + d_1$, $y = a_2\varphi(t) + b_2\psi(t) + c_2\zeta(t) + d_2$, $z = a_3\varphi(t) + b_3\psi(t) + c_3\zeta(t) + d_3$ să fie plană. *Apl.* a) $x = 4t^2 + 2t + 3$, $y = 2t^3 + 3t + 4$, $z = 3t^3 + 4t + 2$, b) $y = a_1x + b_1x^n$, $z = a_2x + b_2x^n$.

2. TANGENTA

22 Să se determine punctele de pe curba $x = t + \ln t$, $y = t^2$, $z = 1 - t$ unde tangentele sînt paralele cu planul $12x - y + 14z + 5 = 0$.

R. $\bar{r}' = (1 + 1/t)\,\bar{i} + 2t\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{N} = 12\bar{i} - \bar{j} + 14\bar{k}$; din $\bar{N}\cdot\bar{r}' = 0$ găsim $t_1 = 0$, $t_2 = -3$. Obținem un singur punct $A(2) = (2 + \ln 2,\ 4,\ -1)$.

23 Să se determine tangentele la curba

$$x = t^4/4,\quad y = t^3/3,\quad z = t^2/2 \tag{25}$$

care sînt paralele cu planul $x + 3y + 2z - 7 = 0$.

R. $\bar{N}\cdot\bar{r}' = 0$ cu $t_1 = 0$, $t_2 = -1$ și $t_3 = -2$. $A_1(0) = 0$ e punct singular, căci $\bar{r}'(0) = 0$; în $A_2(-1) = (1/4, -1/3, 1/2)$ și $A_3(-2) = (4, -8/3, 2)$ tangentele sînt, respectiv, $x - 1/4 = -(y + 1/3) = z - 1/2$ și $-(x-4)/4 = (3y+8)/6 = -(z-2)$.

24 Să se determine cel mai mic unghi pe care curba lui Viviani îl face cu axa cilindrului pe care se găsește.

R. Fie (10″) cu $a = b = c$. Cu $\gamma = \widehat{\bar{r}', \bar{k}}$, găsim $\cos^2\gamma = \cos^2 t/(1 + \cos^2 t)$; deci, pentru $t = 0$ ($\gamma = 45°$) și $t = \pi$($\gamma = -45°$), obținîndu-se același punct $A(a, 0, 0)$ — punct dublu pentru curbă.

25 Să se găsească punctele de pe curba : a) $x = \sin t - t\cos t$, $y = \cos t + t\sin t$, $z = t + 1$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 - 1 = 0$ $(r < a < b < c)$; c) $x^2 + y^2 = z$, $y = x^2$ în care tangenta e paralelă cu un plan de coordonate.

R. a) $\bar{r}' \parallel Oxy$ dacă $\bar{r}' \cdot \bar{k} = 0$, care n-admite soluții. $\bar{r}' \parallel Oyz$ $(\bar{r}' \cdot \bar{i} = 0)$ în punctele $t = n\pi$. $\bar{r}' \parallel Oxz$ $(\bar{r}' \cdot \bar{j} = 0)$ pentru $t = (2n + 1)\pi/2$. b) $-(X - x)/a^2(b^2 + c^2)\, yz = (Y - y)/b^2(a^2 + c^2)\, xz = (Z - z)/c^2(a^2 - b^2)\, xy$; tangentele în $(0, \pm b\sqrt{r^2 + c^2}/\sqrt{b^2 + c^2}, \pm c\sqrt{r^2 - b^2}/\sqrt{b^2 + c^2})$ sînt $\parallel Oxy$ și Oxz, iar în $(\pm a\sqrt{r^2 + c^2}/\sqrt{a^2 + c^2}, 0, \pm c\sqrt{r^2 - a^2}/\sqrt{a^2 + c^2})$ sînt $\parallel Oxy$ și Oyz. c) Se ia $t = x$; $\bar{r}' \cdot \bar{i} \neq 0$, iar $\bar{r}' \cdot \bar{k} = 0$ și $\bar{r}' \cdot \bar{j} = 0$ admit pe $t = 0$. Tangenta în $A(0) = 0$ e axa Ox.

26 Să se găsească locul punctelor de intersecție ale planului Oxy cu tangentele la curba : a) $x = a\cos t$, $y = -a\sin t$, $z = be^t$; b) Cubica (22); c) $x = a(\sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - \cos t)$, $z = be^{-t}$; d) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.

27 Se numește *oropteră* cubica strîmbă din intersecția unui paraboloid hiperbolic echilater cu un cilindru de rotație a cărei axă se sprijină pe una din generatoarele paraboloidului care trec prin vîrful său, cealaltă fiind generatoare a cilindrului. Se cere : a) O reprezentare parametrică. b) Proiecția curbei pe planul generatoarelor care trec prin vîrful paraboloidului. c) Locul intersecției tangentelor la oropteră cu planul dus prin vîrful paraboloidului, perpendicular pe generatoarea comună paraboloidului și cilindrului.

R. Luînd cele 2 generatoare ca axe Ox și Oy, obținem (fig. 14)

(26) $$xz = ay,\ x^2 + y^2 = 2bx \text{ sau } x = 2a^2b/(z^2 + a^2),\ y = 2abz/(z^2 + a^2).$$

a) Intersectînd cu planul $y = x\,\mathrm{tg}\,t$, se obține parametrizarea

(26') $$x = 2b\cos^2 t,\ y = b\sin 2t,\ z = a\,\mathrm{tg}\,t\ (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2).$$

b) Pseudoversiera $x(z^2 + a^2) = 2a^2b$, $y = 0$. c) Cardioida $x = 2b\cos^2 t\,(1 + 2\sin^2 t)$, $y = 2b\sin^2 t \sin 2t$, $z = 0$ (concoidă a cercului de rază $r = 1/b$).

28 *Indicatoarea sferică* a unei curbe fiind locul geometric al extremităților versorilor tangentă ai curbei date duși prin originea axelor, să se găsească indicatoarea sferică a curbei : a) Elicea (6); b) $\bar{r} = (2t - \sin 2t)\,\bar{i} + \cos 2t\,\bar{j} + 4\sin t\,\bar{k}$.

R. Indicatoarea sferică a curbei (16) e curba sferică (fig. 15)

(27) $$\bar{R} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\left|\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}\right|}.$$

a) Cercul $(r^2 + k^2)(x^2 + y^2) = r^2$, $z\sqrt{r^2 + k^2} = k$. b) Curba lui Viviani.

29 Se numesc *linii de curent* ale unui cîmp de vectori $\bar{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ curbele care au proprietatea că în fiecare punct al lor vectorul de cîmp corespunzător e tangent la curbă. Să se afle ecuația lor. *Apl.* Liniile de curent ale cîmpului vectorial

(28) $$\bar{v} = (by^n - cz^n)\,\bar{i} + (cz^n - ax^n)\,\bar{j} + (ax^n - by^n)\,\bar{k}$$

sînt curbe plane situate în plane paralele.

R. Fie curba (3). Liniile de curent au ecuațiile diferențiale

(29) $$\mathrm{d}x/v_x = \mathrm{d}y/v_y = \mathrm{d}z/v_z \text{ sau } \varphi(x, y, z) = C_1,\ \psi(x, y, z) = C_2,$$

printr-un punct din spațiu trecînd o singură curbă din familia de curbe integrale (problema Cauchy).

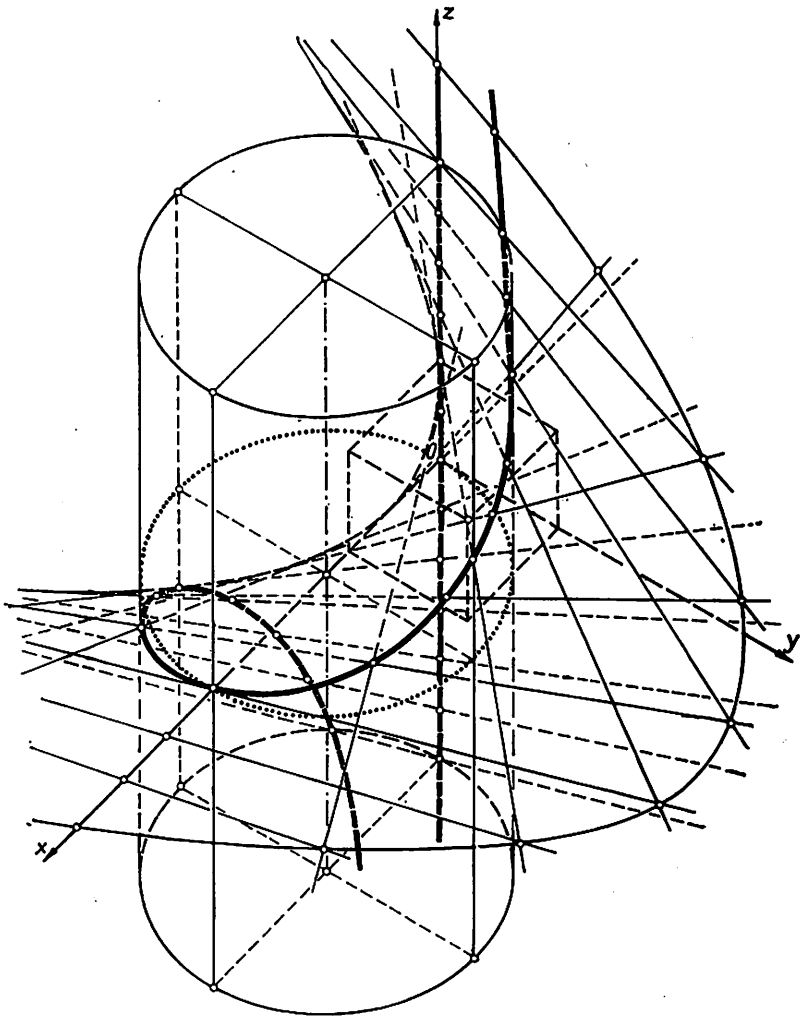


Fig. 14

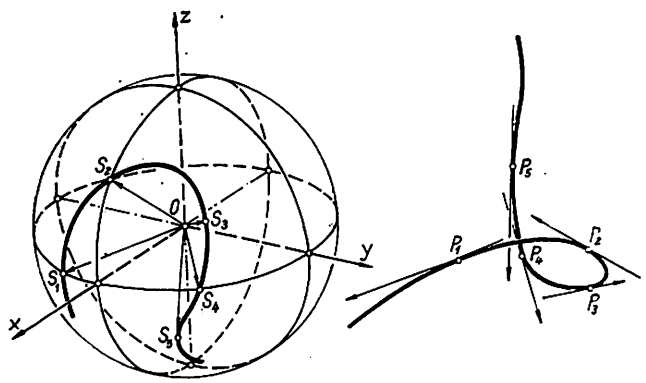


Fig. 15

Apl. $dx + dy + dz = 0$, $ax^n dx + by^n dy + cz^n dz = 0$, deci $x + y + z = C_1$, $ax^{n+1} + by^{n+1} + cz^{n+1} = C_2$.

30 Curba de intersecţie Γ a cilindrului $y^2 + z^2 = a^2$ cu paraboloidul $xy = bz$ taie generatoarele aceleiaşi familii de pe paraboloid sub un unghi drept.

R. $\Gamma: x = b\,\mathrm{tg}\,t$, $y = a\cos t$, $z = a\sin t$ (fig. 16). Generatoarele $x = \lambda b$, $\lambda y = z$, de direcţie $\bar{\rho}(0, 1, \lambda)$; prin $P \in \Gamma$ trece $\lambda = \mathrm{tg}\,t$. În $P: \bar{r}' \cdot \bar{\rho} = 0$.

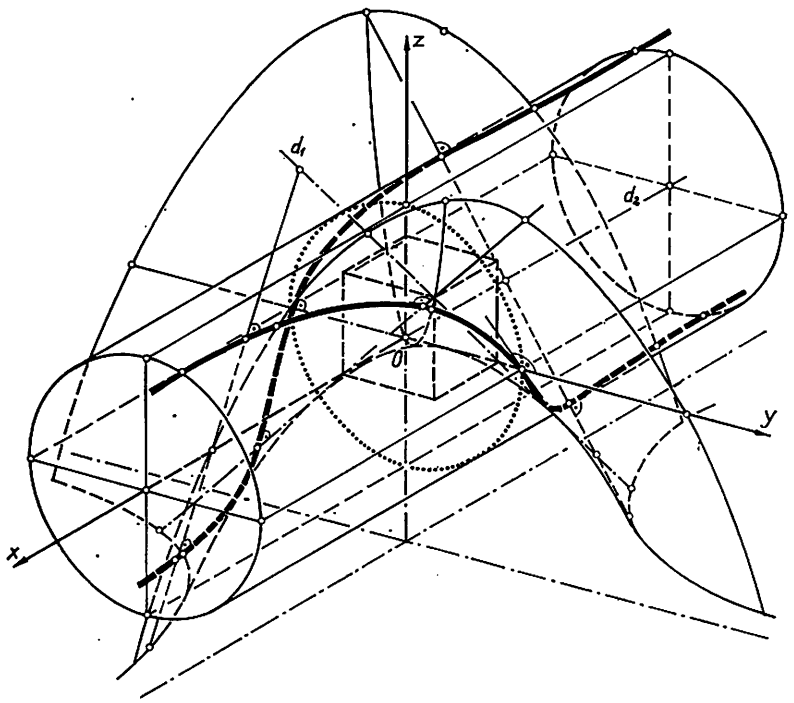


Fig. 16

31 Fie elicea cilindro-conică (9). Se cere: a) Să se arate că tangenta în punctul curent al curbei face un unghi constant cu axa Oz. b) De asemenea, tangenta în punctul curent taie sub un unghi constant generatoarele conului pe care elicea e situată. c) Să se determine constanta k astfel încît acest unghi să fie 30° sau 45°.

R. a) $\cos(\bar{r}', \bar{k}) = bk/\sqrt{a^2(1 + k^2) + b^2k^2} = \text{const.}$ b) Curba e pe conul $b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$. Generatoarea prin $P \in (9)$ are vectorul director $\overrightarrow{OP} = \bar{r}$, $\cos(\bar{r}', \bar{r}) = h\sqrt{a^2 + b^2}/\sqrt{a^2(1 + k^2) + b^2k^2} = \text{const.}$ c) $h = \pm a\sqrt{3}/\sqrt{a^2 + b^2}$; $h = \pm a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

32 Să se găsească în ce caz tangentele la curba (5) fac un unghi constant cu o direcţie fixă.

33 În anumite condiţii, tangenta în orice punct al cubicei

$$x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3 \tag{30}$$

formează un unghi constant cu o anumită direcţie.

R. Fie $\bar{\rho}(1, u, v)$ vectorul director al direcției fixe. Atunci, pentru ca $\widehat{\bar{r}', \bar{\rho}}$ să fie independent de t, trebuie ca fracția $(3cvt^2 + 2but + a)^2/(9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2)$ să nu depindă de t; este suficient să avem $u = 0$, $uv = 0$, $v^2 = (2b^2u^2 + 3acv)/2b^2 = 1$, adică $u = 0$, $v^2 = 1$, $2b^2 = \pm 3ac$. Deci $\bar{\rho}(1, 0, 1)$ cu $2b^2 = 3ac$ și $\bar{\rho}(1, 0, -1)$ cu $2b^2 = -3ac$. *Ex.*: a) $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$; b) cubica (22′).

34 Curbele de pe o suprafață de rotație S care taie meridianele lui S sub un unghi constant se numesc *loxodromele suprafeței* S (fig. 17). Se cere :

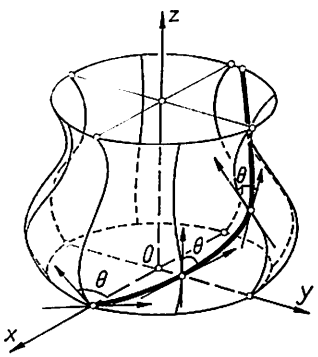


Fig. 17

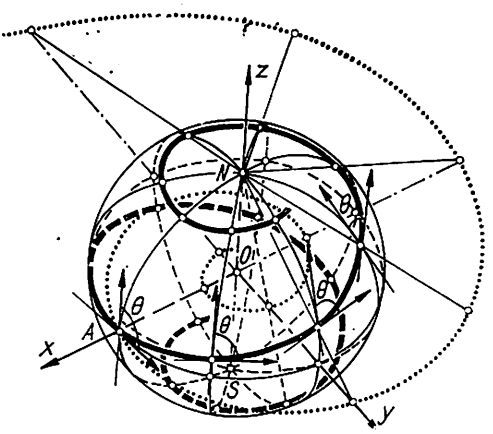


Fig. 18

a) Să se determine loxodromele unei sfere, numite *loxodrome sferice* (sin. : *loxodromie*). Să se arate că loxodromele unui con de rotație sînt elice cilindro-conice.

R. Fie sfera (φ — longitudinea, θ — colatitudinea)

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta; \tag{31}$$

curbele $\varphi = \text{const.}$ sînt meridiane, iar curba $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ e o loxodromie. Unghiul V format de meridian și loxodromie e dat de

$$\cos V = \theta'/\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\,\varphi'^2}, \text{ adică } d\varphi = \pm \operatorname{tg} V d\theta/\sin\theta; \tag{32}$$

de unde, cu $\pm \operatorname{ctg} V = h$, obținem loxodromele sferice (fig. 18)

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = Ce^{h\varphi} \quad (C \text{ — constantă de integrare}), \tag{32′}$$

cei doi poli, N și S, fiind puncte asimptotice. Aceste curbe nu sînt elice. Proiecția stereografică dintr-un pol pe planul ecuatorial păstrînd unghiul a 2 curbe iar meridianele prin $P \in (31)$ transformîndu-se în drepte care trec prin O, loxodromele sferice se transformă în curbe care taie sub un unghi constant fasciculul de drepte de centru O, adică în spirale logaritmice. Proiecția ortogonală a unei loxodrome pe planul ecuatorial e o spirală Poinsot. Astfel, loxodroma care conține punctul $A(r, 0, 0)$: $h\varphi = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, în proiecția stereografică din N, se transformă în spirala logaritmică $\rho = re^{h\varphi}$ și se proiectează ortogonal pe planul ecuatorial în spirala Poinsot $\rho = r/\operatorname{ch} h\varphi$. *Obs.* Putem folosi latitudinea $\lambda = \pi/2 - \theta$. b) Fie conul $x = v \sin\alpha \cos u$, $y = v \sin\alpha \sin u$, $z = v \cos\alpha$ (fig. 19). Găsim $v = Ce^{u \sin\alpha \operatorname{ctg}\theta}$; luînd $a = C \sin\alpha$, $b = C \cos\alpha$, $k = \sin\alpha \operatorname{ctg}\theta$, obținem (9). *Obs.* b_1) $\cos \widehat{(\bar{r}', \bar{k})} = \cos\alpha \cos\theta$. b_2) Unghiul dintre tangenta proiecției pe Oxy (spirală logaritmică) și raza vectoare e dat de $\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}\theta/\sin\alpha$. Reciproc, dacă o curbă a conului se proiectează ortogonal pe un plan perpendicular pe axa conului după o spirală logaritmică, ea e o loxodromă.

b_3) Punctele de intersecție ale tangentelor la elice cu Oxy sînt situate pe o spirală logaritmică, tangentele în punctele corespondente fiind perpendiculare.

35 Dacă o curbă în spațiu e plană, tangenta în orice punct al curbei se găsește în planul curbei.

R. Curba (3) e plană dacă $Af(t) + Bg(t) + Ch(t) + D = 0$ pentru orice $t \in I$. Prin derivare: $Af'(t) + Bg'(t) + Ch'(t) = 0$, adică tangenta $\bar{r}'(f', g', h')$ și normala la plan $\bar{N}(A, B, C)$ sînt ortogonale (fig. 20).

36 O curbă netedă admite tangentă staționară în fiecare punct al ei dacă și numai dacă e o dreaptă.

R. Punctul $P(t) \in (3)$ e staționar dacă

$$d^2x/dx = d^2y/dy = d^2z/dz, \quad \text{adică} \quad \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = 0. \tag{33}$$

Fie o dreaptă de ecuații

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt. \tag{34}$$

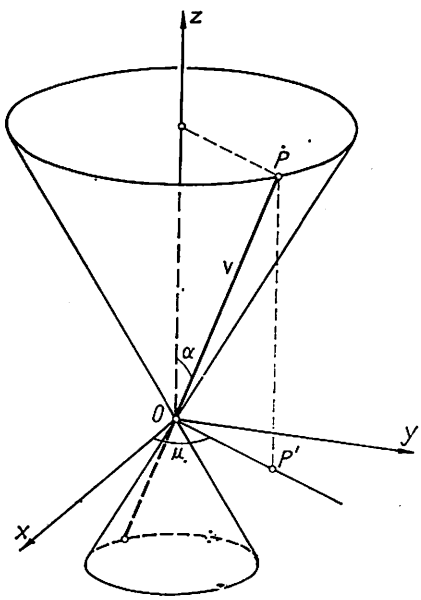


Fig. 19

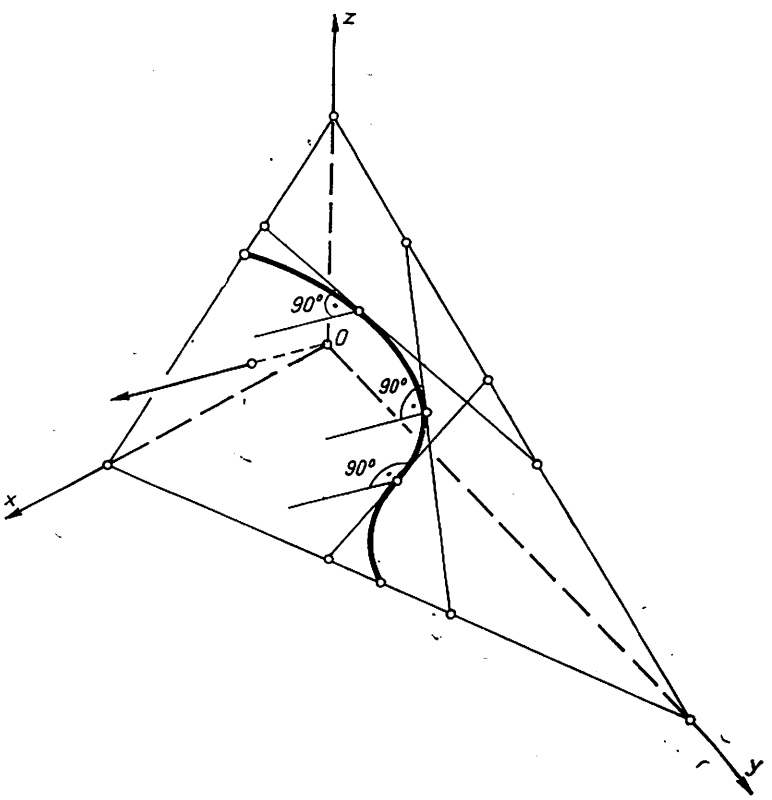


Fig. 20

Condițiile (33) sînt îndeplinite. Reciproc, în cazul (3'), fie $dx \neq 0$; din (33):

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad d\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \qquad \text{adică } y = a_1x + a_0, \quad z = b_1x + b_0.$$

37 Să se arate că proprietatea unei tangente de a fi staționară e invariantă față de o transformare de coordonate carteziene ale spațiului, cît și față de o transformare de parametru.

R. Fie transformarea de coordonate carteziene $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}^*$ ($\bar{r} = \overline{OP}$, $\bar{r}^* = \overline{O^*P}$ și $\bar{r}_0 = \overline{OO^*}$); $\bar{r}_0$ fiind constant, avem $\dfrac{d^\alpha \bar{r}}{dt^\alpha} = \dfrac{d^\alpha \bar{r}^*}{dt^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$). Fie transformarea de parametru $t = t(\tau)$ cu $\dfrac{dt}{d\tau} \neq 0$ în $P(t)$; deducem $\dfrac{d\bar{r}}{d\tau} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{d\tau^2} = \left(\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)\left(\dfrac{dt}{d\tau}\right)^3 = 0.$

38 Să se studieze forma curbei în vecinătatea unui punct al ei. *Apl.* Să se afle punctele singulare ale curbelor (10') și (25).

R. Fie $P_0(t_0)$ și $P(t)$ pe curba (16). Dacă P_0 e un *punct ordinar*, fie

(35) $\bar{r}_0' \neq 0$, $\bar{r}_0' \times \bar{r}_0^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), $\bar{r}_0' \times \bar{r}_0^{(m+1)} \neq 0$, deci $\bar{r}_0^{(i)} = \lambda_i \bar{r}_0'$.

Avem $\overline{P_0P} = (t - t_0)(1 + \eta)\bar{r}_0' + \dfrac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}(\bar{r}_0^{(m+1)} + \varepsilon) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ cu $\eta = \sum_{i=2}^{m} \dfrac{(t-t_0)^{i-1}}{i!}\lambda_i \to 0$ și $\bar{\varepsilon} \to 0$ cînd $t \to t_0$, iar $\bar{a} = (1 + \eta)\bar{r}_0'$, $\bar{b} = \bar{r}_0^{(m+1)} + \bar{\varepsilon}$ și $\bar{\alpha} = (t - t_0)\bar{a}$, $\bar{\beta} = \dfrac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}\bar{b}$. Sensurile lui $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$ depind de poziția lui t față de t_0, iar $\bar{\beta}$ depinde și de partitatea lui m. Astfel, $\bar{\alpha} = k\bar{a}$ cu $k \lesseqgtr 0$ după cum $t \lesseqgtr t_0$. Fie π un plan care trece prin $\bar{r}_0'$ și nu conține pe $\bar{r}_0^{(m+1)}$ și pe $\bar{b}$, iar σ = plan $(\bar{r}_0', \bar{r}_0^{(m+1)})$ și σ_ε = plan $(\bar{r}_0^{(m+1)}, \bar{b})$. Avem cazurile: I) *m impar* (fig. 21); cînd $t \lesseqgtr t_0$: $\bar{\beta} = k^2\bar{b}$, adică se găsește față de π în aceeași regiune în care se află $\bar{r}_0^{(m+1)}$. Deci, cînd

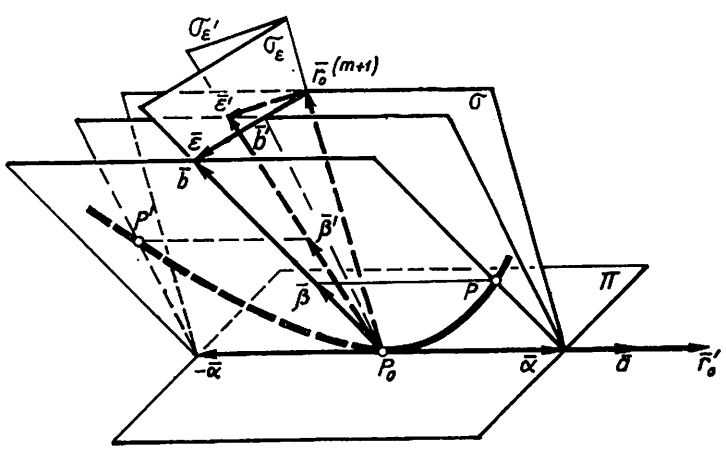


Fig. 21

$t \in [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon]$, arcul descris de P e situat de aceeași parte a planelor π și σ, cu concavitatea îndreptată spre $\bar{r}_0^{(m+1)}$, fiind de o parte și de alta a planului σ_ε; P_0 e un *punct de ondulație* cînd $m \geqslant 2$. II) *m par* (fig. 22); după cum $t \lesseqgtr t_0$: $\bar{\beta} = k\bar{b}$ cu $k \lesseqgtr 0$. Deci, față de π și σ, arcul descris de P e de aceeași parte cînd $t \in [t_0 - \varepsilon'; t_0)$ și de cealaltă parte cînd

$t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$, traversînd tangenta în P_0 (și planele π și σ) cînd $t = t_0$; P_0 e un *punct de inflexiune*. Dacă $m \geqslant 2$, P_0 se numește *punct staționar* (sin.: *punct cu tangentă staționară*) *de ordin m*; ele corespund rădăcinilor t ale ecuației

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = 0. \tag{35'}$$

Să considerăm unele *puncte singulare*. P_0 e un *punct* (p, q)*—multiplu* dacă

$$\bar{r}_0^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \quad \bar{r}_0^{(p)} \neq 0, \quad \bar{r}_0^{(p)} \times \bar{r}_0^{(\alpha)} = 0 (\alpha = p+1, \ldots, q-1),$$
$$\bar{r}_0^{(p)} \times \bar{r}_0^{(q)} \neq 0, \quad \text{deci} \quad \bar{r}_0^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \bar{r}_0^{(p)}. \tag{35''}$$

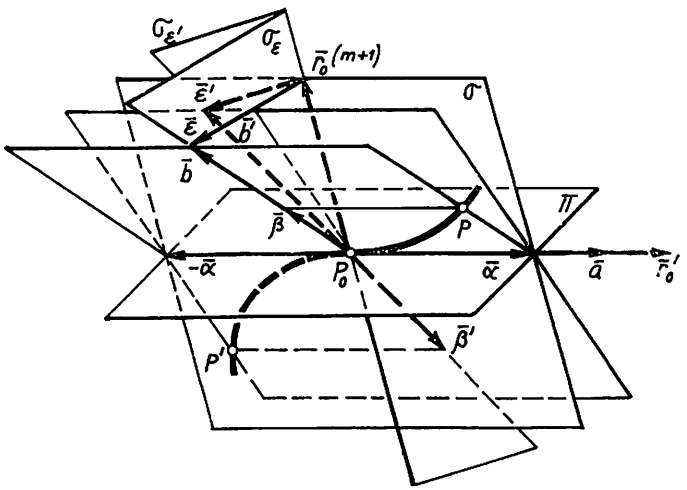


Fig. 22

Avem $\overline{P_0P} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}(1+\eta)\bar{r}_0^{(p)} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}(\bar{r}_0^{(q)} + \varepsilon) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ cu $\eta = \sum_{\alpha=p+1}^{q-1} \frac{p!(t-t_0)^{\alpha-p}}{\alpha!}\lambda_\alpha \to 0$ și $\bar{\varepsilon} \to 0$ cînd $t \to t_0$, iar $\bar{a} = (1+\eta)\bar{r}_0^{(p)}$, $\bar{b} = \bar{r}_0^{(q)} + \bar{\varepsilon}$ și $\bar{\alpha} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\bar{a}$, $\bar{\beta} = \frac{(t-t_0)^q}{q!}\bar{b}$.

Vectorul $\frac{p!}{(t-t_0)^p}(\bar{r} - \bar{r}_0)$ fiind coliniar cu $\bar{r} - \bar{r}_0 = \overline{P_0P}$, deducem că secanta P_0P are o limită determinată (cînd $P \to P_0$): *e tangenta în* P_0 *la* C, *de vector director* $\bar{r}_0^{(p)}$:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{r}_0^{(p)} = 0, \text{ adică } \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \bar{r}_0^{(p)}. \tag{35'''}$$

Sensurile vectorilor $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$ depind de parităților lui p și q. Notăm prin $\pi^\pm$ semiplanul conținînd $\bar{r}_0^{(p)}$ sau $-\bar{r}_0^{(p)}$, prin σ_ε^+ = semiplan $(\bar{r}_0^{(q)}, \bar{b})$ și prin σ_ε^- = semiplan $(-\bar{r}_0^{(q)}, -\bar{b})$. Avem cazurile: I) *p par, q impar.* $\bar{\alpha} = k^2\bar{r}_0^{(p)}$ și $\bar{\beta} = h\bar{b}$ cu $h \lesseqgtr 0$, după cum $t \lesseqgtr t_0$; rezultă: arcul $P'P_0$ din unghiul diedru $(\pi^+, \sigma_\varepsilon^-)$ cînd $t \in [t_0 - \varepsilon', t_0)$ și arcul P_0P din unghiul diedru $(\pi^+, \sigma_\varepsilon^+)$ cînd $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$, tangente în P_0 lui $\bar{r}_0^{(p)}$. Deci P_0 e un *punct de întoarcere de prima speță* (fig. 23). II) *p și q pare.* $\bar{\alpha} = k^2\bar{a}$ și $\bar{\beta} = h^2\bar{b}$, încît P e situat în unghiul diedru $(\pi^+, \sigma_\varepsilon^+)$. Deci obținem arcul $P'P_0$ cînd $t \in [t_0 - \varepsilon', t_0)$ și arcul P_0P cînd $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$, tangente în P_0 lui $\bar{r}_0^{(p)}$; P_0 e un *punct de întoarcere de speța a doua* (fig. 24). III) *p par, q impar.* $\bar{\alpha} = k\bar{a}$ cu $k \lesseqgtr 0$ și $\bar{\beta} = h^2\bar{b}$, după cum $t \lesseqgtr t_0$; P_0 e un *punct de ondulație*. IV) *p și q impare.* $\bar{\alpha} = k\bar{a}$ cu $k \lesseqgtr 0$ și $\bar{\beta} = h\bar{b}$ cu $h \lesseqgtr 0$, după cum $t \lesseqgtr t_0$; P_0 e un punct de inflexiune. *Obs.* Pentru p impar, P_0 e un *punct singular aparent* (al reprezentării parametrice); de fapt, e un punct ordinar cu tangentă staționară.

Se zice că P_0 e un *punct multiplu de ordin m* dacă

$$(35^{IV}) \qquad \bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2) = \ldots = \bar{r}(t_m),\ \bar{r}'(t_i) \neq 0 \text{ cu } t_1 < t_2 < \ldots < t_m;$$

în acest caz, prin P_0 trec m arce regulate ale curbei. Pentru $m = 2, 3, 4, \ldots$, P_0 e un *punct dublu, triplu, quadruplu, ...* *Obs.* Rezultatele cuprind și cazul plan, cînd planele $(\bar{r}_0^{(p)}, (\bar{r}_0^{(q)})$ și $(\bar{r}_0^{(p)}, \bar{b})$ coincid. *Apl.* Curba (10′) are un punct dublu $P_1(t_1 = 0) = P_2(t_2 = 2) = (0, 0, c)$. Punctul $P_0(t = 0) = 0 \in (25)$ e punct (2, 3) — multiplu.

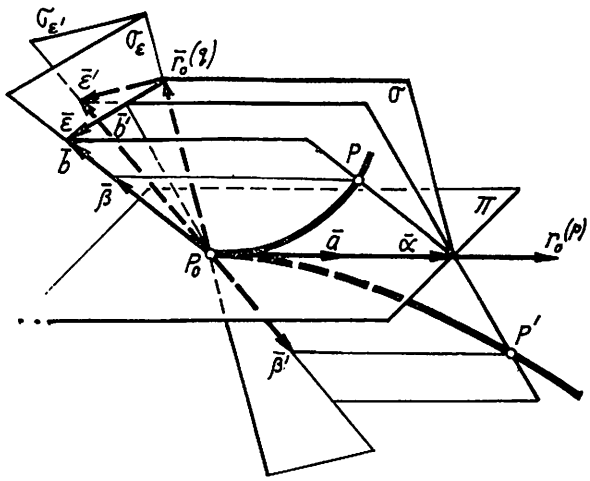


Fig. 23

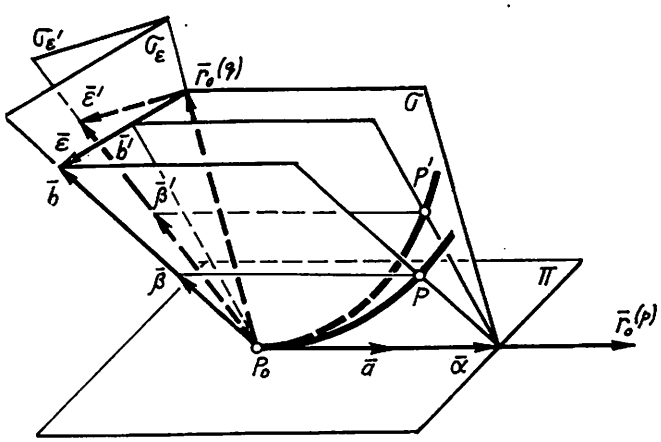


Fig. 24

3. LUNGIMEA UNUI ARC DE CURBĂ

39 Să se calculeze lungimea arcului curbei : a) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t^2/2$; b) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$; c) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t^2/2$; d) $x = t \cos 2t$, $y = t \sin 2t$, $z = \frac{4}{3} t^{3/2}$; e) $z = x^2$, $y^2 = 2xz$; f) $\bar{r} = e^{at}(\cos t\bar{i} +$

$+ \sin t\bar{j}) + (e^{at} - 1)\bar{k}$, de la punctul unde intersectează planul Oxy la punctul curent. De asemenea, să se găsească lungimea arcului curbei: g) $x = at$, $y = a\sqrt{2}\ln t$, $z = a/t$ determinat de valorile $t = 1$ şi $t = 10$.

R. În fiecare caz, punctul din Oxy corespunde lui $t = 0$. a) $2s = t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})$. b) $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$. c) $2\sqrt{2}\,s = t\sqrt{2(1+2t^2)} + \ln(t\sqrt{2} + \sqrt{1+2t^2})$. d) $s = t + t^3$. e) Se ia $x = t$; $256\,s = |4\sqrt{2}\,(16t+9)\sqrt{8t^2+9t+2} - 17\ln(16t + 9 + 4\sqrt{2}\sqrt{8t^2+9t+2})|_0^t$. f) $as = (e^{at} - 1)\sqrt{1+2a^2}$. g) $s = 9,9a$.

40 Fiind dată curba în spaţiu: a) $x = (t+2)/(t^2+1)$, $y = 2(t-1)/(t^2+1)$, $z = (2t+1)/(t^2+1)$, să se determine lungimea arcului cuprins între punctele de pe curbă situate la distanţe extreme de originea reperului de axe. De asemenea, se cere să se calculeze lungimea unei bucle a curbei: b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\frac{t}{2}$; c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\sin\frac{t}{2}$ extremităţile buclei fiind în planul Oxz.

R. a) $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9/(t^2+1)$ e minim pentru $t = \infty$ şi maxim pentru $t = 0$; acestor valori le corespund punctele O şi A (2, − 2, 1). Deci $s = 3/2$. *Obs.* Curba e o elipsă în planul $2x + y - 2z = 0$. În cazurile b) şi c), proiecţia curbei pe Oxy e o cicloidă, o buclă proiectîndu-se după o arcadă a cicloidei; deci $t \in [0, 2\pi]$. Găsim: b) $s = 8a\sqrt{2}$; c) $s = 4a\pi$.

41 Să se studieze rectificarea rodoneei sferice.

R. Din (14′), deducem $ds = \frac{a\sqrt{1+n^2}}{n}\sqrt{1 - \frac{1}{1+n^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi$ cu $nu = \frac{\pi}{2} + \varphi$; rectificarea se efectuează cu ajutorul integralelor eliptice.

42 Să se găsească lungimea curbei închise

(35) $$x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t,\quad z = a\cos 2t.$$

43 Să se găsească lungimea arcului curbei $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$ cuprins între planele $3y = a$ şi $y = 9a$. De asemenea, să se scrie ecuaţiile tangentelor în extremităţile arcului considerat.

R. Se ia $x = t$; $s = \frac{1}{2a^2}\int_a^{3a}\frac{a^4 + 2x^4}{x^2}\,dx = 9a$. Tangenta în $A_1\left(a, \frac{a}{3}, \frac{a}{2}\right)$: $\frac{x-1}{1} = \frac{3y-a}{3} = \frac{4z-2a}{-1}$ şi în $A_2\left(3a, 9a, \frac{a}{6}\right)$: $\frac{x-3a}{3} = \frac{y-9a}{27} = \frac{6z-a}{-1}$.

44 Să se afle expresia elementului de arc al unei curbe în spaţiu dată: a) prin ecuaţiile implicite (13); b) în coordonate cilindrice; c) în coordonate sferice. *Apl.* a) Să se calculeze lungimea arcului curbei $x^3 = a^2y$, $6xz = a^2$ cuprins între planele $6z = a$ şi $3z = a$. b) Să se arate că arcul loxodromiei, cuprins între 2 puncte de pe sferă, e proporţional cu diferenţa latitudinilor celor 2 puncte.

R. a) Notînd $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$, avem şirul de rapoarte egale:

(36) $$\frac{dx}{\Delta_1} = \frac{dy}{\Delta_2} = \frac{dz}{\Delta_3} = \frac{ds}{|\nabla F \times \nabla G|}\quad \text{cu}\quad \Delta_1 = \frac{D(F,G)}{D(y,z)},\quad \Delta_2 = \frac{D(F,G)}{D(z,x)},\quad \Delta_3 = \frac{D(F,G)}{D(x,y)}.$$

b) Trecerea de la coordonatele cilindrice (ρ, φ, z) la cele carteziene ortogonale (x, y, z) fiind $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, obţinem $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2 + dz^2$. c) Fie (31); $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$. *Apl.* a) $\Delta_1 = -6a^2x$, $\Delta_2 = -18x^3$, $\Delta_3 = 6a^2z$, $|\nabla F \times \nabla G| = (18x^4 + a^4)/x$; $s = \dfrac{1}{6a^2}\displaystyle\int_{a/2}^{a} \frac{18x^4 + a^4}{x^2}\, dx = 25a^3/4$. b) Avînd (32) şi $r = \text{const.}$, găsim $s = r\sqrt{h^2 + 1}(\theta_2 - \theta_1)/h$.

45 *Parabola logaritmică* e intersecţia unui paraboloid de rotaţie cu un cilindru drept avînd generatoarele paralele cu axa paraboloidului iar curba

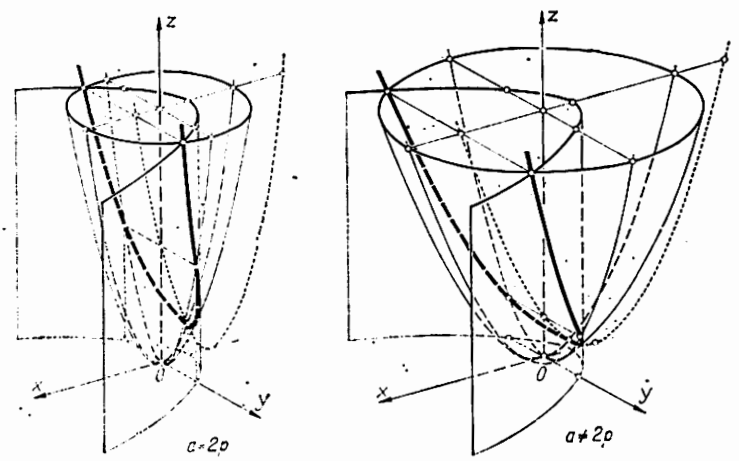


Fig. 25

directoare fiind o parabolă situată într-un plan perpendicular pe axa paraboloidului cu focarul pe această axă. Se cere : a) O reprezentare parametrică. b) Proiecţia curbei pe planul ei de simetrie. c) Lungimea unui arc de curbă.

R. Ec. parabolei logaritmice sînt (fig. 25)

(37) $\qquad x^2 + y^2 = 2pz,\ y^2 = 4a(x + a);\ x = (t^2 - 4a^2)/4a,\ y = t,\ z = (t^2 + 4a^2)^2/32a^2p.$

b) Parabola $(x + 2a)^2 = 2pz$, $y = 0$. c) Dacă $a = 2p$, $s = p\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + p\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, unde φ e definit de $4a^4\,\mathrm{tg}^2\varphi = t^2(t^2 + 4a^2)$, integrarea efectuîndu-se cu ajutorul funcţiilor elementare. Dacă $a \neq 2p$, rectificarea se realizează prin integrale eliptice.

46 Se numeşte *elice* (sin. : *elice cilindrică*, *elice generală*) o curbă în spaţiu ale cărei tangente formează unghiuri egale cu o direcţie fixă. Să se arate că sînt caracteristice pentru elice *proprietăţile* : a) distanţa pe generatoarea cilindrului (pe care e situată elicea) de la un punct oarecare al elicei pînă la o secţiune dreaptă a cilindrului e o funcţie liniară de abscisa curbilinie pe secţiune; b) abscisa curbilinie a unui punct de pe elice e funcţie liniară de abscisa curbilinie a proiecţiei punctului pe secţiunea dreaptă; c) prin desfăşurarea cilindrului pe un plan, elicea se aplică pe o dreaptă (proprietatea geodezică). *Apl.* a) Să se obţină ecuaţiile normale ale elicei circulare (6), respectiv ale elicei cilindro-conice (9). b) Să se arate că e o elice curba : $b_1)\ x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos\dfrac{t}{2}$; $b_2)\ \bar r = a(3t - t^3)\bar i + 3at^3\bar j + a(3t + t^3)\bar k$. c) Locul punctelor de intersecţie al tangentelor

unei elice cu un plan perpendicular pe generatoarele cilindrului. d) Proiecția paralelă a unei elice circulare pe un plan perpendicular pe axa cilindrului.

R. Dreptele de direcție fixă duse prin punctele curbei formează o suprafață cilindrică; dacă $\bar{\rho}$ = versor direcție fixă, iar $C_0 : \bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ e secțiunea dreaptă a cilindrului, avem $\bar{\rho} \cdot \bar{r}_0' = 0$. Ecuația elicei

(38) $$\bar{r} = \bar{r}_0(t) + f(t)\bar{\rho},$$

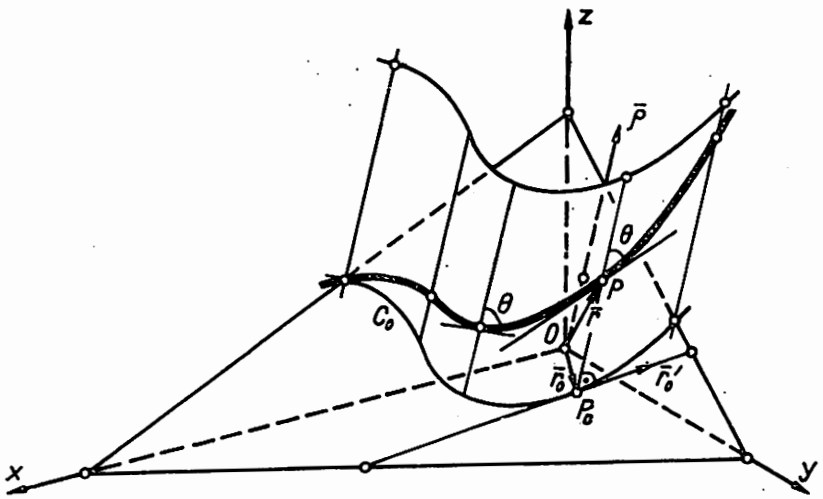


Fig. 26

funcția $f(t) = P_0P$ determinîndu-se din condiția $\cos(\widehat{\bar{r}', \bar{\rho}}) = k$ (fig. 26); deducem $(1 - k^2) f'^2 = k^2 \bar{r}_0'^2$, adică $\left(a = k/\sqrt{1-k^2},\ b = \text{const. de integrare};\ \widehat{\bar{r}', \rho} \neq \frac{\pi}{2}\right)$

(38′) $$f(t) = a\int |\bar{r}_0'(t)|\, dt + b.$$

a) $\sigma = \int |\bar{r}_0'|\, dt$ e arcul secțiunii drepte; $P_0P = a\sigma + b$. *Obs.* a_1) Cu $Oz \parallel \bar{\rho}$ și Oxy planul secțiunii drepte a cilindrului, ecuațiile elicei sînt

(38″) $$x = x(\sigma),\ y = y(\sigma),\ z = a\sigma + b \text{ cu } (dx/d\sigma)^2 + (dy/d\sigma)^2 = 1.$$

a_2) Prin translația $x = X$, $y = Y$, $z = Z + b$, putem considera cazul (38″) cu $b = 0$. Reciproc, curba (38″) e o *loxodromă* a cilindrului pe care e situată. b) Elementul de arc al elicei (38″) e

$$ds^2 = [(dx/d\sigma)^2 + (dy/d\sigma)^2 + a^2]\, d\sigma^2 = (1 + a^2)\, d\sigma^2,$$

căci σ e abscisa curbilinie (arcul) pe secțiunea dreaptă; rezultă

(38‴) $$s = \sigma\sqrt{1 + a^2} + c.$$

Reciproc, din (38‴) deducem $dz/d\sigma = a$, sau încă $z = a\sigma + b$; căci

$$(ds/d\sigma)^2 = 1 + a^2 = (dx/d\sigma)^2 + (dy/d\sigma)^2 + (dz/d\sigma)^2 \text{ iar } (dx/d\sigma)^2 + (dy/d\sigma)^2 = 1.$$

c) Dacă desfășurăm cilindrul pe un plan, generatoarele se aplică pe o familie de drepte paralele, iar secțiunea dreaptă după o perpendiculară OX pe aceste drepte. În acest caz, σ devine abscisă pe OX iar cota devine ordonată față de OX, elicea aplicîndu-se pe dreapta

$$Y = aX + b.$$

Reciproca e adevărată; căci, din această proprietate se deduce că unghiul format de curbă cu generatoarea e constant. *Apl.* a) Găsim

$$x = r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+k^2}},\quad y = r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+k^2}},\quad z = \frac{ks}{\sqrt{r^2+k^2}}. \tag{39}$$

Obs. Lungimea pasului elicei (6), adică arcul dat de $t \in [0, 2\pi]$, e $s = 2\pi\sqrt{r^2+k^2}$. Pentru elicea (9), cum $s = \alpha\, e^{kt}$ ($k\alpha = \sqrt{a^2(k^2+1)+b^2k^2}$), găsim

$$x = a\frac{s}{\alpha}\cos\left(\frac{1}{k}\ln\frac{s}{\alpha}\right),\quad y = a\frac{s}{\alpha}\sin\left(\frac{1}{k}\ln\frac{s}{\alpha}\right),\quad z = b\frac{s}{\alpha}. \tag{40}$$

Fie $\sigma = \int\sqrt{dx^2+dy^2} = ae^{kt}\sqrt{k^2+1}/k$ arcul pe secțiunea dreaptă; atunci

$$x = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\cos\left(\frac{1}{k}\ln\frac{k}{a\sqrt{k^2+1}}\right),\quad y = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\sin\left(\frac{1}{k}\ln\frac{k}{a\sqrt{k^2+1}}\right),\quad z = \frac{bk}{a\sqrt{k^2+1}} \tag{40'}$$

sau încă, notînd $\tau = k/a\sqrt{k^2+1}$ și $h = 1/k$,

$$x = a\tau\cos(h\ln\tau),\quad y = a\tau\sin(h\ln\tau),\quad z = b\tau. \tag{40''}$$

b) Cu $\theta = \widehat{\bar{r}', \bar{\kappa}}$: $b_1)\ \theta = 7\pi/4$; $b_2)\ \theta = \pi/4$. c) Tangenta în $P(\sigma) \in (38'')$ taie planul π: $z = h$ în N: $X = x - (\sigma + (b-h)/a)\,x'$, $Y = y - (\sigma + (b-h)/a)\,y'$, $Z = h$. Dacă P' e proiecția lui

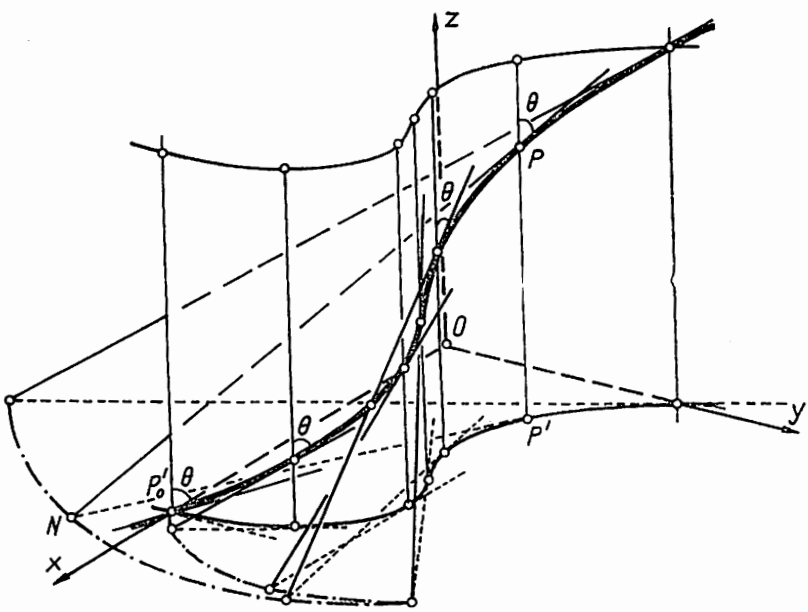


Fig. 27

P pe π iar P_0' ($\sigma_0 = (h-b)/a$) e pe secțiunea dreaptă Γ din acest plan, atunci $P'N$ = arc $P_0'P'$ (fig. 27); deci N descrie o evolventă a lui Γ (corespunzătoare lui P_0'). d) O cicloidă alungită, obișnuită sau scurtată, după cum unghiul format de dreapta directoare a proiecției cu axa cilindrului e mai mic, egal sau mai mare decît cel (constant) format de tangentă la curbă cu axa cilindrului (fig. 28).

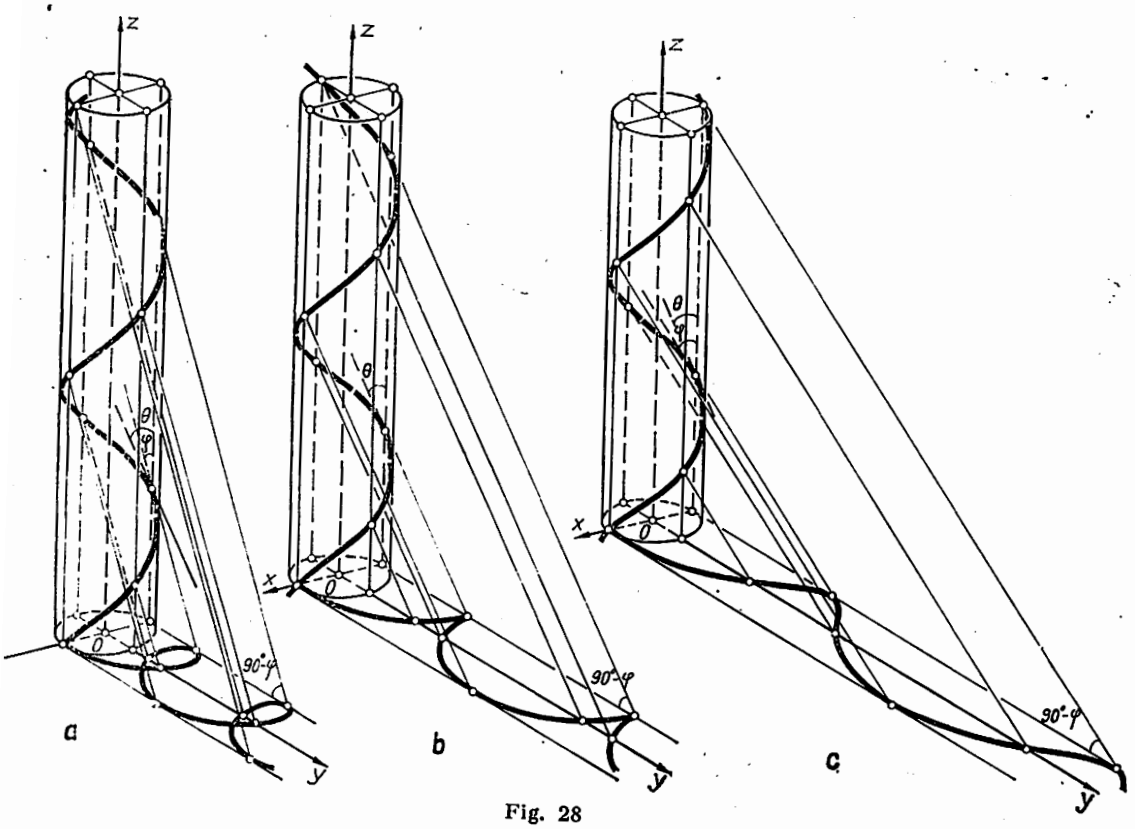


Fig. 28

4. PLANUL OSCULATOR

47 Să se găsească punctele curbei $x = 2t - 1$, $y = t^3$, $z = 1 - t^2$ ale căror plane osculatoare sînt perpendiculare pe planul $7x - 12y + 5z - 6 = 0$.

R. Fie $\bar{v}(3t^2, 2, 6t)$ și $\bar{N}(7, -12, 5)$ vectorii normali la planul osculator și, respectiv, la planul dat. Din $\bar{v} \cdot \bar{N} = 0$ se obține $t_1 = -2$ și $t_2 = 4/7$.

48 Să se determine punctele curbei $x = 1 + t^3$, $y = -2t$, $z = t^4 - 1$ ale căror plane osculatoare sînt paralele cu dreapta $(x + 4)/7 = -y/2 = -(z - 7)/12$.

49 Fie curba în spațiu (fig. 29)

$$C : x = \pm a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t, z = ct. \tag{41}$$

Se cere : a) În ce caz curba e o elice, numită *elice hiperbolică*. b) Să se scrie ecuațiile urmei pe Oxy a planului osculator π în P la C și să se determine înfășurătoarea Γ a acestei urme. c) Să se arate că punctul caracteristic Q al urmei se află pe tangenta în P la C.

R. a) ds e proporțională cu o coordonată a lui $P \in C$ dacă $a = c : s = \sqrt{a^2 + b^2}$ sh t. *Obs.* $\cos(\widehat{\vec{r}', \vec{j}}) = b/\sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}$. Elicea e pe cilindrul hiperbolic $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. b) π :

$bcx \operatorname{sh} t - acy \operatorname{ch} t - abz - abct = 0$. Urma : $bx \operatorname{sh} t - ay \operatorname{ch} t - abt = 0$, $z = 0$. $\Gamma : x = a(\operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} t)$, $y = b(\operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t)$, $z = 0$. c) Q, punct curent pe Γ, e pe tangenta în P la C.

50 Se cere ecuaţia planului supraosculator al curbei $x = t$, $y = t^2$, $z = t^4 + 4t^3$.

51 Fiind dată parabola cubică (22), se cere : a) Să se determine proiecţia curbei pe Oxy din punctul Ω (0, 0, 1). b) Să se arate că planele osculatoare

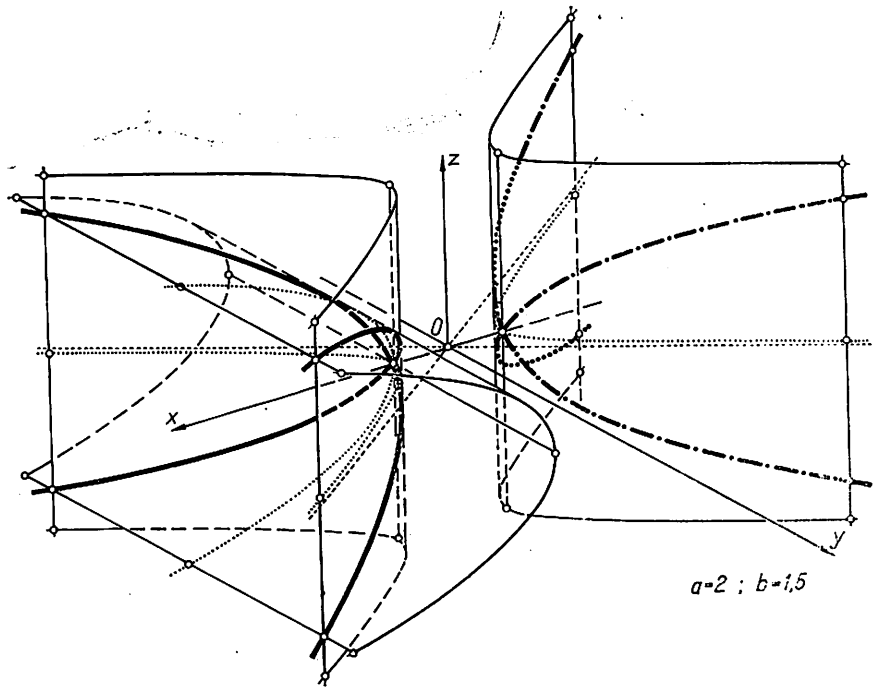


Fig. 29

π (ale curbei) care trec prin Ω taie planul Oxy după tangentele inflexionare ale curbei proiecţie.

R. a) Generatoarele prin Ω, ce se sprijină pe curba (22), generează conul $x^3 - y^3 + xy(z - 1) = 0$. Curba proiecţie e unicursală : $x = t/(1 - t^3)$, $y = t^2/(1 - t^3)$, $z = 0$, având un nod în O, cu tangentele Ox şi Oy (fig. 30). Punctele şi tangentele inflexionare sînt I_1 (1, 1, 0) şi $3x - 3y - 1 = 0$, $z = 0$, I_2 (1, ε, 0) şi $3\varepsilon x - 3\varepsilon^2 y - 1 = 0$, $z = 0$, I_3 (1, ε^2, 0) şi $3\varepsilon^2 x - 3\varepsilon y - 1 = 0$, $z = 0$ cu $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$. b) $\pi : 3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$ trece prin Ω dacă $t^3 - 1 = 0$; ele sînt $3x - 3y + z - 1 = 0$, $3\varepsilon x - 3\varepsilon^2 y + z - 1 = 0$ şi $3\varepsilon^2 x - 3\varepsilon y + z - 1 = 0$.

52 Planele osculatoare ale cubicei (22′) în 2 puncte în care produsul coordonatelor curbilinii este -2 sînt perpendiculare.

53 Fie cubica C de ecuaţii (30). Se cere : a) Să se arate că perpendiculara d din $P \in C$ pe Oz se găseşte în planul osculator π în P la C. b) Să se determine planele osculatoare ale curbei care trec prin Ω $(2a, -b/3, -6c)$. c) Să se demonstreze că locul punctelor în care tangentele la C înţeapă planul π_0 e înfăşurătoarea intersecţiei planelor osculatoare cu π_0, unde π_0 e planul osculator în O la C. d) Să se arate că 4 puncte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ oarecare de pe C şi planele lor osculatoare formează *tetraedre Möbius* (înscrise şi circumscrise în acelaşi timp unul altuia). e) Dacă tangenta în A (α) taie planul

osculator din B (β) în C și tangenta în B taie planul osculator din A în D, să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$.

R. a) $d: x/at = y/bt^2 = (z - ct^3)/0$, $\pi: 3t^2x/a - 3ty/b + z/c - t^3 = 0$. Dar $d \in \pi$. Sau: planul osculator în P la C taie pe Oz într-un punct care are aceeași cotă ca P. b) $\Omega \in \pi$ dacă

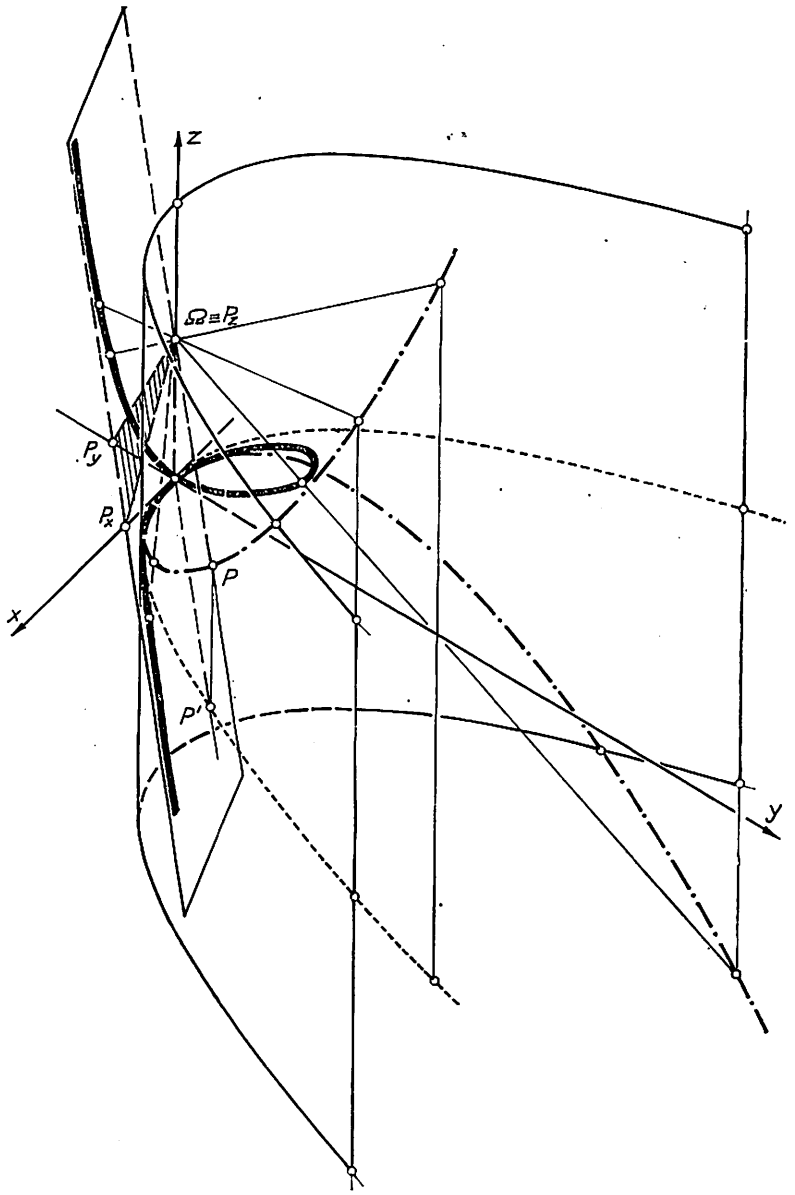


Fig. 30

$t^3 - 6t^2 - t + 6 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 6$; deci: $3x/a + 3y/b + z/c + 1 = 0$, $3x/a - 3y/b + z/c - 1 = 0$, $108x/a - 18y/b + z/c - 216 = 0$. c) $\pi_0 = Oxy$; parabola $3x = 2at$, $3y = bt^2$, $z = 0$. d) Planul osculator (în P_i la C) $\pi_t: 3t_j^2 x/a - 3t_t y/b + z/c - t_i^3 = 0$. Planele π_1,

π_2 și π_3 se taie în $P_4'(a(t_1+t_2+t_3)/3, b(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)/3, ct_1t_2t_3)$ situat în planul $P_1P_2P_3$: $(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)\,x/a-(t_1+t_2+t_3)\,y/b+z/c-t_1t_2t_3=0$. Analog obținem pe P_1', P_2' și P_3'. Tetraedrele $P_1P_2P_3P_4$ și $P_1'P_2'P_3'P_4'$ sînt astfel că $P_1\in P_2'P_3'P_4'$ și $P_1'\in P_2P_3P_4$ etc. (sînt tetraedre Möbius). *Obs.* Proprietate mai generală, pentru o cubică strîmbă oarecare. e) $C(a(2\alpha+\beta)/3, b(\alpha^2+2\alpha\beta)/3, c\alpha^2\beta)$, $D(a(\alpha+2\beta)/3, b(\beta^2+2\alpha\beta)/3, c\alpha\beta^2)$, $2.3^2V=abc(\beta-\alpha)^6$.

54 Fiind dată cubica C de ecuații (20) — (20'), să se arate : a) Printr-un punct oarecare P din spațiu se pot duce 3 plane osculatoare la C și că planul punctelor de contact trece prin P. b) Dacă C are direcții asimptotice reale distincte, ecuațiile ei pot fi puse sub forma

$$(44)\qquad x=A/(t+a),\ y=B/(t+b),\ z=C/(t+c)\ (a\neq b\neq c).$$

R. a) Planul trecînd prin 3 puncte t_i $(i=1,2,3)$ ale cubicei e

$$(45)\quad (A_1\sigma_1-B_1\sigma_2+C_1\sigma_3-D_1)\,x+(A_2\sigma_1-B_2\sigma_2+C_2\sigma_3-D_2)\,y+(A_3\sigma_1-B_3\sigma_2+C_3\sigma_3-D_3)\,z+A_4\sigma_1-B_4\sigma_2+C_4\sigma_3-D_4=0,$$

$A_1, B_1, \ldots$ fiind coeficienții lui $a_1, b_1, \ldots$ în dezvoltarea determinantului $|a_i\ b_i\ c_i\ d_i|$ iar $\sigma_1=t_1t_2t_3$, $\sigma_2=t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1$, $\sigma_3=t_1+t_2+t_3$. De unde, cum t_1, t_2, t_3 se confundă cu t, deducem ecuația planului osculator :

$$(45')\quad (A_1t^3-3B_1t^2+3C_1t-D_1)\,x+(A_2t^3-3B_2t^2+3C_2t-D_2)\,y+(A_3t^3-3B_3t^2+3C_3t-D_3)\,z+A_4t^3-3B_4t^2+3C_4t-D_4=0.$$

Rădăcinile t_i $(i=1,2,3)$ ale ecuației $\alpha t^3+3\beta t^2+3\gamma t+\delta=0$ verifică relația $\alpha\sigma_1+\beta\sigma_2+\gamma\sigma_3+\delta=0$ (datorită relațiilor între coeficienți și rădăcini). Deci, pentru $P(x,y,z)$ dat, rădăcinile ecuației (45') verifică relația (45), adică planul punctelor de contact trece prin P. *Obs.* În cazul (44), planele (45) și (45') se scriu

$$(44')\qquad \frac{(l_1+a)(l_2+a)(l_3+a)}{A(a-b)(a-c)}\,x+\frac{(l_1+b)(l_2+b)(l_3+b)}{B(b-c)(b-a)}\,y+\frac{(l_1+c)(l_2+c)(l_3+c)}{C(c-a)(c-b)}\,z=1$$

și

$$(44'')\qquad \frac{(t+a)^3}{A(a-b)(a-c)}\,x+\frac{(t+b)^3}{B(b-c)(b-a)}\,y+\frac{(t+c)^3}{C(c-a)(c-b)}\,z=1.$$

b) Tangenta într-un punct de la infinit al unei curbe algebrice e o asimptotă a curbei. Tangenta într-un punct t al cubicei (20)—(20') are direcția $l=P_1'(t)P_4(t)-P_1(t)P_4'(t)$, $m=P_2'(t)P_4(t)-P_2(t)P_4'(t)$, $n=P_3'(t)P_4(t)-P_3(t)P_4'(t)$. Deci unei rădăcini (reale) t_0 a lui $P_4(t)=0$ îi corespunde o direcție asimptotică de direcție $l=P_1(t_0)$, $m=P_2(t_0)$, $n=P_3(t_0)$. Prin ipoteză, fie $P_4(t)=d_4(t+a)(t+b)(t+c)$. Cu $O(t=\infty)\in C : P_i(t)$ sînt de grad 2 în t; luînd axele paralele cu direcțiile asimptotice, avem $P_2(-a)=P_3(-a)=0$, $P_1(-b)=P_3(-b)=0$ și $P_1(-c)=P_2(-c)=0$, încît $P_1=\alpha_1(t+b)(t+c)$, $P_2=\alpha_2(t+a)(t+c)$, $P_3=\alpha_3(t+a)(t+b)$. Dacă direcțiile asimptotice sînt triortogonale, se spune că *cubica* e *echilateră*; în acest caz, reperul cartezian e ortogonal. *Ex* : $x=1/(t-1)$, $y=1/(t+1)$, $z=1/t$; planul osculator π în t : $(t-1)^3x+(t+1)^3y-2t^3z-2=0$, planul π_{123} care trece prin t_i : $(t_1-1)(t_2-1)(t_3-1)\,x+(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\,y-2t_1t_2t_3z-2=0$. Însă, din $P_0\in\pi$, avem $\sigma_1=(\alpha-\beta+2)/(\alpha+\beta-2\gamma)$, $\sigma_2=3(\alpha+\beta)/(\alpha+\beta-2\gamma)$, $\sigma_3=3(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta-2\gamma)$ încît π_{123} : $(-4\beta+\gamma+1)\,x+(4\alpha-\gamma+1)y-(\alpha-\beta+2)\,z-(\alpha+\beta-2\gamma)=0$ și $P_0(\alpha,\beta,\gamma)\in\pi_{123}$.

55 Să se arate că planul osculator π al unei elice conține normala cilindrului (pe care se găsește elicea).

R. Normala (în P) la cilindru e normala (în P) la secțiunea dreaptă dusă prin P, deci $x'(X-x)+y'(Y-y)=0$, $Z-z=0$. Din (38''), prin derivare, obținem $-x''/y'=y''/x'=k$; π (în P) : $-a[x'(X-x)+y'(Y-y)]+Z-z=0$ aparține fasciculului de plane având normala la cilindru ca axă (fig. 31). De exemplu, la elicea circulară (6), π : $k(X\sin t-Y\cos t)+a(Z-kt)=0$ conține intersecția planelor $Z=kt$ (perpendicular pe axa cilindrului) și $Y=X\operatorname{tg} t$ (care trece prin axă).

56 O condiţie necesară şi suficientă ca o curbă strîmbă să fie elice e ca planul său osculator să facă un unghi constant cu o direcţie fixă.

R. Fie (38″). Normala planului osculator e $\overline{N}(-ax', -ay', 1)$; rezultă $\cos(\widehat{\overline{N}, \overline{k}}) = 1/\sqrt{a^2+1} = \text{const}$. Reciproc : dacă se ia Oz paralelă direcţiei fixe şi arcul σ al proiecţiei curbei pe Oxy ca parametru, curba are ecuaţiile $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$, $z = z(\sigma)$ cu $x'^2 + y'^2 = 1$. Atunci

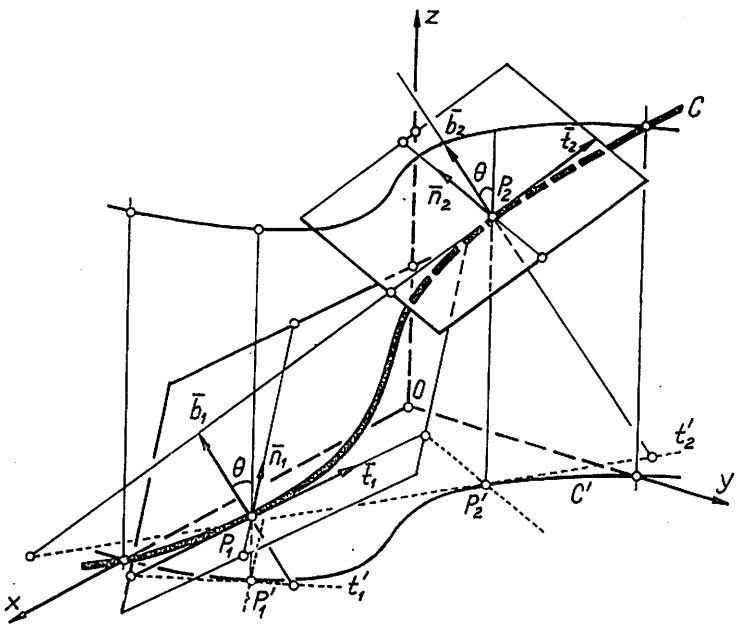


Fig. 31

$\overline{N}(A, B, C)$ cu $A = y'z'' - kx'z'$, $B = -(x'z'' + ky'z')$, $C = k$; din $\cos(\widehat{\overline{N}, \overline{k}}) = k/\sqrt{z''^2 + k^2(z'^2+1)} = h(|h| < 1)$ şi notînd $a^2h^2 = 1 - h^2$, obţinem ecuaţia diferenţială $z''^2 + k^2(z'^2 - a^2) = 0$ cu soluţia generală $z = -\frac{a}{k}\cos(k\sigma + k_0) + k_1$ şi soluţia singulară $z = a\sigma + b$. În primul caz, curba e plană ($A' = B' = C' = 0$); în celălalt caz, curba e o elice.

57 Se numesc *curbe tetraedrale* curbele ale căror tangente aparţin unui complex tetraedral; astfel de curbe se zice că sînt *curbe anarmonice* (sin. : *curbe W*) dacă există o relaţie omografică între coordonatele punctului curent al curbei şi parametrii directori ai tangentei în acel punct. Se cere : a) Să se afle ecuaţiile curbelor unui complex tetraedral. b) În cazul curbelor anarmonice, să se arate : b_1) un punct P al curbei şi punctele $P_i (i = 1, 2\ 3, 4)$, în care tangenta în P intersectează feţele $x_i = 0$ ale tetraedrului dat, formează un sistem proiectiv invariant; b_2) planul osculator în P şi planele determinate de tangenta în P şi vîrfurile A_i ale tetraedrului dat formează, de asemenea, un sistem proiectiv invariant. *Apl.* Faţă de tetraedrul asociat, să se afle traiectoriile subgrupului (al grupului proiectiv)

$$x'_1 = x_1/\lambda,\ x'_2 = \lambda^\alpha x_2,\ x'_3 = \lambda^\beta x_3,\ x'_4 = x_4\ (\alpha = a_1/a_2,\ \beta = b_1/b_3).$$

R. a) Un *complex tetraedral* e constituit din dreptele ale căror puncte de intersecţie cu feţele unui tetraedru dat formează un raport anarmonic constant; definiţia avînd un caracter proiectiv, fie tetraedrul format din planele de coordonate şi planul impropriu. Intersecţiile tangentei $\overline{R} = \bar{r} + \rho\, d\bar{r}$ cu feţele tetraedrului corespund valorilor $-x/dx$, $-y/dy$, $-z/dz$, ∞ ale lui ρ. Din $(-x/dx, -y/dy, -z/dz, \infty) = k$ şi notînd $k = (a-c)/(b-c)$, obţinem o ecuaţie diferenţială de

tip Monge : $(b-c)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (c-a)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (a-b)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, echivalentă cu $(a+t)\mathrm{d}x/x = (b+t)\mathrm{d}y/y = (c+t)\mathrm{d}z/z$, t determinat de primele rapoarte. Dacă $f(t)$ e valoarea comună a rapoartelor, cu $\alpha(t) = \int f(t)\mathrm{d}t/(a+t)$, $\beta(t) = \int f(t)\mathrm{d}t/(b+t)$, $\gamma(t) = \int f(t)\mathrm{d}t/(c+t)$, deducem că ecuațiile curbelor unui complex tetraedral sînt

(45) $$x = e^{\alpha(t)},\ y = e^{\beta(t)},\ z = e^{\gamma(t)}.$$

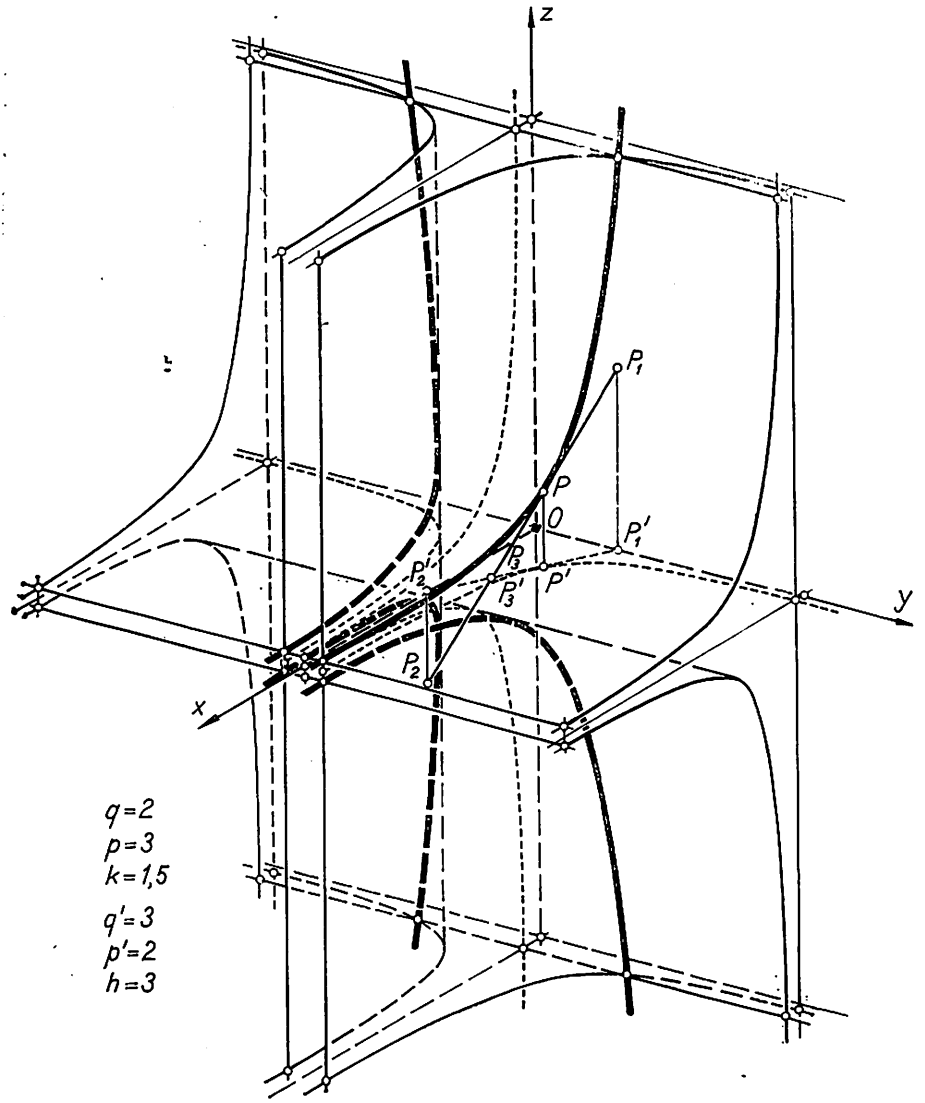


Fig. 32

b) Obținem curbele anarmonice în spațiu cînd $a+t$, $b+t$, $c+t$ sînt într-un raport constant $(a+t)/l = (b+t)/m = (c+t)/n$; obținem ecuațiile (fig. 32)

(45') $$x^l = \lambda t,\ y^m = \mu t,\ z^n = \nu t\ (\lambda, \mu, \nu - \text{const.});\ x^\alpha y = \text{const.},\ x^\beta z = \text{const.};$$
$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_4^{a_4} = \text{const.},\ x_1^{b_1}x_3^{b_3}x_4^{b_4} = \text{const.}\ (a_1+a_2+a_4 = 0,\ b_1+b_3+b_4 = 0).$$

b_1) $(PP_1P_2P_4) = (a_1+a_4)/a_4$, $(PP_1P_3P_4) = (b_1+b_4)/b_4 \cdot b_2$) Proprietatea e duală celei precedente.

Apl. Putem schimba parametrul astfel încît transformarea identică să se obțină anulînd noul parametru; luăm $\lambda = 1 + a$. În coordonate neomogene ($a^1 = a$): $x' = x/(1+a) = (1-a+a^2-..)x = x + \xi_1^1 a^1 + \ldots$, $y' = (1+a)^\alpha\ y = (1 + \alpha a + \ldots)\, y = y + \xi_1^2 a^1 + \ldots$, $z = (1+a)^\beta z = (1 + \beta a + \ldots)\, z = z + \xi_1^3 a^1 + \ldots$; deci operatorul infinitezimal al grupului e $X_1 f = \xi_1^\nu \dfrac{\partial f}{\partial x^\nu} = -x\dfrac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta z \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Ecuațiile diferențiale ale grupului sînt $\dfrac{dx}{-x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ și admite integralele prime (45_2). *Obs.* O curbă anarmonică (45) e transformată în ea însăși de grupul considerat (proprietate esențială).

58 Să se arate că planele osculatoare duse în patru puncte coplanare $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ de pe curba strîmbă

$$x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^4 \tag{46}$$

retaie curba resp. în punctele P_i' care sînt de asemenea coplanare.

R. $P_i(t_i) \in$ (46) dacă $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ (condiția necesară și suficientă); se obține din $|at_i\ bt_i^2\ ct_i^3\ 1| = 0$. Planul osculator în P_i taie curba în P_i de 3 ori și în P_i', încît avem $3t_i + t_i' = 0$. Or $\Sigma_i t_i' = -3\,\Sigma_i t_i = 0$.

59 Dacă planul osculator π_0 în punctul curent al unei curbe în spațiu trece printr-un punct fix Ω sau e staționar, curba e plană. *Apl.* a) Curba $5x = 3t^3 + 4$, $5y = -t^2 + 1$, $5z = 4t^3 - 3$ e plană. b) Să se determine funcția $f(t)$ astfel ca $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = f(t)$ să fie plană.

R Fie curba C de ecuații (3). Cu $\Omega = 0$, π_0: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$. $M = \begin{Vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{Vmatrix}$;

dacă $r(M) = 1$, deci $x'/x = y'/y = z'/z$, integrînd, obținem dreapta d: $x = ay = bz$ și $0 \in d$. Dacă $r(M) = 2$, fie $xy' - x'y \neq 0$; există λ și μ astfel ca $\lambda x + \mu y + z = 0$, $\lambda x' + \mu y' + z' = 0$, $\lambda x'' + \mu y'' + z'' = 0$. Derivînd primele relații și ținînd seama de ultimele, deducem $\lambda' x + \mu' y = 0$, $\lambda' x' + \mu' y' = 0$, cu soluția $\lambda' = \mu' = 0$; deci C e în planul π_0: $x + y + z = 0$ și $0 \in \pi_0$. Punctele cu π_0 staționar sînt date de

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

Fie $x'y'' - x''y' = 0$; există λ și μ astfel ca $z' = \lambda x' + \mu y'$, $z'' = \lambda x'' + \mu y''$, $z''' = \lambda x''' + \mu y'''$. Analog: C e în planul $z = \lambda x + \mu y + \nu$. Reciproca e adevărată: derivînd ecuația (23), rezultă $Ax' + By' + Cz' = 0, \ldots, Ax''' + By''' + Cz''' = 0$ în fiecare punct, adică (47). *Apl.* a) π_0: $-4x + 3z + 5 = 0$ nu depinde de t. $P(t = 0) = (4/5,\ 1/5,\ -3/5)$ — punct singular. Luînd ca Ox' tangenta în P și ca $Ox'y'$ planul curbei: $5x' = t^2$, $y' = t^3$, $z' = 0$; b) Din (47): $f(t) = Ae^t + Be^{-t} + C$.

60 Numind *plan tangent* în P la o curbă în spațiu C orice plan ce trece prin tangenta în P la C, să se arate că planul osculator π_0 în P la C e planul tangent π (în P) cel mai apropiat de curbă.

R. Cu $\overline{N}(A, B, C)$ versorul normală al lui π în $P(t) \in$ (16), avem $\overline{N}\cdot(\overline{R} - \overline{r}) = 0$, $\overline{N}\cdot\overline{r}' = 0$. Fie $P'(t + \triangle t) \in$ (16). Distanța de la P' la π e $\delta = \overline{N}\cdot\triangle\overline{r} = \dfrac{1}{2}\overline{N}\cdot\overline{r}''\triangle t^2 + \dfrac{1}{6}\overline{N}\cdot\overline{r}'''\triangle t^3 + \ldots$ (de ordin 2 în $\triangle t$). Pentru π_0 avem și $\overline{N}\cdot\overline{r}'' = 0$; deci $\delta = \dfrac{1}{6}\overline{N}\cdot\overline{r}'''\triangle t^3 + \ldots$. (de ordin 3 în $\triangle t$)

și π_0 traversează curba (în P). *Planul osculator* (în P la C) e *staționar* dacă distanța δ e cel puțin de ordin 4 în $\triangle t$, după cum δ e de ordin impar sau par în $\triangle t$, π_0 staționar traversează sau nu curba (în P).

61 Numind *plan asimptot* al unei curbe în spațiu C planul astfel ca distanța dintre un punct variabil al lui C și plan tinde spre zero cînd punctul tinde pe curbă spre domeniul de la infinit, să se găsească planele asimptote ale curbei (44).

R. Pentru o curbă algebrică, planul asimptot e planul osculator π_0 într-un punct de la infinit P_∞ al curbei. În general, dacă π_0 (în P la C), situat la distanță finită, are o poziție limită determinată cînd $P \to P_\infty$, curba se comportă asimptotic în raport cu acea poziție limită. În $P'(-a) = (0, B/(b-a), C/(c-a))$, $\pi_0 : (b-a)^2 y - (c-a)^2 z - B(b-a) + C(c-a) = 0$ etc.

5. PLANUL NORMAL LA O CURBĂ STRÎMBĂ

62 Să se determine punctul curbei (7) al cărui plan normal conține originea axelor de coordonate.

63 Să se arate că planele normale la curba $x = a\cos\alpha\sin t$, $y = a\sin\alpha\sin t$, $z = a\cos t$ (α—const.) trec printr-o dreaptă fixă.

R. Aparțin fasciculului de axă $x + y\,\mathrm{tg}\alpha = 0$, $z = 0$. *Obs.* Curba e un cerc; deci planele normale trec printr-o dreaptă fixă.

64 Să se arate că, dacă planul normal în punctul curent al unei curbe în spațiu C trece printr-un punct fix Ω, C e o curbă sferică. Reciproca e adevărată? *Apl.* a) $C : x = a(1 - \cos t)$, $y = a\sin t$, $z = 2a\cos\frac{t}{2}$ e o curbă sferică? b) Se cere condiția ca ecuațiile (10) să fie ale unei curbe sferice.

R. Fie $\bar{a} = \overline{O\Omega}$, deci $\bar{a}' = 0$. Ecuația planului normal la curba (16) e

$$\pi_n : (\bar{R} - \bar{r}).\bar{r}' = 0. \tag{48}$$

$O \in \pi_n$ dacă $(\bar{a} - \bar{r}).\bar{r}' = 0$. adică $(\bar{a} - \bar{r}).(\bar{r} - \bar{a})' = 0$ sau $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r} - \bar{a})^2 = 0$; deci $(\bar{r} - \bar{a})^2 = b^2$ adică $P \in C$ astfel că $\overline{OP} = \bar{r}$ satisface ecuația sferei $(\bar{R} - \bar{a})^2 = b^2$.

Reciproca e adevărată. *Apl.* a) $O \in \pi_n$. b) $a = b = c$.

65 Să se găsească relațiile între a, b, c, k astfel ca ecuațiile $x = a\cos t + b\cos(\alpha+1)t + c\cos(\alpha-1)t$, $y = a\sin t + b\sin(\alpha+1)t - c\sin(\alpha-1)t$, $z = k(1 - \cos\alpha t)$ să reprezinte o curbă sferică (*cicloida sferică*).

66 Se numește *curbă izotropă* (sin. : *curbă minima*) o curbă C ale cărei tangente sînt drepte izotrope. Se cere : a) Să se arate că, de-a lungul unei curbe izotrope, planul normal și cel osculator coincid. b). Să se dea o reprezentare parametrică finită pentru C. c) Să se arate că planele osculatoare la C sînt tangente ombilicalei. d) Să se demonstreze că orice curbă izotropă e o elice pe orice cilindru care conține curba (*teorema Lie*). e) Printr-o transformare logaritmică, putem reduce curbele tetraedrale în curbe izotrope. *Apl.* a) Să se determine curbele izotrope plane. b) Punctele care împart în același raport segmentele care unesc punctele omologe a 2 curbe izotrope descriu o curbă izotropă. c) $C : x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ait$ e o elice izotropă.

R. a) Cum $\bar{r}'^2 = 0$, deci $\bar{r}' \cdot \bar{r}'' = 0$, avem $\bar{r}' = \lambda \bar{r}' \times \bar{r}''$. b) Putem lua $\bar{r}' = v\,[(1 - u^2)\,\bar{i} + i\,(1 + u^2)\,\bar{j} - 2u\bar{k}]$. Cu $\sigma(u) = \int v(u)\,du$, $\tau(u) = \int \sigma(u),\ du$, obținem

$$(48)\qquad x = (1 - u^2)\,\sigma + 2u\tau - 2\int \tau du,\ y = i\,[(1 + u^2)\sigma - 2u\tau + 2\int \tau du],\ z = -2\,(u\sigma - \tau).$$

Luînd $\int \tau(u)\,du = -if(u)/2$, rezultă parametrizarea

$$(48')\qquad x = i\,(f - uf' - (1 - u^2)\,f''/2),\ y = f - uf' + (1 + u^2)\,f''/2,\ z = -i\,(f' - uf''),$$

cînd trebuie să se ia $v(u) = -if'''/2$ în reprezentarea lui r'; punînd $\int \tau(u)du = f(u)$ iar $v(u) = f'''(u)$, găsim *reprezentarea lui Weierstrass.* c) Imaginea sferică a tangentelor lui C e un arc de curbă ombilicală a sferei unitate. *Obs.* c_1) Tangentele lui C sînt paralele cu generatoarele conului izotrop $K: x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sau $K: x = v\,(1 - u^2),\ y = iv\,(1 + u^2),\ z = -2uv$; planul tangent la K e paralel cu planul osculator la C. c_2) Tangentele lui C aparțin unui complex de gradul 2 (dreptele ce se sprijină pe o curbă dată depind de 3 parametri: formează un complex, iar parametrii ei sînt legați printr-o relație de gradul 2: $r'^2 = 0$). d) Cu generatoarele cilindrului paralele cu Oz, pentru o elice avem $dz^2/\sqrt{dx^2 + dy^2} = \operatorname{ctg}\theta$ și $\theta = \text{const.}$ Luînd $\operatorname{ctg}\theta = i$, obținem o curbă izotropă. e) Prin $x' = \ln x$, $y' = \ln y$, $z' = \ln z$, ecuația diferențială Monge definind curbele tetraedrale (v. probl. 57) devine $(b - c)\,dy\,dz + (c - a)\,dz\,dx + (a - b)\,dx\,dy = 0$; tangentele (dx, dy, dz) care o satisfac sînt paralele cu pînza conului $(b - c)\,yz + (c - a)\,zx + (a - b)\,xy = 0$, tăind planul impropriu după o conică. Prin o transformare proiectivă putem reduce conica la ombilicală. *Apl.* a) Cu C în Oxy, avem $\bar{r}'^2 = x'^2 + y'^2 = 0$, adică $y + ix = \text{const.}$: *în plan, singurele curbe izotrope sînt dreptele izotrope.* b) Fie 2 curbe date prin același parametru u și funcțiile $f(u)$ și $g(u)$; un punct oarecare al dreptei care unește puncte omologe (pentru același u) are coordonatele de forma (58') cu funcția $(f + tg)/(1 + t)$ cu t un nou parametru; pentru $t = \text{const.}$, obținem o nouă curbă izotropă. c) $\operatorname{ctg}\theta = i$.

67 *Podara unei curbe în spațiu C, în raport cu un punct* Ω, e locul punctului de intersecție M al tangentei în P la C cu planul prin Ω paralel cu planul normal în P la C; să se găsească ecuațiile podarei curbei C în raport cu originea O. *Apl.*: C e o elice circulară.

R. Cu $\Sigma ff' = ff' + gg' + hh'$, $\Sigma f'^2 = f'^2 + g'^2 + h'^2$, podara are ecuațiile (fig. 33)

$$(49)\qquad x = f - f'\Sigma ff'/\Sigma f'^2,\ y = g - g'\Sigma ff'/\Sigma f'^2,\ z = h - h'\Sigma ff'/\Sigma f'^2.$$

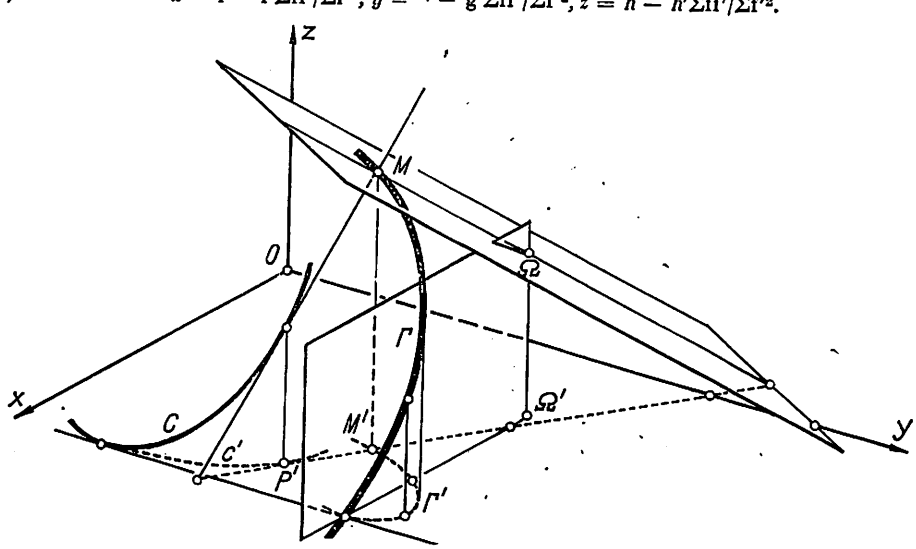


Fig. 33

Apl. Podara elicei (6) e spirala hiperboloidică de ecuații (fig. 34)

$$x = r\left(\cos t + \frac{k^2 t}{r^2 + k^2}\sin t\right),\ y = r\left(\sin t - \frac{k^2 t}{r^2 + k^2}\cos t\right),\ z = \frac{r^2 k t}{r^2 + k^2}.$$

68 Să se afle normala la curba (25) care întîlnește axa Ox.

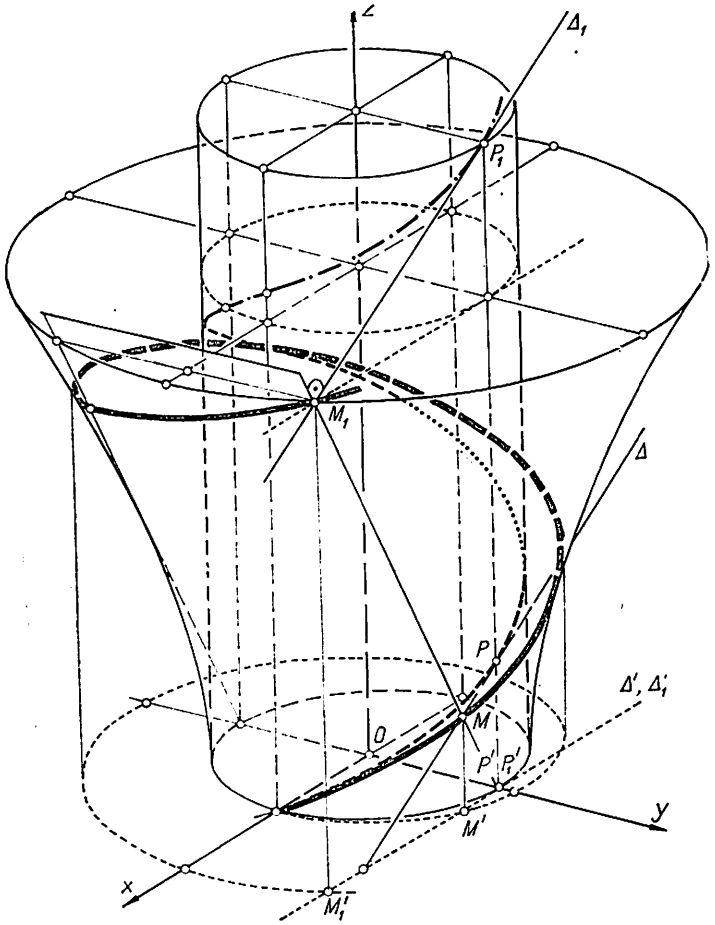


Fig. 34

R. Normala e dreapta care trece prin $P \in (25)$ și punctul A unde planul normal în P la curbă taie axa Ox.

69 Fie curba $C: x = \ln t,\ y = 2t,\ z = t^2$. Se cere: a) Să se determine punctele de pe curbă ale căror plane normale sînt paralele cu dreapta $x + 4y = 0,\ y - z = 0$. b) Să se arate că normala principală în orice punct al curbei e paralelă cu un plan.

R. a) $t = 1$; $x + 2y + 2z - 6 = 0$. b) $(x - \ln t)/2t = (y - 2t)/(2t - 1) = -(z - t^2)/2t$; $x + z = 0$.

70 Să se găsească ecuațiile vectoriale ale muchiilor și fețelor triedrului $S-F$ (triedrul Serret-Frenet) asociat curbei (16) în punctul său curent. *Apl.* a) Elicea circulară (6). b) Versorii fundamentali ai triedrului $S-F$ pentru

curba $\bar{r} = a(t - \sin t)\,\bar{i} + a(1 - \cos t)\,\bar{j} + 4a\cos\frac{t}{2}\,\bar{k}$. c) Ecuaţiile intersecţiei muchiilor triedrului $S-F$ cu Oxy, cînd arcul s e parametrul curbei.

R. Vectorii tangentă, normală principală şi binormală sînt

(50) $$\bar{\tau} = \bar{r}',\ \bar{\nu} = (\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}' = (\bar{r}'^2)\,\bar{r}'' - (\bar{r}' \cdot \bar{r}'')\,\bar{r}',\ \bar{\beta} = \bar{r}' \times \bar{r}'';$$

deci ecuaţiile vectoriale ale tangentei, normalei principale şi binormalei :

(50′) $$\bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{r}',\ \bar{R} = \bar{r} + \lambda\,[(\bar{r}'^2)\,\bar{r}'' - (\bar{r}' \cdot \bar{r}'')\,\bar{r}'],\ \bar{R} = \bar{r} + \lambda(\bar{r}' \times \bar{r}'').$$

Planul normal, planul osculator şi planul rectificant au, respectiv, ecuaţiile

(50″) $$\pi_n : (\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{r}' = 0,\ \pi_0 : (\bar{R} - \bar{r}\ \bar{r}'\ \bar{r}'') = 0,\ \pi_r : (\bar{R} - \bar{r}\ \bar{r}' \times \bar{r}''\ \bar{r}') = 0.$$

Apl. a) $\tau : -(x - r\cos t)/r\sin t = (y - r\sin t)/r\cos t = (z - kt)/k$, $\bar{\nu} : x/\cos t = y/\sin t = (z - kt)/0$, $\beta : (x - r\cos t)/k\sin t = -(y - r\sin t)/k\cos t = (z - kt)/r$, $\pi_n : rx\sin t - ry\cos t - kz + k^2t = 0$, $\pi_0 : kx\sin t - ky\cos t - rz - rkt = 0$, $\pi_r : x\cos t + y\sin t - r = 0$. *Obs.* $\cos(\widehat{\bar{\tau}, \bar{k}}) = k/\sqrt{r^2 + k^2}$, $\cos(\widehat{\bar{\nu}, \bar{k}}) = 0$ (normala principală coincide cu normala la cilindru în punctele elicei), $\cos(\widehat{\bar{\beta}, \bar{k}}) = r/\sqrt{r^2 + k^2}$. b) Versorii fundamentali ai triedrului $S-F$ sînt

(50‴) $$\bar{l} = \frac{\bar{\tau}}{|\bar{\tau}|} = \frac{\bar{r}'}{\bar{r}'} = \frac{d\bar{r}}{ds},\ \bar{n} = \frac{\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\Big|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2},\ \bar{b} = \frac{\bar{\beta}}{|\bar{\beta}|} = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} = \bar{l} \times \bar{n}.$$

Deci $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}\,\bar{i} + \cos\frac{t}{2}\,\bar{j} - \bar{k}\right)$, $\bar{n} = \cos\frac{t}{2}\,\bar{i} - \sin\frac{t}{2}\,\bar{j}$, $\bar{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}\,\bar{i} + \cos\frac{t}{2}\,\bar{j} + \bar{k}\right)$. *Obs.* $\cos(\widehat{\bar{l}, \bar{k}}) = \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{k}}) = -1/\sqrt{2}$, $\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{k}}) = 0$; deci curba e o elice.

c) Avem $\bar{r}'^2 = 1$ şi $\bar{r}' \cdot \bar{r}'' = 0$; din $\bar{R} \cdot \bar{k} = 0$ se determină λ.

71 Să se determine funcţia $f(t)$ astfel ca una din muchiile tried. $S-F$ asociat curbei : a) $\bar{r} = f(t)\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + t\,\bar{k}$, b) $\bar{r} = t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j} + f(t)\,\bar{k}$ să fie mereu paralelă cu planul Oxy.

R. a) $\bar{\tau} \cdot \bar{k} \neq 0$; $\bar{\nu} \cdot \bar{k} = 0$ dacă $\sin 2t - 2f'f'' = 0$, cu $f(t) = \int\sqrt{C_1 - \cos^2 t}\,dt + C_2$; $\bar{\beta} \cdot \bar{k} = 0$ dacă $f'\sin t + f''\cos t = 0$, adică $f(t) = C_1\sin t + C_2$. b) $\bar{\tau} \cdot \bar{k} = 0$ cînd $f' = 0$, deci $f(t) = C_1$ (o parabolă); $\bar{\nu} \cdot \bar{k} = 0$ dacă $(4t^2 + 1)f'' - 4tf' = 0$ cînd $f(t) = C_1\,[2t\sqrt{4t^2 + 1} + \ln(2t + \sqrt{4t^2 + 1})] + C_2$; $\bar{\beta} \cdot \bar{k} \neq 0$.

72 Să se determine punctele de pe curba $x = 1/t$, $y = \ln t$, $z = t$ unde normala principală e paralelă cu planul $5x + 2y - 5z + 1 = 0$.

73 Să se determine suprafaţa riglată născută de normalele principale ale curbei (30); de asemenea, triedrul $S-F$ în originea axelor.

R. $x = at(1 + v(9c^2t^2 + b^2))$, $y = b(t^2 + v(a^2 - 9c^2t^4))$, $z = ct(t^2 + 3v(2b^2t^2 + a^2))$. În O, triedrul $S - F$ coincide cu triedrul cartezian de axe.

74 Fiind dată elicea circulară (6), se cere : a) Să se găsească locul extremităţilor vectorilor de modul constant cu punctul de aplicaţie în punctul curent al curbei şi coliniari unui versor fundamental corespunzător. b) Suprafaţa desfăşurabilă generată de una din muchiile triedrului $S-F$.

R. a) Elicele $\bar{R} = \bar{r} + l\bar{l}$, $\bar{R} = \bar{r} + l\bar{n}$, $\bar{R} = \bar{r} + l\bar{b}$. b) $\bar{R} = \bar{r} + v\bar{l}$, $\bar{R} = \bar{r} + v\bar{n}$ $\left(y = x\,\mathrm{tg}\frac{z}{k}\right)$, $\bar{R} = \bar{r} + v\bar{b}$.

75 Să se determine punctele de pe curbă $x = 2/t$, $y = \ln t$, $z = -t^2$ ale căror binormale să fie paralele cu planul $x - y + 8z - 1 = 0$.

76 Să se determine unghiurile dintre axa Oz şi versorii fundamentali ai elicei (38″).

R. Cum (v. probl. 55) $- x''/y' = y''/x' = k$, găsim $\bar{\tau} = (x'\bar{i} + y'\bar{j} + a\bar{k})/\sqrt{1 + a^2}$, $\bar{b} = (-ax'\bar{i} - ay'\bar{j} + \bar{k})/\sqrt{1 + a^2}$, $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{\tau} = -y'\bar{i} + x'\bar{j}$; deci $\cos(\bar{\tau}, \bar{k}) = a/\sqrt{1 + a^2}$, $\cos(\bar{n}, \bar{k}) = 0$ (normala principală coincide cu normala la cilindru în punctele elicei), $\cos(\bar{b}, \bar{k}) = 1/\sqrt{1 + a^2}$. *Obs.* În cazul (6), v. probl. 70. Pentru elicea cilindro-conică (9) sau (40′): $\cos(\bar{\tau}, \bar{k}) = bk/\sqrt{a^2(1 + k^2) + k^2b^2}$, $\cos(\bar{n}, \bar{k}) = 0$, $\cos(\bar{b}, \bar{k}) = a\sqrt{1 + k^2}/\sqrt{a^2(1 + k^2) + k^2b^2}$, în cazul (40″): $\cos(\bar{\tau}, \bar{k}) = b/\sqrt{a^2(1 + h^2) + b^2}$, $\cos(\bar{n}, \bar{k}) = 0$, $\cos(\bar{b}, \bar{k}) = a\sqrt{1 + h^2}/\sqrt{a^2(1 + h^2) + b^2}$.

77 Fiind dată curba $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, se cere : a) Să se arate că una din bisectoarele unghiului dintre tangentă şi binormala la curbă are o direcţie fixă. b) Să se determine punctele curbei ale căror normale principale sînt perpendiculare pe dreapta $x - y - z = 0$, $y = mz$.

R. a) Luînd $x = t$, găsim $\bar{\tau} - \bar{b} = \bar{j} - \bar{k}$. b) Fie $\bar{d}$ $(m + 1, m, 1)$ direcţia dreptei ; din $\bar{d} \cdot \bar{n} = 0$, rezultă $t = \pm a\sqrt{(1 + \sqrt{3})/2}$.

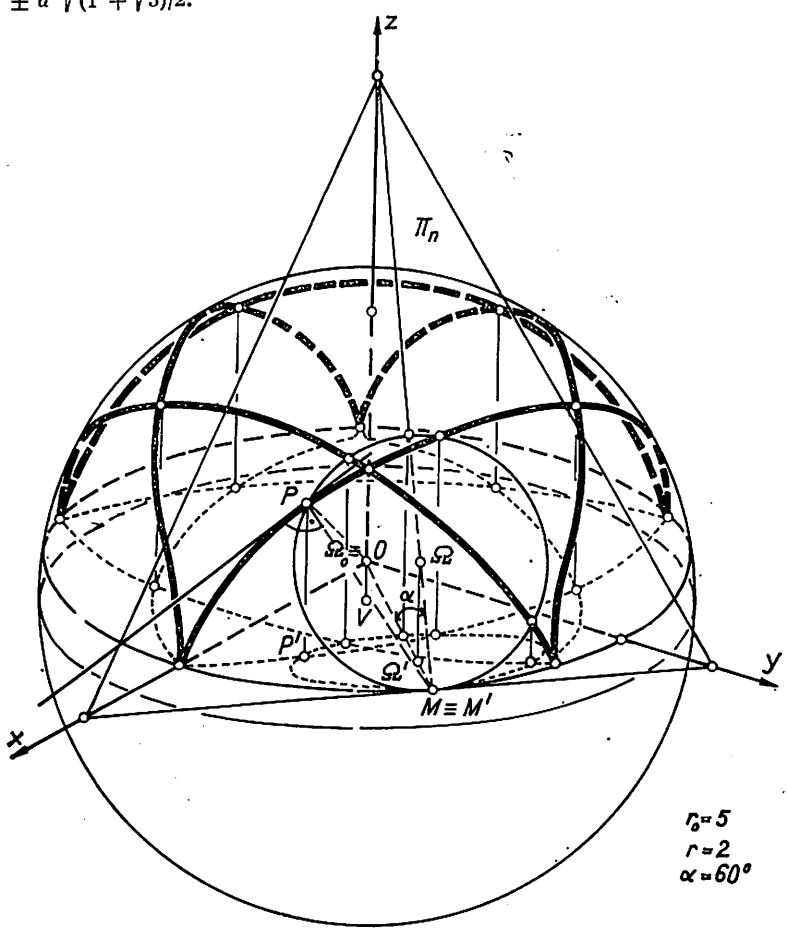
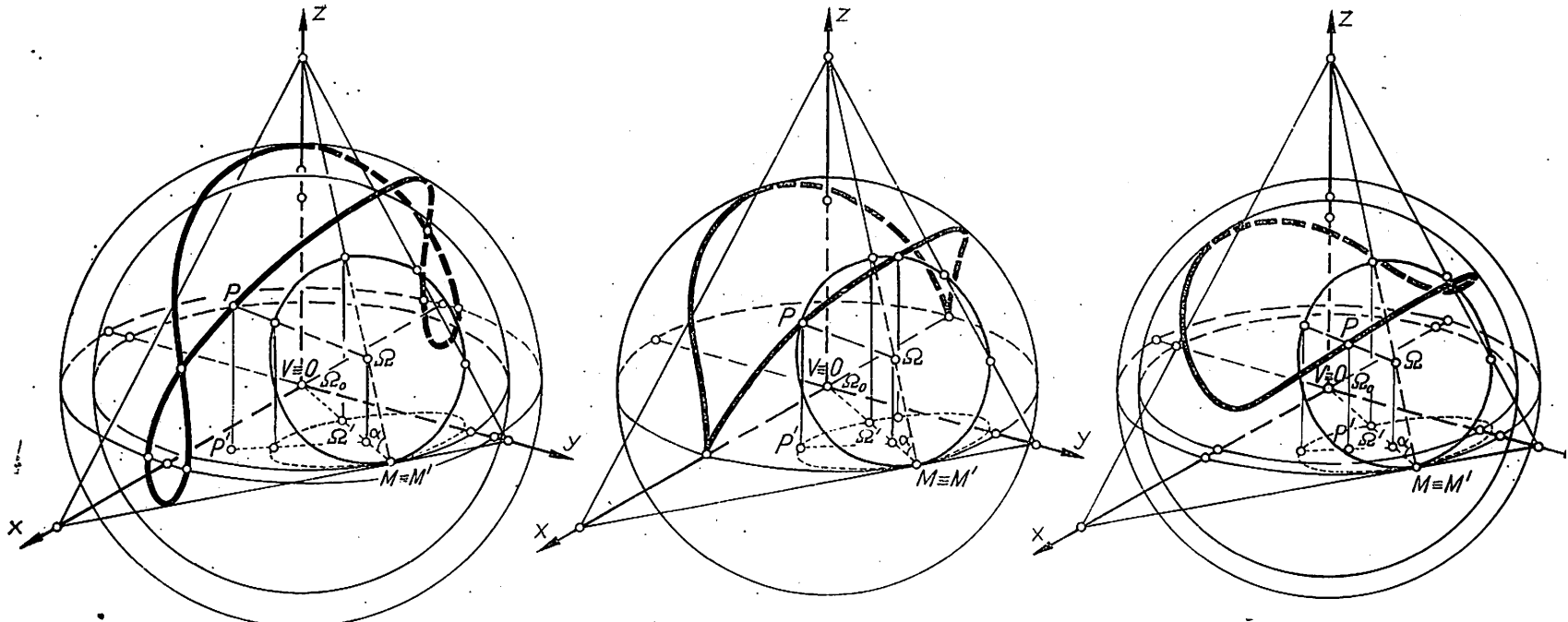


Fig. 35



$r_0 = 4 \; ; \; r = 2 \; ; \; \alpha = 60°$

Fig. 36

78 Dacă normala principală a unei curbe în spațiu taie sub un unghi constant o dreaptă fixă d, planul rectificant în orice punct al curbei trece printr-un punct fix Ω situat pe dreapta d.

R. Fie $\bar{\rho}$ = versor d și $O \in d$. Deoarece $\bar{r}$, $\bar{\rho}$, $\bar{n}$ sînt coplanari, avem $\bar{\rho}.\ \bar{n} = \cos\theta$, $\bar{r} = \lambda\bar{\rho} + \mu\bar{n}$ (λ, μ — funcții scalare de arcul s al curbei); de unde $\bar{r}' = \lambda'\bar{\rho} + \mu\bar{n}' + \mu'\bar{n}$ sau (prin înmulțire scalară cu $\bar{n}$) $\lambda' \cos\theta + \mu' = 0$, căci $\bar{r}' = \bar{t}$, $\bar{t}.\bar{n} = 0$, $\bar{n}^2 = 1$ iar $\bar{n}.\bar{n}' = 0$. Însă $\bar{r}_0 = \overline{O\Omega} = k\bar{\rho}$ și $(\bar{r}_0 - \bar{r}).\bar{n} = 0$, adică $[(k - \lambda)\bar{\rho} - \mu\bar{n}].\bar{n} = 0$ sau $k \cos\theta = \lambda\cos\theta + \mu$; de unde $k' \cos\theta = \lambda' \cos\theta + \mu' = 0$ sau $k = \text{const.}$, deci Ω e fix.

79 Se numește *epicicloidă sferică* traiectoria unui punct al unui cerc mobil care se rostogolește fără alunecare pe un cerc fix, planele celor 2 cercuri formînd un unghi constant. Se cere: a) Ecuațiile curbei. b) Curba e sferică. c) Planul normal la curbă în P conține punctul de contact M al celor 2 cercuri.

R. a) $\lambda = r_0/r$ fiind *modulul* curbei, ecuațiile ei sînt

$$x = r_0 \cos t - r(1 - \cos\lambda t)\cos\alpha\cos t + r\sin\lambda t \sin t,\ y = r_0 \sin t - r(1 - \cos\lambda t)\cos\alpha \sin t - r\sin\lambda t \cos t,\ z = r(1 - \cos\lambda t)\sin\alpha. \tag{51}$$

Dacă λ e număr rațional, curba e algebrică și rațională (fig. 35, 36); cînd λ e irațional, curba e transcendentă. Altă generare: Traiectoria unui punct care aparține cercului de bază al unui con de rotație care se rostogolește fără alunecare pe un con fix. Vîrful V $(0, 0, (r - r_0\cos\alpha)/\sin\alpha)$ al acestui con e punctul comun al axei Oz și perpendicularei prin centrul cercului mobil C $((r_0 - r\cos\alpha)\cos t, (r_0 - r\cos\alpha)\sin t, r\sin\alpha)$ pe planul acestui cerc: $x\cos t + y\sin t + z/\text{tg}\alpha - r_0 = 0$. b) Sfera cu centrul V și de rază $R^2 = l_0^2 + ((r_0\cos\alpha - r)/\sin\alpha)^2$. c) $M(r_0\cos t, r_0\sin t, 0) \in \pi_n$.

6. CURBURA UNEI CURBE STRÎMBE

80 Să se găsească curbura curbei (cu ajutorul formulei sau al indicatoarei sferice a tangentelor): a) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$; b) $x = 2abt$, $y = a^2 \ln t$, $z = b^2 t$; c) $x^3 = 3a^2 y$, $2xz = a^2$; d) $x = a\cos t/\text{ch}\, t$, $y = a\sin t/\text{sh}\, t$, $z = a(t - \text{th}\, t)$; e) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

R. a) $\rho = 2\sqrt{2}\,\text{ch}^2 t$. b) $2ab t\rho = (a^2 + b^2t^2)^2$. c) $1/\rho = |d\sigma/ds| = 2(2a^2x^2/(2x^4 + a^4))^2/x$, unde $d\sigma = 4a^2x\,dx/(2x^4 + a^4)$ e diferențiala arcului indicatoarei sferice a tangentelor. d) $2\rho = a\,\text{ch}\, t$. e) $\rho\sqrt{a + b} = \sqrt{(a + b + 2z)^3}$.

81 Fiind dată curba $x = \sin t^2$, $y = \sin^2 t$, $z = e^{\sin 2t}$, se cere ca în punctul $P(0, 0, 1)$ al curbei: a) să se scrie ecuațiile muchiilor triedrului S—F; b) să se calculeze raza de curbură a curbei.

82 Să se determine punctele de pe curba: a) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$; b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\dfrac{t}{2}$ unde curbura are un extremum.

R. a) $1/\rho = 6/25\,|\sin 2t|$ e minim dacă $|\sin 2t| = 1$, deci $t = k\pi + \pi/4$; ρ e minimă dacă $|\sin 2t| = 0$, deci $t = k\pi/2$. b) $1/\rho = 1/8a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right| : t = (4k + 1)\pi$, $t = 2k\pi$.

83 În fiecare punct al curbei $C: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 14a\sin\dfrac{t}{2}$ se ia, în sensul pozitiv al normalei principale, un segment a cărei lungime e $l = 4a^2 k$, unde k e curbura curbei în acel punct. Să se afle ecuația planului osculator al curbei Γ descrise de extremitatea segmentului.

R. $\Gamma : \overline{R} = \bar{r} + 4a^2k\bar{n} = at\,\bar{i} + a\,\bar{j} + 3a \sin \frac{t}{2}\,\bar{k} \cdot \pi_0 : y - a = 0$ are normala fixă, deci Γ e o curbă plană : sinusoida $z = 3a \sin \frac{x}{2a}$, $y - a = 0$.

84 Să se arate că, pentru o curbă strîmbă $C : \bar{r} = \bar{r}(s)$, avem relaţiile

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' = -1/\rho^2,\ \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

R. Din $\bar{r}'^2 = 1$, $\bar{r}''^2 = 1/\rho^2$: $\bar{r}' \cdot \bar{r}'' = 0$, $\bar{r}''^2 + \bar{r}' \cdot \bar{r}''' = 0$, $\bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = -(1/\rho^3)\rho'$.

85 Să se arate că, în punctul P_0, curbura curbei C e egală cu curbura proiecţiei C_0 a curbei C pe planul său osculator în P_0.

R. Raportînd pe C la triedrul $S-F$ asociat în P_0, curbele C şi $C_0 : \bar{r} = at\bar{i} + \frac{bt^2}{2!}\bar{j} + \frac{t^3}{3!}\bar{r}_0''' + \ldots = at\bar{i} + \frac{bt^2}{2!}\bar{j} + \frac{t^3}{3!}\bar{\mu}(t)$, $\overline{R} = \bar{r} - (\bar{r} \cdot \bar{k})\,\bar{k} = at\bar{i} + \frac{bt^2}{2!}\bar{j} + \frac{t^3}{3!}\bar{\nu}(t)$; deoarece $\bar{r}_0' = \overline{R}_0' = a\bar{i}$, $\bar{r}_0'' = \overline{R}_0'' = b\bar{j}$, rezultă $k_0 = K_0 = b/a^3$.

86 Dacă d e distanţa de la origine la planul osculator la curba (41) iar ρ raza de curbură în punctul respectiv, să se determine condiţia ca să aibă loc relaţia $\rho = h\,(t/d)^2$, h—constanta de proporţionalitate. Să se arate că, pentru $t = 0$, planul osculator şi planul normal trec prin Ox; în ce condiţii acestea devin plane bisectoare ale diedrului (Oxy, Oxz).

87 Să se arate că raza de curbură a elicei (9) e proporţională cu distanţa de la punctul elicei la axa conului pe care se află.

88 Pe un cerc cu centrul Ω şi de rază a se consideră un punct fix M_0 şi unul mobil M. Fie $t = \overset{\frown}{M_0\Omega M}$, $\bar{R} = \overline{\Omega M}$, $\bar{T}$ versorul tangentă la cerc în M şi $\bar{a} = \bar{R} \times \bar{T}$. Vîrful vectorului $\bar{r} = \bar{R}\,\mathrm{ch}\,t + (a\bar{T} + 2\bar{a})\,\mathrm{sh}\,t$ descrie o curbă strîmbă C. Să se arate : a) Vectorii $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ fac unghiuri constante cu vectorii $\bar{R}$, $\bar{T}$, $\bar{a}$ (curba C e o elice). b) În fiecare punct $P \in C$, distanţa de la origine la feţele triedrului $S-F$ asociat (în P la C) e proporţională fie cu arcul s al curbei (avînd originea în punctul $t = 0$), fie cu raza de curbură.

R. a) $a\sqrt{2}\bar{i} = a\bar{T} + \bar{a}$, $a\sqrt{2}\bar{b} = \bar{a} - a\bar{T}$, $a\bar{n} = -\bar{R}$, $\cos(\bar{i}, \overline{R}) = 0$, $\cos(\bar{i}, \bar{T}) = \cos(\bar{i}, \bar{a}) = 1/\sqrt{2}$. b) $s = 2\sqrt{2}a\,\mathrm{sh}\,t$, $\rho = 4a\,\mathrm{ch}\,t$, $d_0 = \bar{r} \cdot \bar{b} = s/4$, $d_n = \bar{r} \cdot \bar{i} = 3s/4$, $d_r = \rho/4$.

5. TORSIUNEA UNEI CURBE STRÎMBE

89 Să se găsească curbura şi torsiunea curbei : a) $x = \cos 2t \cos t$, $y = \cos 2t \sin t$, $z = t$; b) $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$; c) $x^2 - y^2 = z$, $x = y^2$; d) $x^2 - y^2 = 1$, $z = (x + y)^2$; e) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$; f) $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$.

R. a) $1/\rho^2 = (5 + 9\cos 2t + 4\cos 4t)/8\ \cos^6 t$, $1/\tau = -(15\cos 2t + 6\cos 6t)/(5 + \cos 2t + 4\cos 4t)\cos t$. b) $(e^{2t}(1 + t)^2 + 1 - t^2)^3 = \rho^2\,[2e^{2t}(t((t^2 + 2)^2 + 4) + (2 + t^2)^2]$, $1/\tau = 2e^t(6 + 2t + t^2 + t^3)/[2e^t\,(t((t^2 + 2)^2 + 4) + (t^2 + 2)^2]$. c) $(16t^6 - 16t^4 + 8t^2 + 1)^3 = 8\rho^2(32t^6 + 18t^4 -$

$-6t^2+1)$, $32t^4+18t^4-6t^2+1=6\tau t$. d) Se ia $x=\mathrm{ch}t$, $y=\mathrm{sh}t$; $(x^2+y^2+z^2)^3=\rho^2[1+4z^2(5x^2-8xy+5y^2)]$, $-4z(z-2)\ \tau=1+4z^2(5x^2-8xy+5y^2)$. e) $\rho=-\tau=3(t^2+1)^2$. f) $\rho=\tau=2t/(1+2t^2)^2$.

90 Pe bicilindrica $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ se consideră punctul $P_0(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$. Să se calculeze, în P_0, curbura şi torsiunea curbei.

R. P_0 fiind un punct ordinar, există o vecinătate a lui în care curba e simplă şi netedă; atunci putem obţine pe y şi z ca funcţii de x. Avem $x+yy'=0$, $yy'+zz'=0$, care în P_0 au valorile $y_0'=-1$, $z_0'=1$; $1+y'^2+yy''=0$, $zz''+z'^2+yy''+y'^2=0$ şi $y_0''=-2\sqrt{2}/a$, $z_0''=0$ etc. Rezultă $\rho_0=3\sqrt{3}a/4$, $1/\tau_0=0$: în vecinătatea lui P_0, curba e un arc de curbă plană.

91 Fie curba lui Viviani $x^2+y^2+z^2-4a^2=0$, $x^2+z^2-2ax=0$. Să se găsească: a) o reprezentare parametrică a curbei; b) proiecţiile ei pe planele de coordonate; c) curbura şi torsiunea curbei.

92 Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei $x=a\,\mathrm{ch}\,t\cos t$, $y=a\,\mathrm{ch}\,t\sin t$, $z=at$. Să se arate că segmentul de pe normala curbei ce întîlneşte axa Oz e egală cu raza de torsiune în punctul respectiv.

93 Să se găsească condiţiile ca de-a lungul curbei: a) de ecuaţii (41); b) cubice (30) să avem relaţia $\rho+\tau=0$.

R. a) $b^2c^2\,\mathrm{sh}^2t+a^2c^2\,\mathrm{ch}^2t+a^2b^2=(abc)^{3/2}(a^2\,\mathrm{sh}^2t+b^2\,\mathrm{ch}^2t+c^2)$ nu depinde de t numai dacă $b^2c^2/a^2=a^2c^2/b^2=a^2b^2/c^2$, adică $a=b=c$. *Obs.* Dacă impunem condiţia $\rho/\tau=$ const., obţinem $a=c$ (v. şi probl. 49). b) $2b^2=\pm 3ac$ (v. şi probl. 33), cînd $\rho=-\tau=\pm(3ct^2\pm a)^2/6ac$ (+ dacă $ac>0$ şi − dacă $ac<0$) *Ex.*: cubica (22′); $y=x^2$, $3z=2x^3$; $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$; $x=t$, $y=3t^2$, $z=6t^3$; $6z=5xy$, $4y+5x^2=0$.

94 Să se arate că raportul dintre curbura şi torsiunea unei elice e constant. *Ex.*: elicele (6) şi (9).

R. Cum (v. probl. 55) $-x''/y'=y''/x'=\lambda(\sigma)$, pentru elicea (38″) găsim $1/\rho=\lambda(\sigma)/(1+a^2)$, $1/\tau=-a\,\lambda(\sigma)/(1+a^2)$; deci $\rho/\tau=-1/a$. *Ex.* a) $1/\rho=r/(r^2+k^2)$, $1/\tau=-k/(r^2+k^2)$ sînt constante. b) $\rho=m^2e^{kt}/a\sqrt{k^2+1}$, $\tau=-m^2e^{kt}/bk$, cu $m^2=m^2(k^2+1)+b^2k^2$, sînt funcţii liniare de arcul $s=me^{kt}/k$ al elicei. *Obs.* Pt. (40″), ρ şi τ depind liniar chiar de t.

95 Să se arate că ecuaţiile: a) $x=a\sin t$, $y=a2\cos(\pi/4-t)$, $z=a(1+\cos t)$; b) $x=t^2-1$, $y=t^2$, $z=-\ln t$; c) $x=t^2(2t+1)$, $y=t(t-2)$, $z=t(t^2+1)-1$ reprezintă o curbă plană şi să se găsească planul în care se află.

R. O curbă (16) e plană dacă şi numai dacă avem condiţia

(52) $$1/\tau=0,\ \text{adică}\ (\bar r\,\bar r'\,\bar r'')=0.$$

Curba se găseşte în planul osculator π_0, care poate fi calculat într-un punct P convenabil. a) În $P(t=0)$, $\pi_0: x-y+z-a=0$. *Obs.* Ec. (23) e identic verificată; în particular şi cînd $t=0$, $t=\pi/2$ sau $t=\pi$, obţinînd sistemul $aB+2aC+D=0$, $aA+aB+aC+D=0$, $-aB+D=0$. b) $\pi_0: x-y+1=0$. c) $\pi_0: x-y+2z+2=0$.

96 Să se determine funcţia $f(t)$ astfel încît curba: a) $x=t^2$, $y=-\ln t$, $z=f(t)$; b) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=f(t)$ să fie o curbă plană.

97 Se numeşte *curbă Ţiţeica* o curbă strîmbă pentru care, în fiecare punct P al ei, există relaţia

(53) $$\tau d^2=\text{const.},\ \text{adică}\ (\bar r_0-\bar r\ \bar r'\ \bar r'')^2/(\bar r'\ \bar r''\ \bar r''')=\text{const.},$$

unde $1/\tau$ e torsiunea în P iar d e distanţa de la un punct fix Ω din spaţiu ($\bar r_0=\overline{O\Omega}$) la planul osculator în P la curbă. Se cere: a) Să se găsească transformata curbei printr-o centro-afinitate cu centrul în Ω şi de modul Δ.

b) Să se arate că : $b_1) x = e^{-2t}$, $y = e^t \cos(\sqrt{3}t)$, $z = e^t \sin(\sqrt{3}t)$; $b_2)$ $x = at$, $y = bt$, $z = t^{-3}/ab$; $b_3)$ $x = t^{-1}$, $y = t^{-2}$, $z = t^3$; $b_4)$ $x = t(1 + t)$, $y = t(1 - t)$, $z = (1 - t)(2t^4 + t^3 + t + 1)\, t^{-3}$ e o curbă Țițeica, punctul fix fiind originea. c) Pentru ce valori ale constantelor k și m curba $x = t\cos(k \ln t)$, $y = t\sin(k \ln t)$, $z = t^m$ e o curbă Țițeica?

98 Se numește *curbă afină* o curbă C de ecuații parametrice de forma

$$x = At^a,\ y = Bt^b,\ z = Ct^c \quad (A, B, C, a, b, c - \text{constante}), \tag{54}$$

care e totodată curbă Țițeica. Să se găsească : a) condiția ca ecuația (54) să reprezinte o curbă afină; b) un punct în planul osculator (în P la C) care să descrie tot o curbă afină.

R. a) Condiția e (fig. 37)

$$a + b + c = 0. \tag{54'}$$

b) Din $\begin{vmatrix} At^a - A'u^{a'} & Aat^{a-1} & Aa(a-1)t^{a-2} \end{vmatrix} = 0$ se scoate $u = f(t)$.

99 Vectorii de poziție ai punctelor unei curbe strîmbe (16) verifică ecuația

$$\bar{r}''' + a_1\bar{r}'' + a_2\bar{r}' + a_3\bar{r} = 0 \quad (a_3 \neq 0); \tag{55}$$

ecuația definește nu numai curba (16), ci și toate transformatele ei centro-afine. Se cere : a) Să se arate că, printr-o schimbare $\sigma = \sigma(t)$ a parametrului pe curbă, putem reduce ecuația (55) la forma canonică

$$\dddot{\bar{r}} + p\ddot{\bar{r}} + q\dot{\bar{r}} + \bar{r} = 0 \quad \left(\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma}, \ldots\right), \tag{55'}$$

unde invarianții p și q sînt *curburile afine* iar σ *arcul afin* al curbei. b) Să se determine condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația (55) să reprezinte o curbă Țițeica. c) Transformata prin polare reciproce a unei curbe Țițeica, față de sfera $S(0; 1)$, e de asemenea o curbă Țițeica. d) Să se afle curbele Țițeica cu curbură afină constantă.

R. Derivînd succesiv de 3 ori expresia $\bar{r} = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\bar{k}$ și eliminînd pe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ se obține ecuația (55), cu $a_1 = -(\bar{r}\bar{r}'\bar{r}''')/(\bar{r}\bar{r}'\bar{r}'')$, $a_2 = (\bar{r}\bar{r}''\bar{r}''')/(\bar{r}\bar{r}'\bar{r}'')$, $a_3 = -(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')/(\bar{r}\bar{r}'\bar{r}'')$. *Obs.* Dacă $a_3 = 0$, curba (16) e plană. Fie $P(x, y, z) \in C$; x, y, z sînt soluții ale ecuației

$$\theta''' + a_1\theta'' + a_2\theta' + a_3\theta = 0. \tag{55''}$$

Invers, fie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației (55''); cînd soluțiile satisfac condiția (23), curba e plană. Soluția generală a ecuației (55'') e

$$\theta = C_1x(t) + C_2y(t) + C_3z(t) \quad (C_1, C_2, C_3 - \text{constante}). \tag{55'''}$$

Rezultă că un alt sistem fundamental de soluții $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ se obține din sistemul $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ printr-o centro-afinitate ce păstrează originea, curba C_1 fiind transformata centro-afină a lui C. a) Ecuația transformată e

$$\dddot{\bar{r}} + b_1\ddot{\bar{r}} + b_2\dot{\bar{r}} + b_3\bar{r} = 0 \text{ cu } b_1 = \frac{3\sigma''}{\sigma'^2} + a_1\frac{1}{\sigma'},\ b_2 = \frac{\sigma'''}{\sigma'^3} + a_1\frac{\sigma''}{\sigma'^3} + a_2\frac{1}{\sigma'^2},\quad b_3 = a_3\frac{1}{\sigma'^3}. \tag{55^{IV}}$$

Eliminînd σ'' între b_3 și b_1 și ținînd seama de b_3, respectiv pe σ''' între b_1 și b_2 și ținînd seama de b_1 și b_3, rezultă invarianții

$$k_1 = (a_3' + a_1a_3)/a_3^{4/3},\ k_2 = (a_1' + \frac{2}{3}a_1^2 - 3a_2)/a_3^{2/3}. \tag{55^{V}}$$

Luînd $\sigma'^3 = a_3$, atunci invarianții (55^V) devin

(55^{VI}) $k_1 = b_1$, $k_2 = k_1 + \frac{2}{3} k_1^2 - 3b_2$; deci $b_1 = k_1 = p$, $b_2 = \frac{1}{3}(k_1 + \frac{2}{3} k_1^2 - k_2) = q$, $b_3 = 1$,

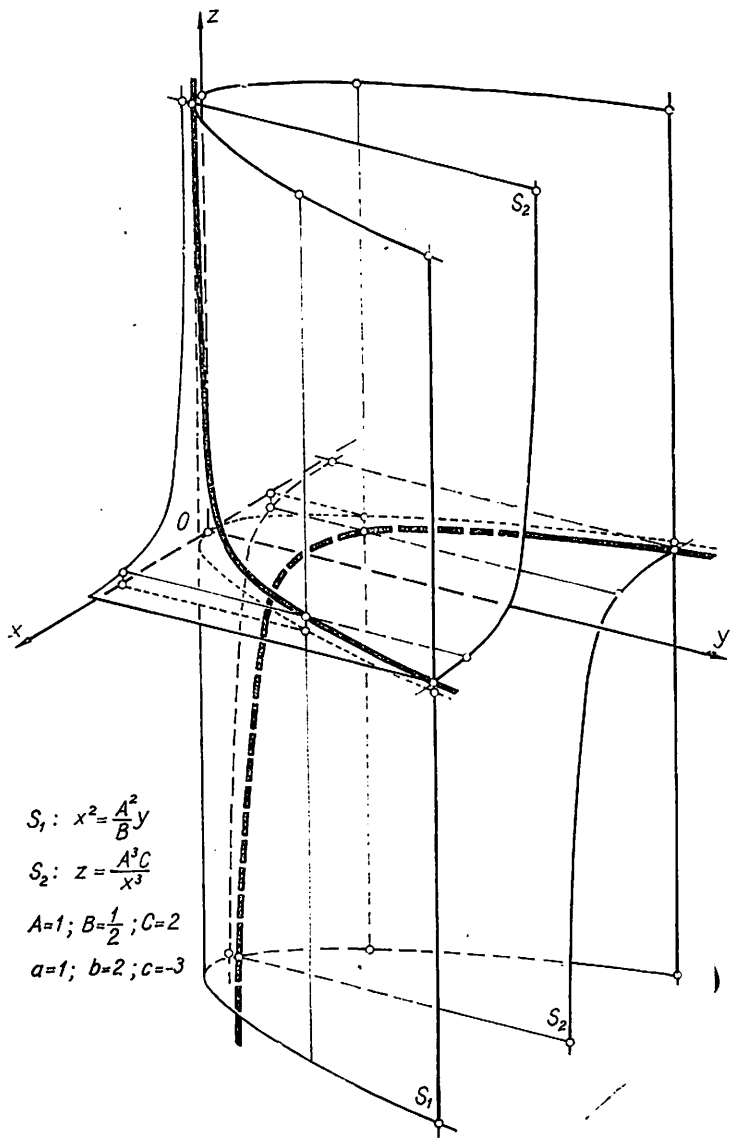


Fig. 37

care sînt invarianți în raport cu grupul centro-afin. b) Înmulțind vectorial pe (55′) cu $\dddot{\bar{r}}$, iar scalar cu $\bar{r}$ rezultatul obținut, rezultă $p = -(\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}})/(\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}})$; cu (55′) : $\tau d^2 = (\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}})$. Derivînd, deducem

(55^{VII}) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}(\tau d^2) = (\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}) = -p\,(\bar{r}\,\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}) = -p(\tau d^2).$$

Deci: *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația (55) să reprezinte o curbă Țițeica e* $p = 0$ ($a_3' + a_1 a_3 = 0$). c) Transformatul lui $P \in C$ e $P_1 \in C_1$, transformata C_1 (a lui C): $\bar{R}\bar{r} - 1 = 0$, $\bar{R}\bar{r}' = 0$, $\bar{R}\bar{r}'' = 0$ fiind curba de întoarcere a planului polar π: $\bar{R}\bar{r} - 1 = 0$ (v. [40], p. 151). Din $P_1 \in C_1$ rezultă $\bar{r}_1\bar{r} - 1 = 0$, $\bar{r}_1\bar{r}' = 0$, $\bar{r}_1\bar{r}'' = 0$. Dacă $P \in (55')$ cu $p = 0$ iar $P_1 \in (55)$, rezultă (din derivarea ecuației de mai sus) că $a_1 = 0$, $a_2 = q$, $a_3 = -1$. d) Ecuația caracteristică a curbei (55)′ cu $p = 0$, $q = \text{const.}$ e $r^3 + qr + 1 = 0$, care admite o rădăcină reală și 2 complex conjugate ($q^3 > 27/4$), 3 rădăcini reale distincte ($q^3 < -27/4$) sau o rădăcină dublă și una simplă ($q = -3/\sqrt[3]{4}$). În primul caz, $r_1 = 2a$, $r_{2,3} = -a \pm ib$ cu $2a = u + v$, $2b = u - v$ iar $u = \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{q^3/27 + 1/4}}$, $v = \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{q^3/27 + 1/4}}$, încît $\theta = C_1 e^{2at} + (C_2 \cos bt + C_3 \sin bt)e^{-at}$; obținem

$$x = e^{2at},\ y = e^{-at}\cos bt,\ z = e^{-at}\sin bt\ \ (b = \sqrt{1/2a - a^2}). \tag{56}$$

În al doilea caz, $r_1 = -a$, $r_2 = -b$, $r_3 = a + b$ ($2ab = -a^2 + \sqrt{a^4 + 4a}$), încît $\theta = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt} + C_3 e^{(a+b)t}$; deci curba Țițeica are ecuațiile parametrice

$$x = e^{-at},\ y = e^{-bt},\ z = e^{(a+b)t}\ \ (2ab = -a^2 + \sqrt{a^4 + 4a}). \tag{56'}$$

În ultimul caz, $r_{1,2} = \sqrt[3]{4}/2$, $r_3 = -\sqrt[3]{4}$; obținem curba Țițeica de ecuații

$$x = e^{-\sqrt[3]{4}t},\ y = te^{\sqrt[3]{4}t/2},\ z = e^{\sqrt[3]{4}t/2}, \tag{56''}$$

100 Pe normalele principale ale unei elice circulare se ia, în fiec are punct P, o lungime constantă $PQ = l$. Să se determine l astfel încît curba descrisă de Q să aibă aceeași curbură sau torsiune ca și elicea dată.

8. FORMULELE LUI SERRET-FRENET

101 Să se determine derivatele versorilor fundamentali ai triedrului $S-F$, în raport cu arcul s al curbei în spațiu (formulele $S-F$); să se dea o interpretare geometrică și expresia coeficienților formulelor $S-F$.

R. Presupunem curba în spațiu C dată prin *ecuația normală*

$$\bar{r} = \bar{r}(s)\ \ (s - \text{arcul curbei}). \tag{57}$$

Asociind fiecărui punct $P(s) \in C$ triedrul $S-F$, avem

$$\frac{d\bar{l}}{ds} = \alpha\bar{l} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b},\ \frac{d\bar{n}}{ds} = \alpha'\bar{l} + \beta'\bar{n} + \gamma'\bar{b},\ \frac{d\bar{b}}{ds} = \alpha''\bar{l} + \beta''\bar{n} + \gamma''\bar{b}. \tag{58}$$

Din $\bar{l}^2 = 1$, deducem $\bar{l}\cdot\frac{d\bar{l}}{ds} = 0$; deci $\frac{d\bar{l}}{ds} \perp \bar{l}$ și e în planul osculator π_0. Rezultă că $\frac{d\bar{l}}{ds} \perp \bar{b}$. Așadar: $\alpha = \gamma = 0$; notînd $\beta = 1/\rho$, avem

$$\frac{d\bar{l}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}. \tag{58'}$$

Din $\bar{b}^2 = 1$ obținem $\bar{b}\cdot\frac{d\bar{b}}{ds} = 0$; deci $\gamma'' = 0$ (înmulțind scalar pe (58_3) cu $\bar{b}$). Din $\bar{l}\cdot\bar{b} = 0$, avem $\bar{l}\cdot\frac{d\bar{b}}{ds} = -\bar{b}\cdot\frac{d\bar{l}}{ds} = -\bar{b}\cdot\frac{\bar{n}}{\rho} = 0$; deci $\alpha'' = 0$ (înmulțind scalar pe (58_3) cu $\bar{l}$). Așadar, notînd $\beta'' = 1/\tau$, obținem

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\tau}. \tag{58''}$$

Din $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t}$ deducem $\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{d\bar{b}}{ds} \times \bar{t} + \bar{b} \times \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\tau} \times \bar{t} + \bar{b} \times \frac{\bar{n}}{\rho}$; deci găsim

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{t}}{\rho} - \frac{\bar{b}}{\tau}. \tag{58'''}$$

Interpretarea geometrică. Fie $\bar{t}$ și $\bar{t}_1 = \bar{t} + \Delta\bar{t}$ respectiv în P și P_1 de pe C. Unghiul de contingență $\Delta\theta = \widehat{\bar{t}, \bar{t}_1}$ e dat de $\sin\Delta\theta = |\bar{t} \times \Delta\bar{t}|/|\bar{t} + \Delta\bar{t}|$; deci

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\sin\Delta\theta} \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta s} = \left|\bar{t} \times \frac{d\bar{t}}{ds}\right| = \left|\bar{t} \times \frac{\bar{n}}{\rho}\right| = \frac{1}{\rho}, \tag{59}$$

adică *definiția curburii*. Din $\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ și (58′) deducem $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{\bar{n}}{\rho}$; deci

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)^2 \left(\text{sau } \frac{1}{\rho} = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3} \text{ cînd } C \text{ are ecuația (16)}\right). \tag{59′}$$

Fie $\bar{b}$ și $\bar{b}_1 = \bar{b} + \Delta\bar{b}$ respectiv în P și P_1. Cu $\Delta\omega = \widehat{\bar{b}, \bar{b}_1}$, avem $\sin\Delta\omega = \frac{|\bar{b} \times \Delta\bar{b}|}{|\bar{b} + \Delta\bar{b}|}$; deci

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \left|\bar{b} \times \frac{d\bar{b}}{ds}\right| = \left|\bar{b} \times \frac{\bar{n}}{\tau}\right| = \frac{1}{\tau}, \tag{60}$$

adică *definiția torsiunii*. Din $\bar{n} \cdot \bar{b} = 0$ și (58″) deducem $\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)$; cu (59′) și identitatea lui Lagrange, avem

$$\frac{1}{\tau} = -\left(\frac{d\bar{r}}{ds} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right) \Big/ \left(\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)^2 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}{(\bar{r}' \times \bar{r}'')^2}. \tag{60′}$$

102 Fie elicea circulară (6). Se cere : a) Să se determine versorii fundamentali ai triedrului $S—F$ și, cu ajutorul formulelor $S—F$, să se calculeze curbura și torsiunea curbei. b) Să se afle curbura și torsiunea elicei și, cu ajutorul formulelor $S—F$, să se determine versorii fundamentali ai triedrului $S—F$.

R. a) $ds/dt = \sqrt{r^2 + k^2}$, $\bar{t} = \bar{r}' \frac{d\bar{t}}{ds} = (-r \sin t\bar{i} + \bar{r} \cos t\bar{j} + k\bar{k})/\sqrt{r^2 + k^2}$, $\bar{n} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \Big/ \left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| =$ $= -\cos t\bar{i} - \sin t\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} = (k \sin t\bar{i} - k \cos t\bar{j} + r\bar{k})/\sqrt{r^2 + k^2}$. Din (58′) și (58″): $\frac{1}{\rho} =$ $= \left|\frac{d\bar{t}}{dt}\right| \Big/ \frac{dt}{ds} = r/(r^2 + k^2)$, $\left|\frac{1}{\tau}\right| = \left|\frac{d\bar{b}}{dt}\right| \Big/ \frac{dt}{ds} = k/(r^2 + k^2)$; se ia $1/\tau = -k/(r^2 + k^2)$ pentru a satisface pe (58″). b) $|\bar{r}'| = \sqrt{r^2 + k^2}$, $|\bar{r}' \times \bar{r}''| = r\sqrt{r^2 + k^2}$, $(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') = kr^2$. Cu (59′) și (60′) calculăm pe $1/\rho$ și $1/\tau$. Calculăm ds/dt și $\bar{t}$. Conform (58′), deducem $\bar{n} = \rho \frac{d\bar{t}}{dt} \frac{dt}{ds}$ iar $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$.

Obs. Dacă P_1 e proiecția lui $P \in (6)$ pe Oxy, avem $\overrightarrow{OP_1} = r \cos t\bar{i} + r \sin t\bar{j} = -\bar{n}$.

103 Să se determine versorii fundamentali ai triedrului $S—F$, curbura și torsiunea curbei $10x - z^5 = 0, 3y - z^3 = 0$.

104 Să se arate că valoarea absolută a torsiunii unei curbe în spațiu e egală cu valoarea absolută a derivatei arcului *indicatoarei sferice a binormalelor* în raport cu arcul curbei. *Apl.* Să se afle torsiunea curbei $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$.

R. Ducem, prin O, un vector $\bar{b}_1$ egal cu versorul $\bar{b}$ al binormalei (în P la C). *Indicatoarea sferică a binormalei* lui C e curba de pe sfera $S(0;1)$ cînd P descrie pe C (fig. 38). Cum $d\bar{r}_1 = |d\bar{b}_1|$ cu (58″):

(61) $$\left|\frac{1}{\tau}\right| = \left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right| = \left|\frac{d\bar{b}_1}{ds}\right| = \left|\frac{ds_1}{ds}\right|.$$

Apl. $\bar{b} = (2a^2x^2\bar{i} - a^4\bar{j} + 2x^4\bar{k})/(2x^4 + a^4)$, $ds_1/dx = |db/dx| = 4a^2x/(2x^4 + a^4)$, $ds/dx = (2x^4 + a^4)/2a^2x^2$; deci $1/\tau = 2(2a^2x^2/(2x^4 + a^4))^2/x$. *Obs.* $\rho = \tau$.

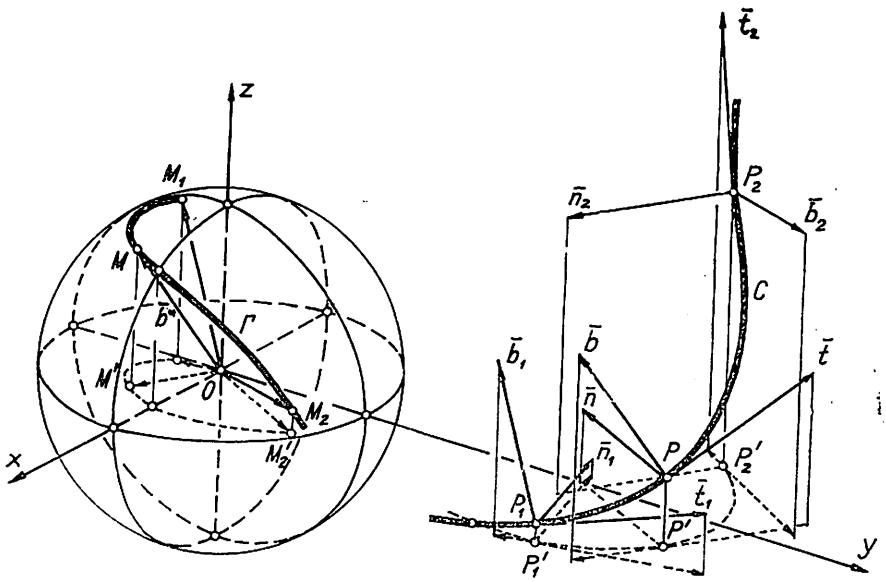


Fig. 38

105 Să se determine curbele cu curbura sau torsiunea nulă.

106 Să se arate că curbura și torsiunea unei curbe în spațiu sînt invariante față de o transformare de coordonate carteziene.

107 Să se determine torsiunea unei curbe dacă planul ei osculator trece printr-un punct fix.

108 Se numește *curbă Enneper* o curbă ale cărei plane rectificante trec printr-un punct fix. Să se arate că sînt caracteristice pentru curbă proprietățile: a) planele osculatoare sînt tangente unei sfere fixe; b) distanțele de la punctul fix la planele normale, abstracție făcînd de o constantă aditivă, sînt egale cu arcul curbei; c) raportul dintre torsiune și curbură e funcție liniară de arc.

R. $\Omega(\bar{r}_0 = \overline{O\Omega}) \in \pi_r$: $(\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{n} = 0$ dacă $\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{l} + \mu\bar{b}$. Prin derivare și cu formulele $S-F$: $(\lambda' - 1)\bar{l} + (\lambda/\rho + \mu/\tau)\bar{n} + \mu'\bar{b} = 0$; deci $\lambda = s + s_0$, $\mu = r$ (const.), $\rho/\tau = -\lambda/\mu$. Ec. curbei Enneper: $\bar{r} = \bar{r}_0 + (s + s_0)\bar{l} + r\bar{b}$ cu $\bar{l}^2 = \bar{b}^2 = 1$, $\bar{l}\cdot\bar{b} = 0$. a) Avem $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{b} = -\bar{r}$; deci π_0: $(\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$ e tangent sferei $S(\Omega; r)$. Reciproc, derivînd condiția de tangență a lui π_0 la sferă și cu formulele $S-F$: $\bar{r}'\cdot\bar{b} + (\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{b}' = 0$, adică $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$, deci $\Omega \in \pi_r \cdot b)\pi_n$: $(\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{l} = 0$, distanța de la Ω la π_n: $d = -(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{l} = s + s_0$. Reciproc, derivînd ultima relație: $-(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{n}/\rho + \bar{r}'\cdot\bar{l} = 1$, adică $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{n} = 0$; deci $\pi_r \ni \Omega$. c) $\rho/\tau = (s + s_0)/r = ks + h$. Sau: din $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{n} = 0$ rezultă $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{n}' = 0$ sau, conform formulelor $S-F$, $(\rho/\tau)'' = 0$. Reciproc, avem $\bar{t}' = \tau\bar{b}'/\rho$; deci $\bar{r} = \int \bar{t}\,ds + \bar{r}_0 = st - \int s\,d\bar{t} + \bar{r}_0 = \bar{r}_0 + \left(s + \frac{h}{k}\right)\bar{t} - \frac{1}{k}\bar{b}$.

109 Dacă d_0, d_n, d_r sînt distanţele de la originea axelor la feţele triedrului $S—F$ asociat curbei strîmbe (57) într-un punct oarecare al ei, atunci avem *formulele lui Cesáro* :

$$d_0' = d_r/\tau,\ d_n' = d_r/\rho + 1,\ d_r' = -d_n/\rho - d_0/\tau. \tag{62}$$

110 Fie curba $C : x = e^{at} \sin\alpha\cos t,\ y = e^{at}\sin\alpha\sin t,\ z = e^{at}\cos\alpha$ (α — const.). Se cere : a) Să se calculeze ρ/τ; concluzie. b) Numind *centru de curbură* în P la C punctul Ω de pe normala principală $\bar n$ astfel ca $\overline{P\Omega} = \rho\bar n$, să se afle locul Γ al centrelor de curbură ale lui C. c) Să se arate că tangentele la C şi Γ în puncte corespondente sînt ortogonale.

R. a) $1/\rho = \sqrt{a^2+1}\sin\alpha/(a^2+\sin^2\alpha)e^{at}$, $1/\tau = -a\cos\alpha/(a^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)e^{at}$; deci $\rho/\tau =$ = const. : C e o elice (cilindro-conică, situată pe conul $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha = 0$). *Obs.* Luînd conul $x = v\sin\alpha\cos u,\ y = v\sin\alpha\sin u,\ z = v\cos\alpha$, tangenta la curba $v = v(u)$ face cu generatoarele conului un unghi constant θ dat de $\cos\theta = v'/\sqrt{v'^2 + v^2\sin^2\alpha}$; deci $v'/v = \sin\alpha\cos\theta/\sin\theta = a$, adică $v = Ce^{au}$ (putem lua $C = 1$ şi $u = t$). b) $\Gamma : \bar R = \bar r + \rho\bar n$. Însă $d\bar s = |d\bar r| = e^{at}\sqrt{a^2+\sin^2\alpha}\,dt$, iar din $\bar n/\rho = \dfrac{d\bar t}{dt}\dfrac{dt}{ds}$ găsim $\bar n = \left[-(a\sin t + \cos t)\bar i + (a\cos t - \sin t)\bar j\right]\Big/\sqrt{a^2+1}$.

111 Să se determine funcţia $f(t)$ astfel încît curba de ecuaţii

$$x = \int f(t)\sin t\,dt,\ y = \int f(t)\cos t\,dt,\ z = \int f(t)\operatorname{tg} t\,dt$$

să aibă curbura sau torsiunea constantă. Să se arate că versorii fundamentali ai triedrului $S—F$ sînt independenţi de $f(t)$.

R. $1/\rho = \cos t\sqrt{1+\cos^2 t}/f(t)$; dacă $\rho = a$: $f(t) = a\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}\cdot 1/\tau = (2+\cos^2 t)\sin 2t/2(1+$ $+\cos^2 t)\,f(t)$; cînd $\tau = b$: $f(t) = b\sin 2t(2+\cos^2 t)/2(1+\cos^2 t)$. *Obs.* Dacă $\rho = a$, $1/\tau =$ $= (2+\cos^2 t)\sin t/a\,(1+\cos^2 t)^{3/2}$, iar dacă $\tau = b$, $1/\rho = (1+\cos^2 t)^{3/2}/a(2+\cos^2 t)\sin t$; deci $\rho_a\tau_b\cdot\bar l = \tau_a\rho_b\cdot\bar l = \bar r'\dfrac{dt}{ds} = \sin t\cos t\bar i + \cos^2 t\bar j + \sin t\bar k$, $\bar n = \rho\dfrac{d\bar l}{dt}\dfrac{dt}{ds} = (\cos 2t\bar i - \sin 2t\bar j +$ $+\cos t\bar k)/\sqrt{1+\cos^2 t}$, $\bar b = \bar l\times\bar b = [\cos t(1+\sin^2 t)\,\bar i - \sin^3 t\,\bar j - \cos^2 t\bar k/\sqrt{1+\cos^2 t}$.

112 Dacă $\bar d$ e o dreaptă fixă, în punctul curent al unei curbe avem

$$\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sin\omega\ d\omega} = \frac{\tau}{\rho} \text{ cu } \theta = (\widehat{t,\bar d}) \text{ şi } \omega = (\widehat{\bar b,\bar d}). \tag{63}$$

113 Dacă punctele a două curbe C şi C_1 se corespund astfel ca tangentele în puncte corespondente sînt paralele, una din curbe se numeşte *transformata combescuriană* a celeilalte; în acest caz, se cere : a) Să se arate că, în puncte corespondente, triedrele $S—F$ au axele paralele. b) Să se demonstreze că raportul dintre curbura şi torsiunea lor e în valoare absolută aceeaşi în puncte corespondente. c) Ecuaţia curbei C fiind (57), să se obţină ecuaţiile transformatei C_1 şi să se exprime arcul s_1 al acesteia în funcţie de arcul s al lui C. d) Să se stabilească relaţii între elementele intrinsece ale transformatelor combescuriene. *Obs.* a) Dacă punctele curbelor C şi C_1 se corespund astfel ca tangenta într-un punct al uneia e paralelă cu binormala în punctul corespondent al celeilalte, prima curbă se numeşte *transformata semicombescuriană* a celei de a doua ; în acest caz, în puncte corespondente, normalele sînt paralele iar produsul curburilor e egal cu produsul torsiunilor. b) Se poate considera şi cazul ca tangenta în P_1 la C_1 să fie paralelă cu normala principală în P la C.

R. a) $ds_1 = k\,ds$. Avem $\bar{l}_1 = \varepsilon\bar{l}(\varepsilon = \pm 1)$; prin derivare şi conform (58′) : $\bar{n}_1/\rho_1 = \bar{l}_1' \dfrac{ds}{ds_1} =$ $= \varepsilon\bar{n}/k\rho$ încît $\rho_1 = k\rho$ şi $\bar{n}_1 = \varepsilon\bar{n}$, iar $\bar{b}_1 = \bar{l}_1 \times \bar{n}_1 = \bar{b}$. b) Avem $\bar{n}_1/\tau_1 = \bar{b}_1' \dfrac{ds}{ds_1} = \bar{n}/k\,\tau$; deci $|\rho/\tau| = |\rho_1/\tau_1|$. c) Fie, faţă de triedrul $S-F$ în P la C, $\overline{PP_1}(u, v, w)$; deci $C_1 : \bar{r}_1 = \bar{r} + u\bar{l} + v\bar{n} +$ $+ w\bar{b}$. Din $\bar{l}_1 = \bar{r}_1' \dfrac{ds}{ds_1} = \varepsilon\bar{l}$, rezultă $v' + u/\rho + w/\tau = 0$, $w' - v/\tau = 0$, $ds_1/ds = \varepsilon(1 + u' - v/\rho)$; de unde $\bar{r}_1 = \bar{r} - [\rho w/\tau + \rho(\tau w')']\ \bar{l} + \tau w'\bar{n} + w\bar{b}$, $\varepsilon s_1 = a + s - \rho w/\tau - \rho(\tau w')' - \int \tau w'\,ds/\rho$.

Sau : deoarece $d\bar{r}_1/ds_1 = \bar{l}_1$, obţinem $C_1 : \bar{r}_1 = \int \bar{t}l(s)\,ds$; deci $s_1 = a + \int |\bar{r}_1'|\,ds = a + \int k(s)\,ds =$ $= F(s)$. d) $\rho_1 = \rho f'(s)$, $\tau_1 = \varepsilon\tau F'(s)$. *Obs.* a) $C_1 : \bar{r}_1 = \bar{r} + u\bar{l} + \rho(1 + u')\,\bar{n} - \{\tau u/\rho + \tau[\rho(1 + u')]'\}\,\bar{b}$ sau $C_1 : \bar{r}_1 = \int \bar{b}f(s)\,ds$. b) $C_1 : \bar{r}_1 = \int \bar{n}f(s)\,ds$; $\bar{l}_1 = \bar{r}_1' \dfrac{ds}{ds_1} = -(\rho/\tau)\,(ds/ds_1)$, deci $ds/ds_1 = \varepsilon\tau/\rho(\varepsilon =$ $= \text{sign}\,\tau)$ şi $\bar{l}_1 = -\varepsilon\bar{b}$.

114 Se numeşte *evolventă* (sin.: *desfăşurătoare*, *desfăşurantă*, *evolventă filară*) a unei curbe în spaţiu traiectoria ortogonală a tangentelor curbei date. Se cere : a) O reprezentare parametrică a evolventei. b) Triedrul $S-F$ asociat în P_1 lui C_1 se deduce din cel asociat în P lui C printr-o rotaţie în jurul normalei principale $\bar{n}$, de unghi

$$\sqrt{1/\rho^2 + 1/\tau^2}\,\cos\theta = -1/\tau. \tag{64}$$

c) Dacă P_0 e originea arcelor pe C, atunci

$$\text{arc}\,P_0P + PP_1 = a\ (a - \text{const.}). \tag{64′}$$

Apl. Să se determine evolventele : a) curbei $y = x^2$, $z = 2x^3/3$; b) elicei.

R. a) Un punct al tangentei (în P la C) e dat de $\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\bar{l}$; de unde, prin derivare, $\bar{r}_1' =$ $= (1 + \lambda')\,\bar{l} + \lambda\bar{n}/\rho$. Cum $\bar{r}_1' \cdot \bar{l} = 0$, deducem

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + (a - s)\,\bar{l}. \tag{64″}$$

Deci : *O curbă C are o infinitate de evolvente* (fig. 39). 2 evolvente C_1', C_1'' taie tangentele la C după figuri egale : $\overline{P_1'P_1''} = (a'' - a')\,\bar{l}$. C_1 taie pe C într-un punct care, în general, e un punct de întoarcere pentru C_1. b) Fie $K = 1/\rho$ şi $T = 1/\tau$ în P la C. Avem $\bar{r}_1' = K(a - s)\,\bar{n}$, $\bar{r}_1'' = (-K + (a -$ $- s)\,K')\,\bar{n} - K(a - s)\,(K\bar{l} + T\bar{b})$; deci $\bar{l}_1 = \bar{r}_1'/|\bar{r}_1'| = \bar{n}$, $\bar{b}_1 = \bar{r}_1' \times \bar{r}_1''/|\bar{r}_1' \times \bar{r}_1''| = (-T\bar{l} +$ $+ K\bar{b})/\sqrt{K^2 + T^2}$, $\bar{n}_1 = \bar{b}_1 \times \bar{l}_1 = -(K\bar{l} + T\bar{b})/\sqrt{K^2 + T^2}$, iar $\cos\theta = \bar{l} \cdot \bar{b}_1$. *Obs.* b_1) Tangenta în $P_1 \in C_1$, pentru care $s \neq a$, e paralelă cu normala principală în $P \in C$. b_2) $ds_1 = K(a - s)\,ds$, $1/\rho_1 = \sqrt{K^2 + T^2}/K\,(a - s)$. c) arc $P_0P = s$, $PP_1 = |\bar{r}_1 - \bar{r}| = |(a - s)\,\bar{l}| = a - s$. Construcţie mecanică, potrivit relaţiei (64′) : Un for flexibil şi inextensibil aplicat de-a lungul arcului P_0P_1, al cărui capăt P_1 se desfăşoară astfel încît porţiunea desfăşurată PP_1 să fie tangentă în P la C. *Obs.* O evolventă e situată pe suprafaţa desfăşurabilă generată de tangentele la C, tăind generatoarele suprafeţei sub un unghi drept. *Apl.* a) $s = x + 2x^3/3$; deci $(1 + 2x^2)\,X = 4x^3/3 + a$, $(1 + 2x^2)\,Y =$ $= -x^2 + 2x^4/3 + 2ax$, $(1 + 2x^2)\,Z = -4x^3/3 + 2ax^2$ (cuartice în planul $X + Z - a = 0$, fig. 40). b) Secţiuni plane ale suprafeţei desfăşurabile formată de tangentele elicei prin plane perpendiculare pe axa cilindrului (v. probl. 46 c)

115 Se numeşte *evolventă planară* traiectoria ortogonală a planelor osculatoare ale unei curbe în spaţiu. Se cer ecuaţiile curbei.

116 Se numesc *curbe Cesàro* curbele strîmbe de-a lungul cărora avem relaţia

$$a(1/\rho)^2 + 2b/\rho\tau + c(1/\tau)^2 + 2d/\rho + 2e/\tau = 0\ (a, b, c, d, e - \text{constante}). \tag{65}$$

Ex. : Curbele C ale căror normale principale sînt binormalele alteia.

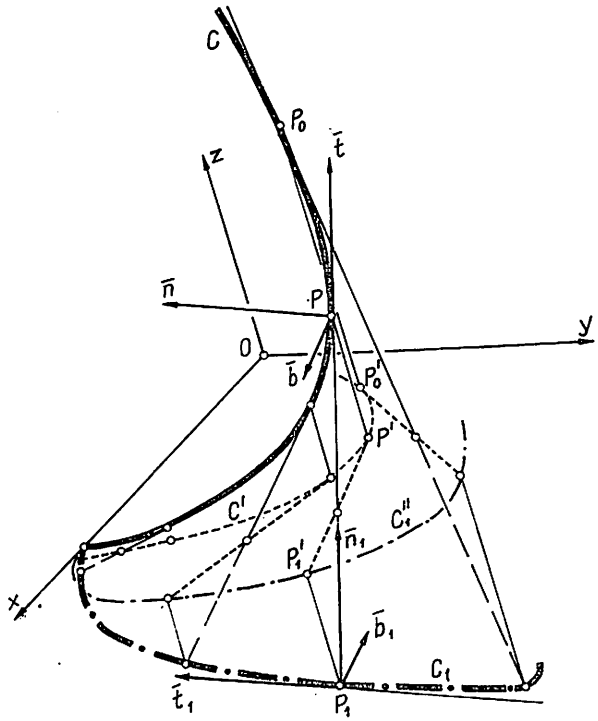


Fig. 39

117 Să se afle limita intersecției planului osculator într-un punct P cu planul osculator într-un punct P' apropiat.

118 În punctul curent $P(s)$ al curbei (57) se consideră un vector $\bar{v}(s)$. Să se găsească legea de recurență care să permită calculul vectorului $\bar{v}^{(n)}$ în raport cu versorii fundamentali ai triedrului $S-F$ asociat curbei în P. *Apl.* a) Să se calculeze $\bar{t}'^2$, $\bar{n}'^2$, $\bar{b}'^2$. b) Să se arate că $(\bar{t}\,\bar{b}\,\bar{b}') = -T$, $(\bar{b}\,\bar{t}\,\bar{t}') = K$, $(\bar{t}'\,\bar{t}''\,\bar{t}''') = -K^5(T/K)'$, $(\bar{b}'\,\bar{b}''\,\bar{b}''') = T^5(K/T)'$. c) Să se scrie dezvoltarea creșterilor $\Delta\bar{t}$, $\Delta\bar{n}$, $\Delta\bar{b}$ în raport cu triedrul $S-F$ din P, pînă la termeni de ordinul trei în Δs.

R. Fie $\bar{v}^{(n)} = a_n\bar{t} + b_n\bar{n} + c_n\bar{b}$ și $\bar{v}^{(n+1)} = a_{n+1}\bar{t} + b_{n+1}\bar{n} + c_{n+1}\bar{b} = (\bar{v}^{(n)})'$; deoarece $\bar{t}' = K\bar{n}$, $\bar{n}' = -(K\bar{t} + T\bar{b})$, $\bar{b}' = T\bar{n}$, deducem

$$a_{n+1} = a_n' - Kb_n,\ b_{n+1} = b' + Ka_n,\ c_{n+1} = c_n' - Tb_n. \tag{65}$$

Obs. E necesar să cunoaștem valorile coeficienților pentru $n = 1$. *Apl.* a) Fie $\bar{v} = \bar{t}$; pentru $n = 1 : a_1 = 0$, $b_1 = K$, $c_1 = 0$. Deci $\bar{t}'' = -K^2\bar{t} + K'\bar{n} - KT\bar{b}$, $\bar{t}'^2 = K'^2 + K^2(K^2 + T^2)$. Cînd $\bar{v} = \bar{n}$, avem pentru $n = 1 : a_1 = -K$, $b_1 = 0$, $c_1 = -T$; deci $\bar{n}'' = -K'\bar{t} - (K^2 + T^2)\bar{n} - T'\bar{b}$, $n'^2 = K'^2 + T'^2 + (K^2 + T^2)^2$. Dacă $\bar{v} = \bar{b}$, pentru $n = 1 : a_1 = 0$, $b_1 = T$, $c_1 = 0$, încît $\bar{b}'' = -KT\bar{t} + T'\bar{n} - T^2\bar{b}$ și $b'^2 = T'^2 + T^2(K^2 + T^2)$. b) $\bar{t}''' = -3KK'\bar{t} + (K''' - K^3 - KT^2)\bar{n} - (2K'T + KT')\bar{b}$, $\bar{n}''' = [-K'' + K(K^2 + T^2)]\bar{t} - 3(KK' + TT')\bar{n} + [-T'' + T(K^2 + T^2)]\bar{b}$, $\bar{b}''' = -(K'T + 2KT')\bar{t} + (T''' - K^2T - T^3)\bar{n} - 3TT'\bar{b}$. c) Avem $\Delta\bar{v} = \frac{\Delta s}{1!}\bar{v}' + \frac{\Delta s^2}{2!}\bar{v}'' + \frac{\Delta s^3}{3!}\bar{v}''' + (4)$ Rezultă $\Delta\bar{t} = -\left(\frac{K^2}{2}\Delta s^2 + \frac{KK'}{2}\Delta s^3\right)\bar{t} + \left(K\Delta s + \frac{K'}{2}\Delta s^2 + \frac{1}{6}(K'' - K^3 - KT^2)\Delta s^3\right)\bar{n} - \left(\frac{KT}{2}\Delta s^2 + \frac{1}{6}(KT' + 2K'T)\Delta s^3\right)\bar{b} + (4)$, $\Delta\bar{n} = -\left(K\Delta s + \frac{K'}{2}\Delta s^2 +\right.$

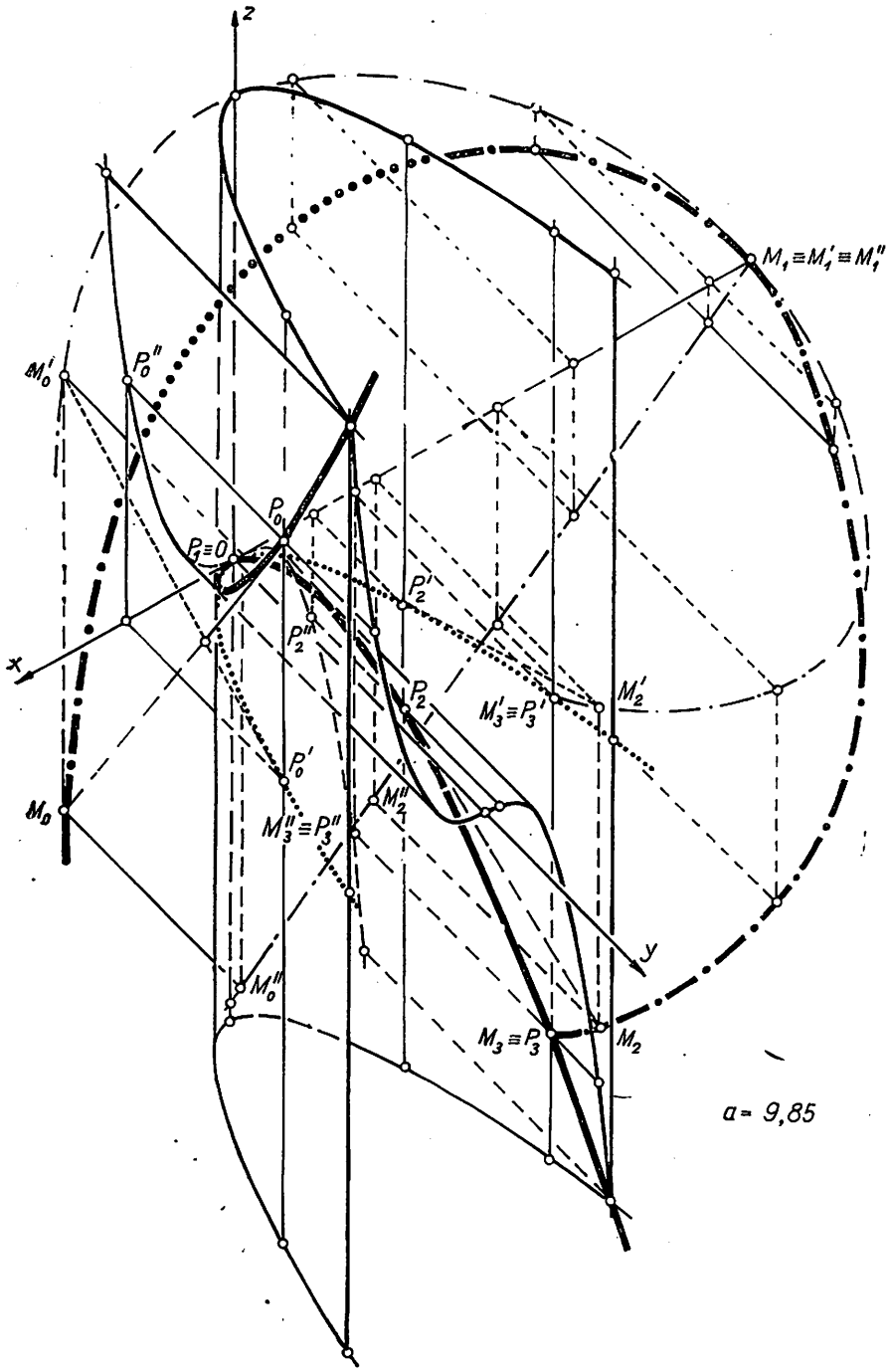

z
x
y
$M_1 \equiv M_1' \equiv M_1''$
M_0'
P_0''
P_0
$P_1 \equiv 0$
P_2'
P_2'''
P_2
$M_3' \equiv P_3'$
M_2'
P_0'
M_2''
M_0
$M_3'' \equiv P_3''$
M_0''
$M_3 \equiv P_3$
M_2
a = 9,85

Fig. 40

$+\frac{1}{6}(K''-K^3-KT^2)\triangle s^3\Big)\bar{i}-\Big(\frac{1}{2}(K^2+T^2)\triangle s^2+\frac{1}{2}(KK'+TT')\triangle s^3\Big)\bar{n}-\Big(T\triangle s+\frac{T'}{2}\triangle s^2+$
$+\frac{1}{6}(T''-K^2T-T^3)\triangle s^3\Big)\bar{b}+(4),\ \triangle\bar{b}=-\Big(\frac{KT}{2}\triangle s^2+\frac{1}{6}(K'T+2KT')\triangle s^3\Big)\bar{i}+\Big(T\triangle s+$
$+\frac{T'}{2}\triangle s^2+\frac{1}{6}(T''-K^2T-T^3)\triangle s^3\Big)\bar{n}-\Big(\frac{T^2}{2}\triangle s^2+\frac{TT'}{2}\triangle s^3\Big)\bar{b}+(4).$

119 Să se arate că punctele unei curbe strîmbe verifică ecuaţia

$$\bar{r}^{IV}+(2\rho'/\rho+\tau'/\tau)\,\bar{r}'''+(1/\rho^2+1/\tau^2+\rho''/\rho+\rho'\tau'/\rho\tau)\,\bar{r}''+$$
$$+(\tau'/\rho^2\tau-\rho'/\rho^3)\,\bar{r}'=0, \tag{66}$$

numită *ecuaţia lui Wilczynski*. Se cere : a) Să se determine curbele pentru care $\rho=\text{const.}$, $\tau=\text{const.}$ b) Să se studieze cazul curbelor plane.

R. Eliminînd succesiv prin derivări pe $\bar{i}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ din formulele *S—F*. *Obs.* Sau, conform problemei 118, unde $\bar{r}'=\bar{i}$, $\bar{r}''=\bar{i}'$, $\bar{r}'''=\bar{i}''$, $\bar{r}^{IV}=\bar{i}'''$. a) Ecuaţia (66) permite determinarea lui $\bar{r}$ cînd ρ şi τ sînt cunoscute. Dacă $\rho=\text{const.}$, $\tau=\text{const.}$: $\theta^{IV}+k^2\theta''=0$, cu soluţia $\theta=C_1\cos ks+C_2\sin ks+$ $+C_3s+C_4$; deci elicea circulară $x=\cos ks$, $y=\sin ks$, $z=s$. b) $(\rho\bar{r}'''+\rho'\bar{r}''+\frac{1}{\rho}\bar{r}')'=0$, deci (I, 213).

120 Fie curba (57). Se cere : a) Ecuaţia canonică vectorială (parametrică) a curbei, cu dezvoltarea vectorului de poziţie al unui punct al curbei în serie după s pînă la puterea a patra. b) Să se găsească ecuaţiile canonice explicite ale curbei. c) Folosind ecuaţia canonică vectorială, să se dea o interpretare geometrică semnului torsiunii. *Apl.* în cazul curbei (30).

R. Fie $P(s=0)=0$ şi $\bar{i}(0)=\bar{i}$, $\bar{n}(0)=\bar{j}$, $\bar{b}(0)=\bar{k}$; cum $\bar{r}(0)=0$, avem

$$\bar{r}=(s-K^2s^3/6-KK's^4/8)\,\bar{i}+[Ks^2/2+K's^3/6+(K''-K^3-KT^2)\,s^4/24]\,\bar{j}-[KTs^3/6+$$
$$+(2K'T+KT')\,s^4/24]\,\bar{k}+(5). \tag{67}$$

Apl. În O, triedrul $S-F$ coincide cu reperul axelor (v. probl. 73). Luînd originea arcelor în O, obţinem $s=at+2b^2t^3/3a+(5)$. Pentru a găsi pe $t=t(s)$, punem $t=a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+(5)$. Prin identificare, rezultă $a_1=1/a$, $a_2=0$, $a_3=-ab^2/3a^5$, $a_4=0$ încît $x=s-2b^2s^3/3a^4+(5)$, $y=$ $=bs^2/a^2-4b^3s^4/3a^6+(5)$, $z=cs^3/a^3+(5)$. *Obs.* Identificînd cu ecuaţia (67), obţinem $K(0)=2b/a^2$, $K'(0)=0$, $K''(0)=-24b^3/a^6+18c^2/a^4b$, $T(0)=-3c/ab$, $T'(0)=0$. b) *Cu* x ca parametru, fie $s=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+(5)$. Înlocuind în $x(s)$ şi identificînd coeficienţii, găsim $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=K^2/6$, $a_4=KK'/8$, deci

$$y=\frac{K}{2}x^2+\frac{K'}{6}x^3+\frac{1}{24}(K''+3K^3-KT^2)\,x^4+(5), \tag{67'}$$
$$z=-\frac{KT}{6}x^3-\frac{1}{24}(2K'T+KT')\,x^4+(5).$$

Apl. $y=bx^2/a^2$, $z=cx^3/a^3$. c) Presupunem că planul osculator (în P la C) nu e staţionar ; deci $KT\neq0$. Dacă $T<0$: $z<0$ pentru $s<0$ şi $z>0$ pentru $s>0$) ; curba e *sinistrorsum* în P. Dacă $T>0$: $z\gtrless0$ pentru $s\lessgtr0$; curba e *dextrorsum* în P. *Apl.* După cum $abc\gtrless0$, C e sinistrorsum sau dextrorsum în O.

121 Fie P şi P' două puncte apropiate pe o curbă în spaţiu C ; să se arate : a) Curbura lui C în P poate fi definită ca dublul limitei raportului dintre distanţa d de la P' la tangenta în P şi pătratul arcului PP', cînd P' tinde către P :

$$\frac{1}{\rho}=2\lim_{P'\to P}\frac{d}{\widehat{PP'}^2}. \tag{68}$$

b) Torsiunea lui C în P e de șase ori limita raportului, cu semnul schimbat, dintre produsul razei de curbură în P la C cu distanța d' de la P' la planul osculator în P și cubul arcului PP', cînd $P' \to P$:

$$\frac{1}{\tau} = -6 \lim_{P' \to P} \frac{d'}{\widehat{PP'}^3} \tag{68'}$$

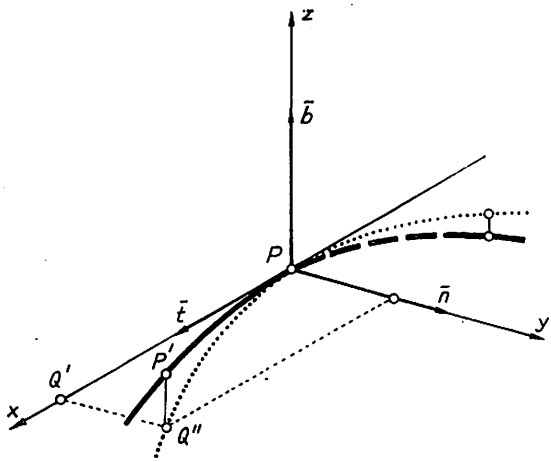


Fig. 41

R. Cu (67), în $P = O$: tangenta e Ox iar planul osculator e Oxy. Atunci : a) $d = |\bar{r} \times \bar{i}| = s^2/2 + (3)$. b) $d' = z = -KTs^3/6 + (4)$. *Obs.* În locul lui s putem lua $x = PQ'$, Q' fiind proiecția lui P' pe tangentă (fig. 41) ; deci

$$1/\rho = 2 \lim_{P' \to P} P'Q'/PQ'^2, \; 1/\tau = -6 \lim_{P' \to P} P'Q''/PQ'^3.$$

122 În dinamica punctului, *ecuațiile lui Euler* (sin. : *ecuațiile intrinsece ale mișcării*) sînt ecuațiile obținute proiectînd ecuația vectorială de mișcare $m\bar{a} = \bar{F}$ a particulei P, de masă m, pe versorii fundamentali ai triedrului $S-F$ asociat traiectoriei particulei. Să se scrie aceste ecuații.

123 Fie $\mathcal{T}(P; \bar{i}, \bar{n}, \bar{b})$ triedrul $S-F$ asociat punctului P al curbei C. Se cere : a) Să se arate că proiecțiile vitezelor a două puncte oarecari M_1 și M_2 ale lui $\mathcal{T}(P; \bar{i}, \bar{n}, \bar{b})$ pe dreapta care le unește sînt egale. Cînd $M_2 = P$ iar PM_1 e o normală (la C), ce descriu punctele dreptei PM_1 ? b) Să se studieze mișcarea triedrului $\mathcal{T}(P ; \bar{i}, \bar{n}, \bar{b})$ considerat ca un solid S cu un punct fix P cu viteza în modul constantă și egală cu unitatea, cînd P descrie curba C. c) Să se demonstreze că

$$\frac{d\bar{i}}{ds} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \frac{d\bar{n}}{ds} = \bar{\omega} \times \bar{n}, \frac{d\bar{b}}{ds} = \bar{\omega} \times \bar{b}, \tag{69}$$

unde *vectorul lui Darboux* $\bar{\omega}$ caracterizează în fiecare moment mișcarea triedrului; expresia lui $\bar{\omega}$. d) Să se dea interpretarea cinematică a curburii și torsiunii (în P la C).

R. a) Fie un solid S care se mișcă în spațiu și $M_i \in S$ $(i = 1, 2)$; $\bar{r} = \overline{OP}$, $\bar{\rho} = \overline{PM}$, $\bar{R} = \overline{OM}$, $\bar{i}, \bar{n}, \bar{b}$ sînt variabili cu timpul t (fig. 42). *Condiția de rigiditate* e $\overline{M_1M_2}^2 = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1)^2 = \text{const.}$; prin derivare, obținem

$$(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \cdot \bar{V}_2 = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \cdot \bar{V}_1 \quad (\bar{V}_i = d\bar{R}_i/dt). \tag{69'}$$

Cînd $M_2 = P$ etc., toate punctele dreptei PM_1 descriu curbe cu aceeași proprietate. b) Se aplică (69′) pentru $M_1 = P$ și $M_2 = M$; deci $\bar{\rho}\cdot\bar{V} = \bar{\rho}\cdot\bar{v}$, cu $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, admițînd soluția generală

(69″) $$\bar{V} = \bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{\rho},\quad \bar{\omega} - \text{un vector arbitrar.}$$

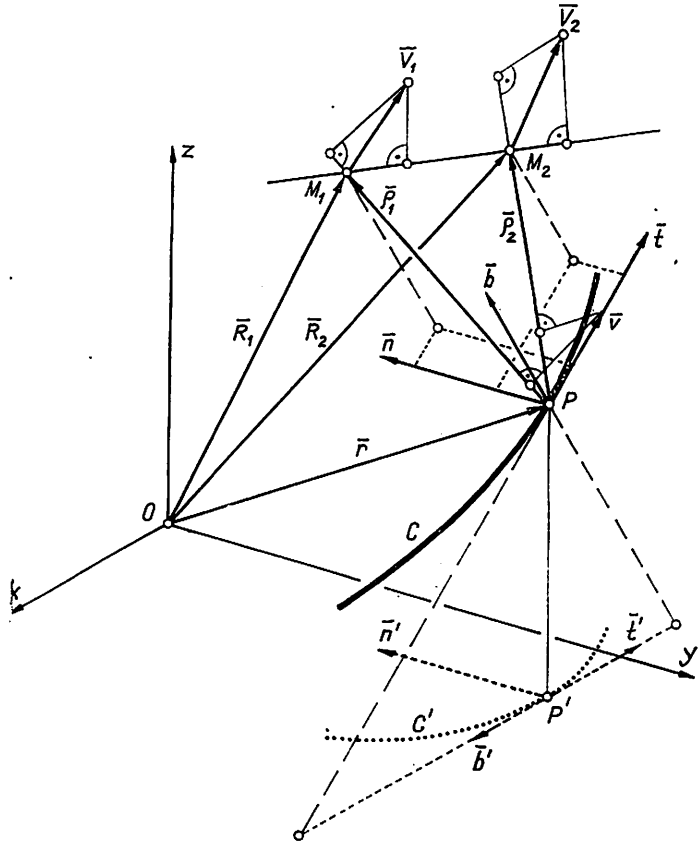


Fig. 42

Obs. a$_1$) $\bar{V}$ din (69″) satisface condiția (69′), oricare ar fi $\bar{v}$ și $\bar{\omega}$ (aceeași pentru tot spațiul). Căci, fie în M_i: $\bar{V}_i = \bar{v} + \bar{\omega}\times\bar{\rho}_i$; atunci (69′) devine o identitate: $(\bar{R}_2 - \bar{R}_1)\cdot[\bar{v} + \bar{\omega}\times(\bar{R}_2 - \bar{r})] = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1)\cdot[\bar{v} + \bar{\omega}\times(\bar{R}_1 - \bar{r})]\cdot b_2$) Putem pune relația (69″) sub forma·

(69‴) $$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{\rho},\ \text{deci}\ \frac{d\bar{\rho}}{dt}\perp\bar{\rho}\ \text{și}\ \frac{d\bar{\rho}}{dt}\perp\text{plan}\ (P;\bar{\omega},\bar{\rho}).$$

Dacă $\bar{\omega} = 0$, distribuția de viteze devine $\bar{V} = \bar{v}$, fiind independentă de poziția lui M. O astfel de mișcare a rigidului S e o *translație*. *Obs.* Traiectoria lui M se obține din cea a lui P printr-o translație de vector $\overline{PM}$, tangentele în P și M la traiectoriile respective fiind paralele (v. și probl. 113). Dacă $v = 0$, orice punct al dreptei d, trecînd prin P și paralelă cu $\bar{\omega}$, are viteza $\bar{V}$ nulă (căci $\bar{\rho} = \overline{PM} = k\bar{\omega}$); dreapta d se numește *axa mișcării*. În acest caz, la un moment dat t, distribuția vitezelor e dată de $|\bar{V}| = a\omega$ ($a = |\bar{\rho}|\sin\widehat{(\bar{\rho},\bar{\omega})}$ — distanța de la M la d, $\omega = |\bar{\omega}|$), fiind aceea a unei rotații în jurul axei d, în sens direct, cu viteza unghiulară de rotație ω; în rotație, unghiul $\theta = \widehat{\bar{l},\overline{M\Omega}} = \int_{t_0}^{t}\omega dt$ (fig. 43). O astfel de mișcare a rigidului S e o *rotație instantanee în*

jurul unei axe d (care axă devine o axă instantanee de rotație). În cazul general: $v \neq 0$, $\omega \neq 0$, rigidul S are o *mișcare de roto-translație*. c) Dacă în P considerăm triedrul ortonormat $\mathscr{T}'(P; \bar{e}_i; \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij})$ rigid legat de solidul S, fie $\overline{M} = \bar{r} + \bar{e}_t$, adică $\bar{\rho} = \bar{e}_i$; deci *relațiile lui Poisson*:

(69'^{v}) $$d\bar{e}_i/dt = \bar{\omega} \times \bar{e}_i.$$

Observăm că $\bar{e}_j \cdot (d\bar{e}_i/dt) = \bar{e}_j \cdot (\bar{\omega} \times \bar{e}_i) = \bar{\omega} \cdot \bar{e}_k = \mathrm{pr}_k \bar{\omega}$ $(i \neq j \neq k)$. Deci

(69^{v}) $$\bar{\omega} = \left(\bar{e}_3 \cdot \frac{d\bar{e}_2}{dt}\right)\bar{e}_1 + \left(\bar{e}_1 \cdot \frac{d\bar{e}_3}{dt}\right)\bar{e}_2 + \left(\bar{e}_2 \cdot \frac{d\bar{e}_1}{dt}\right)\bar{e}_3.$$

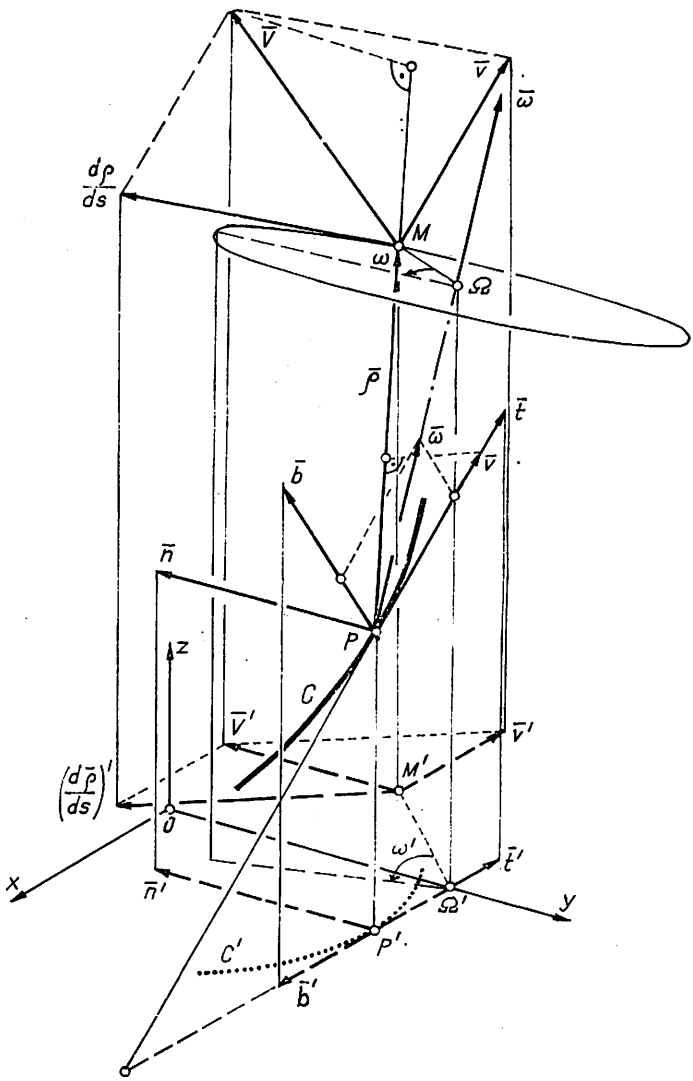


Fig. 43

Considerînd mișcarea cu viteză (în modul) constantă și egală cu unitatea, atunci P parcurge unitatea de drum în unitate de timp: $s = t$. Luînd $\bar{e}_1 = \bar{t}$, $\bar{e}_2 = \bar{n}$, $\bar{e}_3 = \bar{b}$ (deci $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$), relațiile Poisson devin relațiile (69); cu formulele S—F, vectorul lui Darboux e

(69$^{v'}$) $$\bar{\omega} = -\bar{t}/\tau + \bar{b}/\rho.$$

Obs. Normala principală e singura dreaptă de-a lungul căreia componenta rotației instantanee a triedrului $\mathcal{S}$ e nulă. Deoarece $d\bar{r}/ds = \bar{t}$ și ținînd seama de (69^{VI}), triedrul $S - F$ (în P la C) se mișcă cu o viteză de rotație (instantanee) definită de vectorul Darboux) (69^{VI}), axa de rotație d aflîndu-se în planul rectificant și avînd ca pantă (față de tangentă) raportul dintre curbură și torsiune. d) Deoarece $\frac{d\bar{t}}{ds}$, $\frac{d\bar{n}}{ds}$ și $\frac{d\bar{b}}{ds}$ sînt respectiv *vitezele virfurilor versorilor fundamentali ai triedrului* $S-F$, avem descompunerea (fig. 44)

$$\text{(I)} \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = 0 \text{ cu } \bar{\omega}_1 = \frac{\bar{b}}{\rho}$$

și

$$\text{(II)} \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = 0, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\bar{b}}{\tau}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\tau} \quad \text{cu } \bar{\omega}_2 = -\frac{\bar{t}}{\tau}.$$

Rezultă că rotația instantanee $\bar{\omega}$ în jurul axei d se compune din 2 rotații instantanee: una în jurul binormalei cu o viteză unghiulară de rotație $\omega_1 = 1/\rho$, iar cealaltă în jurul tangentei cu o viteză

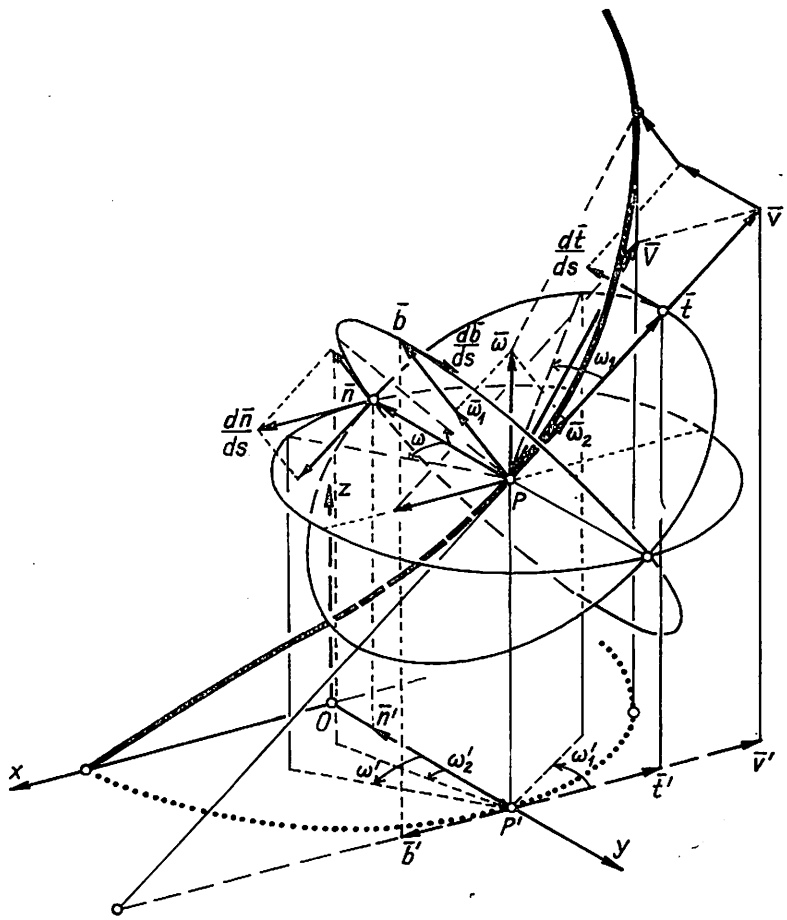


Fig. 44

unghiulară de rotație $\omega_2 = -1/\tau$. Deci: curbura $1/\rho$ definește rotația tangentei la curbă în planul osculator; ea schimbă direcția vitezei de translație a vîrfului P. Torsiunea $1/\tau$ definește rotația normalei principale în planul normal; ea dă o rotație a triedrului $S - F$ în jurul tangentei, în lungul căreia triedrul are o mișcare de translație. Rezultă că *triedrul* $S - F$ *are în spațiu o mișcare*

elicoidală cu axa mișcării rotindu-se în planul osculator. Obs. După cum $1/\tau \gtrless 0$, torsiunea definește o mișcare elicoidală sinistrorsum sau dextrorsum.

124 Să se arate, vectorial, că o curbă în spațiu e determinată dacă se cunoaște curbura $K(s)$ și torsiunea $T(s)$. Ecuațiile

$$1/\rho = K(s),\ 1/\tau = T(s) \tag{70}$$

se numesc *ecuațiile intrinsece* (sin.: *ecuațiile naturale*) ale curbei. *Apl.* a) Simetrica C_1 a curbei C are ecuațiile intrinsece $1/\rho = K(s)$, $1/\tau = -T(s)$. b) Să seafle ecuațiile intrinsece ale curbei: b_1) de ecuații (41) cu $a = c$; b_2) $x = at$, $y = a\sqrt{2}\ln t$, $z = a/t$. c) Să se determine curba care are ecuațiile intrinsece $1/\rho = 4/25$, $1/\tau = -3/25$ cu condițiile inițiale: pentru $s = 0$, triedrul $S - F$ are poziția dată de $\bar{t}_0\,(0{,}4/5{,}3/5)$, $\bar{n}_0\,(-1, 0, 0)$, $\bar{b}_0\,(0, -3/5, 4/5)$ și curba trece prin $P_0(4, 0, 0)$. d) Să se determine curba strîmbă care trece prin $O(s = 0)$, știind că are ecuațiile intrinsece $\rho = -\tau = s\sqrt{2}$, iar în $P_0(s_0 = 1)$ triedrul $S - F$ e definit de $\bar{t}_0\ (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $\bar{n}_0\ (0, -1, 0)$, $\bar{b}_0\ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

R. Ecuațiile $S - F$ (58′) — (58‴) constituie un sistem de 3 ecuații diferențiale vectoriale în 3 necunoscute $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$. O integrală a ecuațiilor $S - F$ e determinată dacă se dau expresiile acestor 3 vectori necunoscuți pentru o valoare s_0 a lui s (cond. inițiale), astfel încît să formeze un triedru ortonormat; atunci și vectorii necunoscuți satisfac cond. de ortonormalitate pentru orice valoare a lui s. Din ecuațiile $S - F$ rezultă $\bar{t}\cdot\bar{n} = \alpha$, $\bar{n}\cdot\bar{b} = \alpha'$, $\bar{b}\cdot\bar{t} = \alpha''$ și $\bar{t}^2 = \beta$, $\bar{n}^2 = \beta'$, $\bar{b}^2 = \beta''$; deci, dacă pentru $s = s_0$, avem $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$ și $\beta = \beta' = \beta'' = 1$, aceste valori se mențin pentru orice s. Odată găsit $\bar{t}(s)$, curba are ecuația

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}(s),\ \text{adică}\ \bar{r} = \int_{s_0}^{s} \bar{t}(s)ds + \bar{r}_0, \tag{70′}$$

$\bar{r}_0$ definind poziția punctului inițial $P_0(s = s_0)$ prin care trece curba. *Apl.* a) C_1: $\bar{r}_1 = -\bar{r}$; căci $|\bar{r}_1'| = |\bar{r}'|$, $|\bar{r}_1' \times \bar{r}_1''| = |\bar{r}' \times \bar{r}''|$, $(\bar{r}_1'\bar{r}_1''\bar{r}_1''') = -(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')$. b_1) Cu $s = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{sh}\,t$ în $1/\rho$ și $1/\tau$ (v. probl. 93): $1/\rho = a/(a^2 + b^2 + s^2)$, $1/\tau = -b/(a^2 + b^2 + s^2)$; b_2) $1/\rho = -1/\tau = a\sqrt{2}/(4a^2 + s^2)$. c) Derivînd a doua ecuație $S - F$ și ținînd seama de celelalte, obținem

$$\bar{n}'' + \bar{n} = 0,\ \text{adică}\ \bar{n} = \bar{C}_1 \cos\frac{s}{5} + \bar{C}_2 \sin\frac{s}{5}.$$

Pentru $s = 0$, $\bar{n} = -\bar{i}$; deci $\bar{C}_1 = -\bar{i}$. Integrînd prima și ultima ecuație $S - F$, găsim

$$\bar{t} = -\frac{4}{5}\left(\bar{i}\sin\frac{s}{5} + \bar{C}_2\cos\frac{s}{5}\right) + \bar{C}_3,\ \bar{b} = \frac{3}{5}\left(\bar{i}\sin\frac{s}{5} + \bar{C}_2\cos\frac{s}{5}\right) + \bar{C}_4.$$

Pentru $s = 0$, deoarece $\bar{t}_0 = 4\bar{j}/5 + 3\bar{k}/5$ și $\bar{b}_0 = -3\bar{j}/5 + 4\bar{k}/5$, rezultă $\bar{C}_3 = \bar{t}_0 + 4\bar{C}_2/5$, $\bar{C}_4 = \bar{b}_0 - 3\bar{C}_2/4$. Înlocuind pe $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ în a doua ecuație $S - F$, obținem $\bar{C}_2 = -\bar{j}$. Atunci ecuația (70′) dă $\bar{r} = 4\cos\frac{s}{5}\bar{i} + 4\sin\frac{s}{5}\bar{j} + \frac{3}{5}s\bar{k} + \bar{r}_0$; însă, pentru $s = 0$, rezultă $\bar{r}_0 = 0$. Curba C e o elice circulară. d) Obținem, procedînd la fel, că

$$\bar{n}'' + \bar{n}'/s + \bar{n}/s^2 = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{n}'' + \bar{n} = 0 \quad \text{luînd} \quad s = e^t.$$

Originea arcelor în O, rezultă $\bar{r} = \int_{-\infty}^{t} e^t\bar{i}\,dt = e^t[2\bar{i} + (\cos t - \sin t)\bar{j} + (\cos t + \sin t)\bar{k}]/4$, adică o elice cilindro-conică.

125 Să se arate că determinarea unei curbe prin ecuațiile ei intrinsece se poate reduce la integrarea unei ecuații Riccati *(Darboux)*.

126 Să se arate că sînt caracteristice pentru o elice C proprietăţile: a) Normala principală a elicei C e paralelă cu normala la secţiunea dreaptă Γ (în punctul corespunzător); *Apl.*: raportul dintre curbura elicei şi aceea a secţiunii drepte e constant. b) Normala principală e perpendiculară pe o direcţie fixă. c) Binormala face un unghi constant cu o direcţie fixă. d) Raportul dintre curbură şi torsiune, în orice punct al curbei, e constant (*teorema Lancret*); *Apl.*: curba $d_1)$ $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}\,t$; $d_2)$ $x = t^2(2t+3)$, $y = 3t(t+2)$, $z = 3t^2$; $d_3)$ $x = t/(t^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}$, $y = -2/(t^2+2)$, $z = -t/(t^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}$; $d_4)$ $x = 2t^3 - 3t^2 + 1$, $y = 3(t^2-1)$, $z = 3(t-1)^2$; $d_5)$ $x = t$, $y = 1/t$, $z = \sqrt{2}\ln t$ e o elice. e) Să se integreze ecuaţiile intrinsece ale elicelor; *Apl.*: singurele curbe care au curbura şi torsiunea: $e_1)$ constante sau $e_2)$ proporţionale cu o funcţie liniară de arcul curbei sînt elicele circulare sau cilindro-conice.

R. a) Fie elicea (38″). Notînd $\bar r = \bar r_1 + (a\sigma + b)\bar k$, avem $\bar l = (\bar l_1 + a\bar k)/\sqrt{1+a^2}$. Prin derivare şi cum $d\sigma/ds = 1/\sqrt{1+a^2}$ iar $a/\sqrt{1+a^2} = \cos\theta$, $1/\sqrt{1+a^2} = \sin\theta$, unde θ e unghiul format de tangentă la elice cu generatoarea, rezultă

71) $$\bar n/\rho = \bar n_1 \sin^2\theta/\rho_1; \quad \text{deci} \quad 1/\rho = \sin^2\theta/\rho_1.$$

Obs. Normala la secţiunea dreaptă Γ e normală la cilindru, deci perpendiculară pe generatoare. Reciproc: din $\bar n \perp \bar k$, conform primei ecuaţii $S - F$, avem

$$\bar k \cdot \bar l' = 0, \quad \text{adică} \quad (\bar k \cdot \bar l)' = 0, \quad \text{deci} \quad \bar l \cdot \bar k = \cos\theta = \text{const.}$$

Apl. Rezultă din (71). b) Fie $\bar a$ versorul unei direcţii fixe şi $\theta = (\widehat{\bar l, \bar a}) = \text{const.}$ (conf. definiţiei elicei; v. probl. 46); deci $\bar a \cdot \bar l = \cos\theta$. Derivînd şi conform primei ecuaţii $S - F$, deducem $\bar a \cdot \bar n = 0$, adică $\bar n \perp \bar a$. Reciproc: scriem $\bar a \cdot \frac{\bar n}{\rho} = 0$, adică $\bar a \cdot \bar l' = 0$ sau $(\bar a \cdot \bar l)' = 0$; de unde $\bar a \cdot \bar l = \text{const.}$ b) Scriem $\bar a \cdot \frac{\bar n}{\tau} = 0$, adică $\bar a \cdot \bar b' = 0$ sau $(\bar a \cdot \bar b)' = 0$; deci $\bar a \cdot \bar b = \text{const.}$ Reciproca e adevărată, deci curba e o elice. d) Cum $(\bar a \cdot \bar n)' = 0$ şi conform ecuaţiilor $S - F$ avem

(72) $$\bar a \cdot (-\bar l/\rho - \bar b/\tau) = 0, \quad \text{adică} \quad \rho/\tau = \bar a \cdot \bar l / \bar a \cdot \bar b = \text{const.}$$

Derivînd în raport cu s egalitatea $\bar n = \bar n_1$ şi conform ecuaţiilor $S - F$ pentru C şi Γ, avem $\bar l/\rho + \bar b/\tau = (\bar l_1/\rho_1)\frac{d\sigma}{ds}$; de unde, înmulţind scalar cu $\bar b$ şi deoarece $\bar l_1 = \bar n_1 \times \bar k = \bar n \times \bar k$ (căci tried. $S - F$ al lui Γ e dat de $\bar l_1$, $\bar n_1 = \bar n$, $\bar b_1 = \bar k$), deducem $1/\tau = -(\bar n \times)\bar k \cdot \bar b/\rho_1\sqrt{1+a^2} = \bar l \cdot \bar k \sin\theta/\rho_1 = \sin\theta\cos\theta/\rho_1$. Cu (71), găsim $\rho/\tau = \operatorname{ctg}\theta$. Reciproc (Barré): $\rho = k\tau$ şi $\bar l' = \bar n/\rho = (\tau/\rho)\bar b'$; deci $k\bar l' = \bar b'$ sau

(72′) $$k\bar l = \bar b + \bar a \qquad (\bar a - \text{vector constant}),$$

de unde obţinem $\bar a \cdot \bar l = k$ (const.). *Obs.* $d_1)$ Din (72′): $k^2 + 1 = a^2$; deci $\cos\theta = \bar l \cdot \bar a/|\bar a| = k/\sqrt{k^2+1} = \rho/\sqrt{\rho^2+\tau^2}$. $d_2)$ Înmulţind scalar cu $\bar n$ relaţia (72′), rezultă proprietatea b): $\bar a \cdot \bar n = 0$. *Apl.* $d_1)$ $\cos\theta = \bar a \cdot \bar l = (le^t - me^{-t} + \sqrt{2}\,n)/(e^t + e^{-t}) = \text{const.}$ pentru $l = 1$, $m = -1$, $n = 0$, încît $\theta = \pi/4$. $d_2)$ $\rho = 3\sqrt{2}(t^2+t+1)^2$, $\tau = -6(t^2+t+1)^2$. $d_3)$ $\rho = -\tau = 1$. $d_4)$ $\rho = \tau/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(t^2-t+1)^2$; e tot elicea $d_2)$ într-o schimbare a parametrului. $d_5)$ $\rho = 4\tau = (1+t^2)^2/\sqrt{2}t$; e elicea $d_1)$. e) Din (58′) şi (58‴) deducem $(\rho\bar l')' = -\bar l/\rho - \bar b/\tau$; de unde, cînd $\rho = k\tau$, rezultă $\rho(\rho\bar l')' = -(1+k^2)\bar l + k\bar a$. Introducînd *curbura integrală* (coresp. intervalului $[0, s]$): $t(s) = \int_0^s ds/\rho$, obţinem

(73) $$\bar l'' = -(1+k^2)\bar l + k\bar a \quad \text{cu} \quad \bar l = \bar C_1 \cos\sqrt{1+k^2}\,t + \bar C_2 \sin\sqrt{1+k^2}\,t + k\bar a/(1+k^2).$$

Pentru ca $\bar{l}^2 = 1$, e necesar ca $\bar{C}_1^2 - \bar{C}_2^2 = 0$, $\bar{a}\cdot\bar{C}_1 = \bar{a}\cdot\bar{C}_2 = \bar{C}_1\cdot\bar{C}_2 = 0$, $\bar{C}_1^2 + k^2\bar{a}^2/(1+k^2)^2 = 1$. Înlocuind pe t prin s în $\bar{l}$, ecuația (70′) determină curba. *Apl.* e$_1$) Avem $\rho/\tau = \text{const}$. Din (71) rezultă $\rho_1 = \rho\sin^2\theta = \rho/(1+a^2) = \text{const.}$; deci Γ e un cerc. *Obs.* Pentru o elice circulară (v. probl. 94), găsim $\rho = r/(r^2+k^2)$, $\tau = -k/(r^2+k^2)$; rezolvînd sistemul, obținem $r = \rho/(\rho^2+\tau^2)$, $k = -\tau/(\rho^2+\tau^2)$. e$_2$) Fie $\rho = ps$, $\tau = qs$ și $\rho/\tau = p/q = k$. Conform (71), $\rho_1 = ps/(1+a^2) = p\delta/\sqrt{1+a^2}$, căci $s = \sqrt{1+a^2}\sigma$. Curbele plane pentru care raza de curbură e proporțională cu arcul sînt spiralele logaritmice (v. probl. I, 126). Dacă $r = be^{c\theta}$ e ecuația polară a spiralei, atunci $\sigma = b\sqrt{1+c^2}\,e^{c\theta}/c$; deci elicea are ecuațiile de forma $x = Ae^{c\theta}\cos\theta$, $y = Ae^{c\theta}\sin\theta$, $z = Be^{c\theta}$. Sau: curbura integrală fiind $t(s) = \dfrac{1}{p}\ln s$, avem $\bar{l} = (1/ps)\dfrac{d\bar{r}}{d\bar{l}}$; deci, conform (73), $\dfrac{d\bar{r}}{d\bar{l}} = e^{pt}\bar{t}$. Luînd axele astfel ca $\bar{i} = \sqrt{p^2+q^2}\,(\bar{C}_1 - \bar{C}_2)/\sqrt{2}\,q$, $\bar{j} = \sqrt{p^2+q^2}(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)/\sqrt{2}\,q$, $\bar{k} = q\bar{a}/\sqrt{p^2+q^2}$, rezultă o elice cilindro-conică.

127 Condiția ca o curbă strîmbă să fie o elice e ca:

(74) a) $(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'^{\text{V}})/(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') = 3\bar{r}''\cdot\bar{r}'''/\bar{r}''^2$; b) $(\bar{r}''\bar{r}r'''\bar{r}'^{\text{V}}) = 0$.

128 Se numește *curbă Bertrand* o curbă în spațiu ale cărei normale principale sînt normale principale ale alteia. Să se arate: a) Distanța dintre puncte corespondente a 2 curbe Bertrand asociate e constantă. b) Tangentele în punctele corespunzătoare a 2 curbe Bertrand asociate fac un unghi constant (*teorema Schell*). c) O curbă e curbă Bertrand dacă și numai dacă curbura și torsiunea sînt legate printr-o relație liniară. d) Produsul torsiunilor a 2 curbe Bertrand asociate e constant. e) Dacă tangentele a 2 curbe Bertrand asociate — în puncte corespondente — sînt perpendiculare, curbele au curburile constante și egale; în acest caz, să se determine produsul torsiunilor (în puncte corespondente). Reciproc: O curbă C de curbură constantă (*cerc strîmb*) e o curbă Bertrand, curba asociată C_1 avînd aceeași curbură ca și C; fiecare din aceste curbe e locul centrelor de curbură ale celeilalte, tangentele în punctele corespondente fiind perpendiculare (*teorema Monge*). f) O curbă Bertrand are o infinitate de curbe Bertrand asociate dacă și numai dacă e o elice. g) O curbă C de torsiune constantă e o curbă Bertrand, curba asociată C_1 avînd aceeași torsiune ca și C. h) Să se exprime curbura și torsiunea curbei asociate C_1 cu ajutorul curburii și torsiunii lui C.

R. Fie C de ecuație (57); curba Bertrand asociată are ecuația

(75) $$C_1:\ \bar{r}_1 = \bar{r} + l\bar{n} \quad \text{cu} \quad l = \text{const.}$$

Căci $\bar{l}_1 = d\bar{r}_1/ds_1 = [(1 - l/\rho)\bar{l} + l'\bar{n} - l\bar{b}/\tau]\dfrac{ds}{ds_1}$, $\bar{n}_1 = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon = \pm 1)$; deci $\bar{l}_1\cdot\bar{n}_1 = 0$ dacă $l' = 0$. a) $PP_1^2 = (\bar{r}_1 - \bar{r})^2 = l^2$. b) $ds_1 = |d\bar{r}_1| = \sqrt{(1 - l/\rho)^2 + (l/\tau)^2}\,ds$. Deci $\bar{l}_1 = \cos\theta\,\bar{l} + \sin\theta\,\bar{b}$, $\bar{n}_1 = \varepsilon\bar{n}$, $\bar{b}_1 = \varepsilon(-\sin\theta\,\bar{l} + \cos\theta\,\bar{b})$. Cum $d\bar{l}_1/ds \parallel \bar{n}$, atunci $(d\bar{l}_1/ds)\cdot\bar{l} = -\sin\theta\dfrac{d\theta}{ds} = 0$, $(d\bar{l}_1/ds)\cdot\bar{b} = \cos\theta\dfrac{d\theta}{ds} = 0$, adică $d\theta/ds = 0$. c) Din $\bar{l}_1$ rezultă $(1 - l/\rho)\dfrac{ds}{ds_1} = \cos\theta$, $-(\rho/\tau)\dfrac{ds}{ds_1} = \sin\theta$; deci condiția necesară și suficientă

(75′) $$1 - l/\rho + (l/\tau)\operatorname{ctg}\theta = 0, \quad \text{adică} \quad a/\rho + b/\tau + c = 0 \qquad (a, b, c - \text{constante}).$$

Obs. c$_1$) (Dacă $1/\rho = -c/a$: $\bar{n}_1 = -\bar{n}$. c$_2$) Curba Bertrand C_1 asociată e

(75″) $$a_1/\rho_1 + b_1/\tau_1 + c_1 = 0 \quad \text{cu} \quad a_1 = -\varepsilon a,\ b_1 = b,\ c_1 = c;$$

căci $C:\ \bar{r} = \bar{r}_1 + l_1\bar{n}_1$ cu $l_1 = -\varepsilon l$. d) Avem $ll_1/\tau\tau_1 = \sin\theta\sin\theta_1$, adică $1/\tau\tau_1 = \sin^2\theta/l^2 = \text{const.}$ *Obs.* Avem și $(1 - l/\rho)(1 - l_1/\rho_1) = \cos\theta\cos\theta_1$, adică $(1 - l/\rho)(1 + \varepsilon l/\rho_1) = \cos^2\theta$ și $s_1 = \dfrac{1}{\cos\theta}\displaystyle\int_0^s (1 - l/\rho)\,ds = -\frac{l}{\sin\theta}\int_0^s \frac{ds}{\tau}$; pentru (75′) și (75″): $l = -a/c$, iar $b = -a\operatorname{ctg}\theta$.

e) Dacă $\theta = \pi/2$, atunci $b = 0$; din (75′) și (75″): $1/\rho = -c/a(\varepsilon = -1)$ și $1/\rho_1 = -c_1/a_1 = \varepsilon c/a = 1/\rho$. Obținem $1/\tau\tau_1 = 1/l^2 = 1/\rho^2$. Dacă $1/\rho = \text{const.}$, (75′) e satisfăcută cu $a = -c\rho$, $b = 0$. f) O elice circulară, avînd curbura constantă, e o curbă Bertrand; deoarece are și torsiunea constantă, există o infinitate de terne de valori pentru a, b și c care să verifice condiția (75′). Toate curbele Bertrand asociate sînt elice circulare, situate pe cilindri coaxiali cu cel pe care e situată elicea dată. Să presupunem că C e o curbă Bertrand cu 2 curbe asociate; sistemul $a/\rho + b/\tau + c = 0$, $a'/\rho + b'/\tau + c' = 0$ ($ab' - a'b \neq 0$) admite soluții constante pentru $1/\rho$ și $1/\tau$. g) Dacă $1/\tau = \text{const.}$, (75′) e satisfăcută de $a = 0$, $b = -c\tau$. Din (75″) rezultă $a_1 = 0$, $1/\tau_1 = -c_1/b_1 = -c/b = 1/\tau$. h) Conform celor din d), găsim $a^2TT_1/c^2 + (1 + aK/c)(1 - aK_1/c) = 1$; avînd și (75″), obținem $K_1 = \varepsilon c(aT - bK)/[a(aT - bK) - bc]$, $T_1 = c^2/[a(aT - bK) - bc]$. *Obs.* Cînd $K = \text{const.}$, deci $b = 0$, iar $K = -c/a$ și $\varepsilon = -1$, rezultă $K_1 = K$ și $TT_1 = c^2/a^2$. Dacă $T = \text{const.}$ ($a = 0$, $T = -c/b$): $T_1 = T$ și $K_1 = -\varepsilon K$.

129 Fiind dată curba C de ecuația (57), se consideră curba C_1 de ecuație

$$\bar{r}_1 = a\bar{r} + bT\bar{n} + c\int \bar{b}\, ds \quad (T - \text{raza de torsiune a lui } C).$$

Să se afle condiția în care curba C_1 e o curbă Bertrand.

R. Fie $\bar{\tau}_1 = \bar{r}_1' = A\bar{\imath} + B\bar{n} + C\bar{b}$, $\bar{\beta}_1 = \bar{r}_1' \times \bar{r}_1'' = \alpha\bar{\imath} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}$; $\bar{\nu}_1 = \bar{\beta}_1 \times \bar{\tau}_1 = k\bar{n}$ dacă $\Delta B = 0$, $\Delta\beta = 0$ cu $\Delta = C\alpha - A\gamma$, $A = a - bTK$, $B = bT'$, $C = c - bT^2$, $\alpha = B(C' - BT) - C(B' + AK + CT)$, $\beta = C(A' - BK) - A(C' - BT)$, $\gamma = A(B' + AK + CT) - B(A' - BK)$, cînd avem numai $B = \beta = 0$. Cazuri: I) $b \neq 0$, $T' = 0$ și $C = 0$ ($c = bT^2$) sau $A' = 0$ ($K' = 0$, $c \neq 0$, cînd C e o elice circulară); C și C_1 sînt curbe Bertrand. II) $b = 0$; atunci $\bar{t}_1 = (a\bar{\imath} + c\bar{b})/\sqrt{a^2 + c^2}$, $K_1\bar{n}_1 = (aK + cT)\bar{n}/(a^2 + b^2)$ cu $\bar{n}_1 = \varepsilon\bar{n}$ ($\varepsilon = \pm 1$), $K_1 = (aK + cT)/(a^2 + b^2)$, $\bar{b}_1 = t_1 \times \bar{n}_1 = (-c\bar{\imath} + a\bar{b})/\sqrt{a^2 + b^2}$, iar din $T_1\bar{n}_1 = \bar{b}_1' \dfrac{ds}{ds_1}$ găsim $T_1 = (-cK + aT)/(a^2 + c^2)$, încît $K = aK_1 - cT_1$, $T = cK_1 + aT_1$. Deci: dacă una din cele 2 curbe e o curbă Bertrand, atunci și cealaltă e curbă Bertrand. *Obs.* Asociind lui C curba $\Gamma: \bar{R} = \int \bar{b}\, ds$, iar lui C și Γ curba C_1, cînd C are curbura (torsiunea) constantă, Γ are torsiunea (curbura) constantă, iar C_1 e o curbă Bertrand.

9. CONTACTUL A DOUĂ CURBE

130 Să se arate că următoarele curbe C_1: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 25t^3/2 + 4t^2 + t$ și C_2: $x = a(1 - t^2/2)$, $y = at(1 - t^3/6)$, $z = te^t/(1 - 3t)$ sînt în contact.

131 O dreaptă d trece printr-un punct P_0 al curbei C; să se studieze cazul de contact.

R. Fie $P_0(s = 0) \in (57)$; deci $d: \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$ ($\bar{a}$-versor d). Dacă P_0 e punct staționar de ordin m, cu (35), avem $C: \bar{r} = \bar{r}_0 + s(1 + \eta)\bar{r}_0' + s^{m+1}(\bar{r}_0^{(m+1)} + \bar{\varepsilon})/(m + 1)!$ cu $\eta = \Sigma_i \lambda_i s^{i-1}/i! \to 0$, $\bar{\varepsilon} \to 0$ cînd $s \to 0$. Fie $P(s) \in C$ și $M(t) \in d$ astfel ca $\widehat{P_0P} = P_0M$; deci $t = (1 + \eta)s$. Rezultă $\overline{MP} = s(1 + \eta)(\bar{r}_0' - \bar{a}) + s^{m+1}(\bar{r}_0^{(m+1)} + \bar{\varepsilon})/(m + 1)!$; deci d și C nu sînt în contact dacă $\bar{a} \neq \bar{r}_0'$ și sînt în contact de ordin m dacă $\bar{a} = \bar{r}_0'$ (cînd d e tangentă în P_0 la C). Fie P_0 un punct (p, q) — multiplu; deci, cu (35″), avem C: $\bar{r} = \bar{r}_0 + s^p(1 + \eta)\bar{r}_0^{(p)}/p! + s^q(\bar{r}_0^{(q)} + \bar{\varepsilon})/q!$ cu $\eta = \Sigma_\alpha p!\,\lambda_\alpha s^{\alpha - p}/\alpha! \to 0$, $\bar{\varepsilon} \to 0$ cînd $s \to 0$. Pentru ca $P_0M = \widehat{P_0P}$, luăm $t = s^p(1 + \eta)/p!$ Obținem $\overline{MP} = s^p(1 + \eta)(\bar{r}_0^{(p)} - \bar{a})/p! + s^q(\bar{r}^{(q)} + \bar{\varepsilon})/q!$; dacă $\bar{a} \neq \bar{r}^{(p)}$, d și C se intersectează în p puncte confundate în P_0, fără a fi în contact (în P_0), iar dacă $\bar{a} = \bar{r}^{(p)}$, ele sînt în contact de ordinul $q - 1$.

132 Fie $P_0\,(s=0)$ un punct al curbei C de ecuație (57). Se zice că un *plan* π e *în contact în* P_0 *la* C dacă e tangent în P_0 la C. Notînd cu d distanța de la un punct $P\,(s)\in C$, apropiat de P_0, la planul π, se spune că *planul* π *are un contact de ordin* m (în P_0 la C) dacă $\lim\limits_{P\to P_0} d/s^{m+1}\neq 0$. Să se studieze cazul de contact.

R. Fie $\pi:(\bar R-\bar r_0).\bar a=0$ ($\bar a$ — versor normală la plan); deci $d=(\bar r-\bar r_0).\bar a$. Avem $d=[s\bar r_0'+\ldots+s^{m+1}(\bar r_0^{(m+1)}+\bar\varepsilon)/(m+1)!].\bar a$ cu $\bar\varepsilon\to 0$ cînd $s\to 0$. *Cond. necesară și suficientă pentru ca planul* π *să fie în contact de ordin* m *în* P_0 *la* C:

$$\bar r_0^{(i)}.\bar a=0\ (i=1,2,\ldots,m),\quad \bar r_0^{(m+1)}.\bar a\neq 0. \tag{76}$$

Dacă P_0 e punct staționar de ordin m, obținem $d=s(1+\eta)\bar r_0'.\bar a+s^{m+1}\bar r_0^{(m+1)}.\bar a/(m+1)!+\ldots+s^{(m+2)}(\bar r_0^{(m+2)}+\bar\varepsilon)\cdot\bar a/(m+2)!$ Dacă $\bar r_0'.\bar a\neq 0$, π nu conține tangenta (în P_0 la C) și nu e în contact în P_0 la C; de exemplu, planul normal $\pi_n:(\bar R-\bar r_0).\bar l=0$. Dacă $\bar r_0'.\bar a=0$, π e în contact de ordin m cu C (în P_0); de exemplu, planul rectificant $\pi_r:(\bar R-\bar r_0).\bar n=0$. Dacă, cu condiția $\bar r_0'.\bar a=0$, e îndeplinită și condiția $\bar r_0^{(m+1)}.\bar a=0$, deci $\bar a=\bar r_0'\times\bar r_0^{(m+1)}$, π e planul osculator (în P_0 la C) $\pi_0:(\bar R-\bar r_0\,\bar r_0'\,\bar r_0^{(m+1)})=0$, avînd un contact (cel puțin) de ordin $m+1$; căci, putem avea și condiția $\bar r_0^{(m+2)}.\bar a=0$, cînd $(\bar r_0'\,\bar r_0^{(m+1)}\,\bar r_0^{(m+2)})=0$, $\pi_0:(\bar R-\bar r_0\,\bar r_0'\,\bar r_0^{(m+2)})=0$ avînd un contact de ordin $m+2$. Dacă contactul e de ordin $m\geqslant 3$, π_0 se numește *plan supraosculator* (sin.: *plan staționar*). Deci: dacă tangenta în P_0 la C nu e staționară, condiția (necesară și suficientă) ca planul osculator în P_0 la C să fie staționar e $(\bar r_0'\,\bar r_0''\,\bar r_0''')=0$; dacă tangenta e staționară, această condiție e îndeplinită. O discuție asemănătoare se poate face cînd P_0 e punct p,q) — multiplu.

133 Să se afle proiecțiile unei curbe pe planele triedrului $S-F$ asociat curbei într-un punct ordinar al ei. Să se stabilească proprietăți ale curbei într-o vecinătate a unui asemenea punct.

R. Într-o vecinătate $\mathfrak{V}(P)$ a punctului ordinar $P\,(s=0)$, curba C are ecuațiile canonice (67). Proiecțiile ei C_0, C_n și C_r pe planele $\pi_0:z=0$ (osculator), $\pi_n:x=0$ (normal) și respectiv $\pi_r:y=0$ (rectificant) sînt

$$\begin{aligned}
&C_0:\ x=s-\frac{K^2}{6}s^3-\frac{KK'}{8}s^4+(5),\ y=\frac{K}{2}s^2+\frac{K'}{6}s^3+\frac{1}{24}(K''-K^3-KT^2)s^4+(5),\ z=0;\\
&C_n:\ x=0,\ y=\frac{K}{2}s^2+\frac{K'}{6}s^3+\frac{1}{24}(K''-K^3-KT^2)s^4+(5),\\
&\qquad\qquad z=\frac{KT}{6}s^3-\frac{1}{24}(2K'T+KT')s^4+(5);\\
&C_r:\ x=s-\frac{K^2}{6}s^3-\frac{KK'}{8}s^4+(5),\ y=0,\ z=-\frac{KT}{6}s^3-\frac{1}{24}(2K'T+KT')s^4+(5).
\end{aligned} \tag{77}$$

În $\mathfrak{V}(P)$, C e mai apropiată de π_0 decît de celelalte plane ale triedrului $S-F$ (în P la C): coordonatele lui $Q(s)\in C$ sînt distanțele de la Q la aceste plane, iar z e de ordin superior lui x și y în $s=$ = lungimea arc PQ. Primul termen al dezvoltării (77) determinînd ordinul de mărime al întregii sume în raport cu s, formulele (77) permit găsirea contactului planelor triedrului $S-F$ cu curba (în P); regăsim astfel faptul că π_n nu e în contact (în P) cu C și e traversat de C. Presupunem că *tangenta și planul osculator* (în P la C) *nu sînt staționare*: $\bar r'=\bar l$, $\bar r'\times\bar r''=K\bar b\neq 0$, $(\bar r'\,\bar r''\,\bar r''')=-K^2T\neq 0$; ținînd seama numai de primul termen în (77), rezultă că proiecțiile C_0, C_n și C_r sînt aproximate de *parabola* $x^2=2\rho y$, $z=0$ (cu focarul situat la jumătate distanță pînă la centrul cercului osculator — fig. 45), de *parabola semicubică* $y^3=9\tau^2z^2/2\rho$, $x=0$ (cu punct de întoarcere de prima speță în P, tangenta dublă fiind normala în P la C — fig. 46) și, respectiv, *parabola cubică* $z=-x^3/6\rho\tau$, $y=0$ (pentru care P e punct de inflexiune, x și z fiind de același semn sau de semne contrare după cum $\tau\lessgtr 0$ — fig. 47). C are un contact de ordin 1 cu π_r și de ordin 3 cu π_0.

Presupunem că *tangenta nu e staționară*: $\bar r'=\bar l$, $\bar r'\times\bar r''=K\bar b\neq 0$, iar *planul osculator e staționar* (de cel mai mic ordin): $(\bar r'\,\bar r''\,\bar r''')=-K^2T=0$, $(\bar r'\,\bar r''\,\bar r'^{\mathrm{v}})=2KK'T+K^2T'\neq 0$; în P, avem $K\neq 0$, $T=0$, $T'\neq 0$. C_0 e *parabola* $x^2=2\rho y$, $z=0$, C_n are în P un punct $(2,4)$ — multiplu (punct de întoarcere de a doua speță), iar C_r are în P un punct de ondulație (fig. 48). C are un contact de ordin 1 cu tangenta și cu π_r, fiind de ordin 3 cu π_0 (pe care nu-l traversează). Presupunem că *tangenta și planul osculator sînt staționare* (de cel mai mic ordin): $\bar r'=\bar l$, $\bar r'\times\bar r''=0$, $\bar r'\times\bar r'''=K'\bar l+KT\bar n\neq 0$, $(\bar r'\,\bar r''\,\bar r''')=0$, $(\bar r'\,\bar r''\,\bar r'^{\mathrm{v}})\neq 0$; deci $K=0$, $K'\neq 0$, $T\neq 0$. $C_0:y=K'x^3/6$, $z=0$ are în P un punct de inflexiune, $C_n:y^4=-4K'z^3/3T^3$, $y=0$ are în P un punct de ondulație, $C_r:z=-K'Tx^4/12$, $y=0$ are în P un punct de ondulație (fig. 49). C are

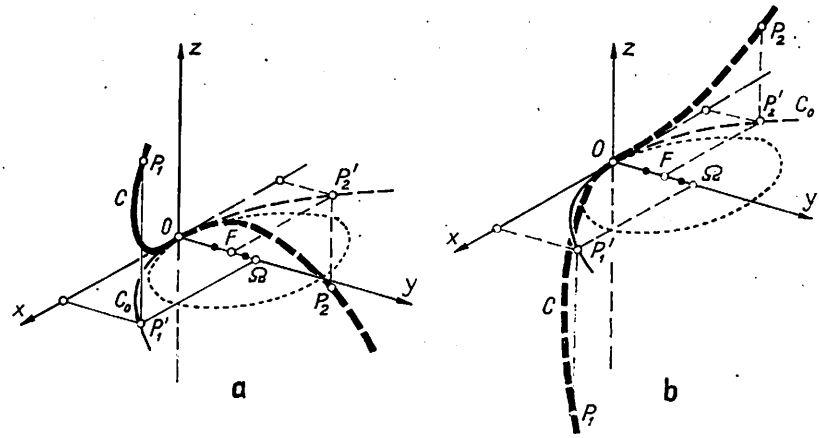


Fig. 45

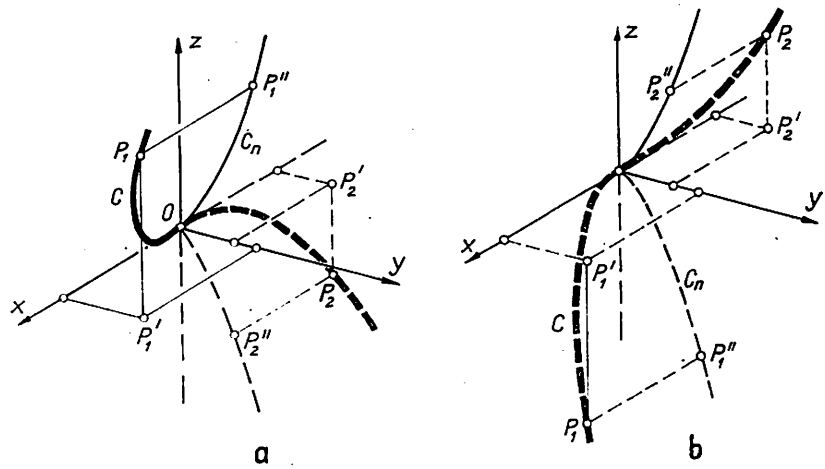


Fig. 46

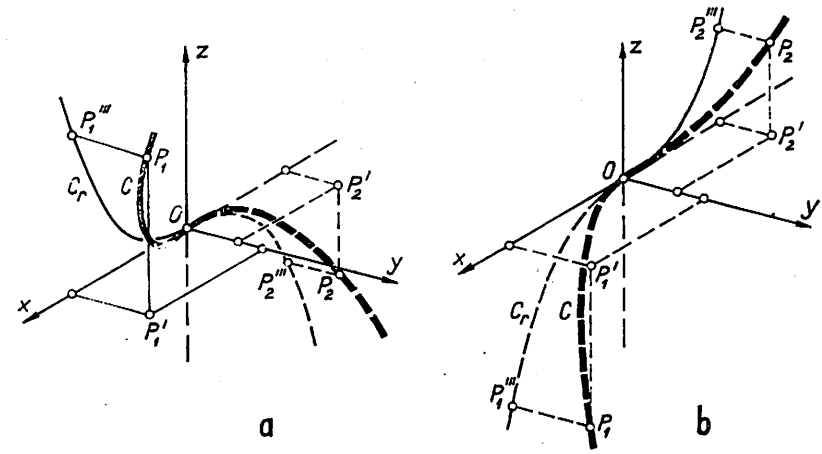


Fig. 47

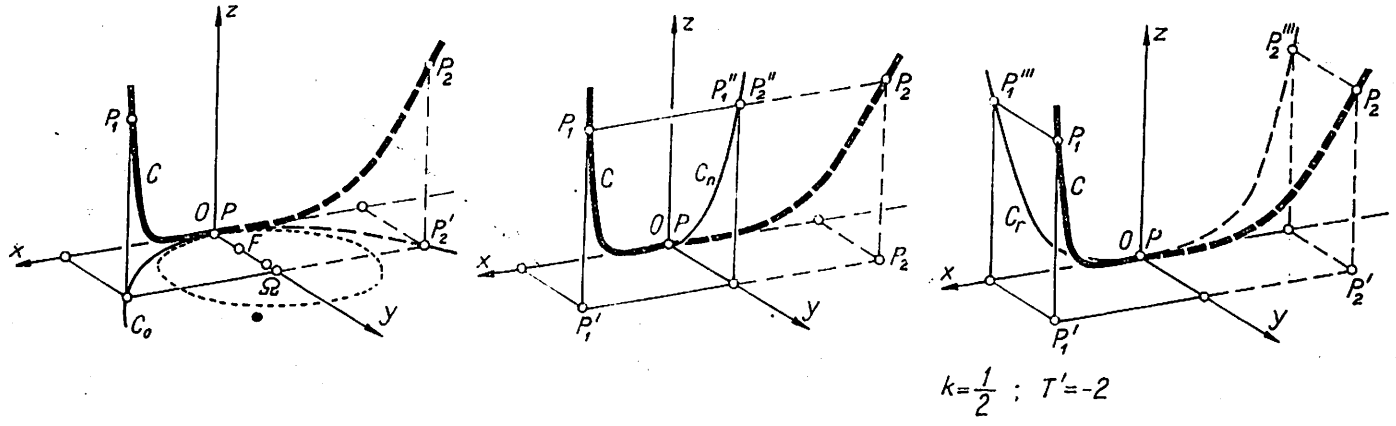

z
x
y
O
P
C
F
Ω
C_0
C_n
C_r
P_1
P_2
P_1'
P_2'
P_1''
P_2''
P_1'''
P_2'''
$k=\frac{1}{2}$; $T'=-2$

Fig. 48

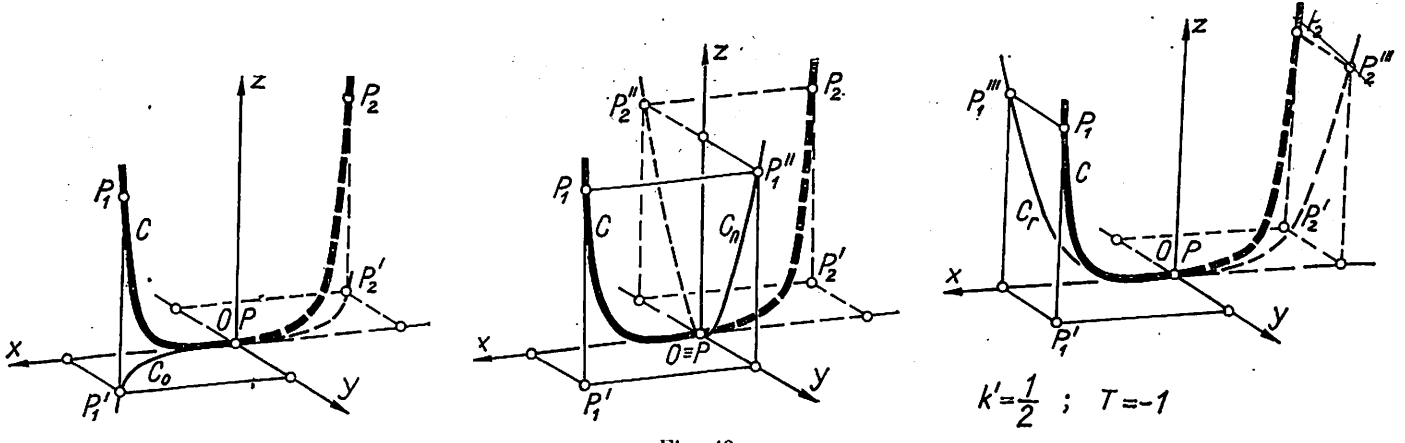

z
x
y
O
P
C
C_0
C_n
C_r
$O\equiv P$
P_1
P_2
P_1'
P_2'
P_1''
P_2''
P_1'''
P_2'''
$k'=\frac{1}{2}$; $T=-1$

Fig. 49

un contact de ordin 2 cu tangenta (P e punct de inflexiune pentru C) și cu π_r (pe care îl traversează), contactul fiind de ordin 3 cu π_0 (pe care nu-l traversează). *Apl.* Pentru cubica (30), în punctul $P\,(t = 0)$, rezultă primul caz (fig. 50).

134 Să se arate că 2 curbe în contact de ordin 4 au, în punctul (ordinar) comun, curburile și torsiunile egale. Reciproca e adevărată?

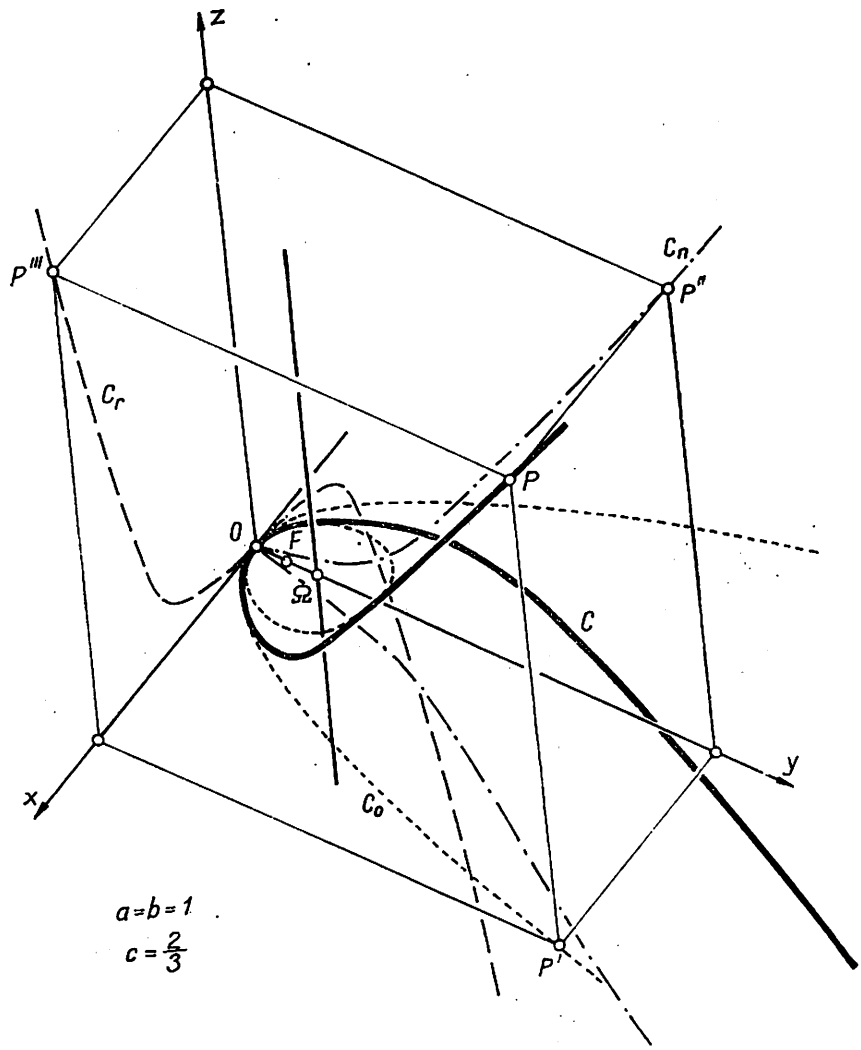


Fig. 50

135 Dacă un plan π are în P_0 un contact de ordinul m cu curba C, iar C_1 e proiecția făcută după o direcție oarecare a lui C pe π, curbele C și C_1 au un contact de ordinul m în P.

136 Fie o curbă C de ecuații (3) și o familie de curbe

$$(78) \qquad F\,(x, y, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n+2}) = 0,\ G\,(x, y, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}) = 0$$

depinzînd de $2n + 2$ parametri. Dacă în familia (78) există o curbă Γ care să aibă un contact de ordinul n cu curba C, într-un punct dat $P_0\,(t_0) \in C$, Γ se numește *curba osculatoare* a lui C în P_0. Să se determine ecuațiile curbei Γ. *Apl.* a) Dreapta osculatoare și cercul osculator la o curbă C (în $P_0 \in C$); de exemplu, în $P_0\,(t = 0)$ la cubica $C: x = t, y = t^2, z = 2t^3/3$. b) Cubica strîmbă osculatoare în O la $C: y = x^2 + ax^6 + \ldots, z = x^3 + bx^7 + \ldots$ $(ab \neq 0)$.

R. Γ corespunde valorilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ date de sistemul

$$\Phi^{(\alpha)}(t_0) = 0, \Psi^{(\alpha)}(t_0) = 0, \ (\alpha = 0, 1, \ldots, n), \tag{78'}$$

unde

$$\Phi(t) = \mathrm{F}\,[\mathrm{f}(t), \mathrm{g}(t), \mathrm{h}(t), \alpha_i], \Psi(t) = \mathrm{G}\,[\mathrm{f}(t), \mathrm{g}(t), \mathrm{h}(t), \alpha_i]. \tag{78''}$$

Obs. a) Γ e limita unei curbe C' a familiei (78), care trece prin $n + 1$ puncte ale lui C, apropiate de P_0, cînd acestea tind către P_0. b) Dacă contactul lui Γ cu C (în P_0) e mai mare decît $n + 1$, Γ e o *curbă supraosculatoare* (în P_0 la C). *Apl.* a) Fie familia de drepte $y = ax + p$, $z = bx + q$. (78') admite soluția $a = y_0'/x_0'$, $b = z_0'/x_0'$, $p = y_0 - x_0 y_0'/x_0'$, $q = z_0 - x_0 z_0'/x_0'$; deci: *dreapta osculatoare a lui C în P_0 e tangenta în P_0 la C.* Dreapta Γ e supraosculatoare dacă $y_0'' = ax_0''$, $z_0'' = bx_0''$; deci e o tangentă staționară (în P_0 la C). Fie familia de cercuri $(\bar{r} - \bar{a}).\bar{N} = 0$, $(\bar{r} - \bar{a})^2 = R^2$ cu centrul $\Omega\,(\bar{a} = \overline{O\Omega})$ și de rază R. Sistemul (78') se scrie

$$\bar{N}.\mathrm{d}\bar{r} = 0, \ \bar{N}.\mathrm{d}^2\bar{r} = 0, \ (\bar{r} - \bar{a}).\mathrm{d}\bar{r} = 0, \ (\bar{r} - \bar{a}).\mathrm{d}^2\bar{r} + \mathrm{d}\bar{r}^2 = 0. \tag{78'''}$$

Din primele 2 ecuații: $\Gamma \in \pi_0$, din a 3-a ecuație: raza $P\Omega$ a lui Γ e perpendiculară pe tangenta în P la C, din ultimele 2 ecuații: Ω e intersecția a 2 normale principale apropiate (deci a lui π_0 cu 2 plane normale apropiate); așadar $\bar{a} = \bar{r} + R\bar{n}$. Fie C de ecuație (57); conform ecuațiilor S—F, ultima ecuație (78''') devine $R = \rho$. Dreapta dusă prin Ω perpendiculară pe planul osculator (în P la C) se numește *axă polară* (sin.: *axă de curbură*) a lui C relativă la P; e, deci, limita intersecției planului normal din P cu cel din P_1 (apropiat de P), cînd $P_1 \to P$. Așadar, axa polară are ecuațiile

$$d: (\overline{R} - \bar{r}).\bar{l} = 0, \ (\overline{R} - \bar{r}).\bar{n} - \rho = 0 \text{ sau } (\overline{R} - \bar{a}).\bar{b} = 0. \tag{78^{IV}}$$

Obs. Dreapta polară generează o suprafață desfășurabilă, denumită *suprafața polară* $\Sigma: \overline{R}\,(s, v) = \bar{r} + \rho\bar{n} + v\bar{b}$ asociată lui C. Cînd C e plană, Σ e un cilindru (tăiat de planul lui C după locul centrelor de curbură ale lui C, adică după evolventa lui C). *Ex.* Dreapta osculatoare e Ox (tangenta în O la C), cercul osculator: $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$, $z = 0$ (v. fig. 50). b) O cubică strîmbă e intersecția a 2 cuadrice cu o generatoare comună, de ex.: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz = 0$, $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y = 0$, și e determinată prin 6 puncte; deci contactul va fi de ordin 5. Cu ecuațiile lui C în ecuațiile cubicei și anulînd toți coeficienții pînă la ordinul 5 inclusiv, găsim $\Gamma: y^2 - xz = 0$, $y - x^2 = 0$.

10. CERC ȘI SFERĂ OSCULATOARE LA O CURBĂ STRÎMBĂ

137 Fie $C: \bar{r} = \cos^3 t\,\bar{i} + \sin^3 t\,\bar{j} + \cos 2t\,\bar{k}$ și $\Gamma: r = \mathrm{e}^t\bar{i} + \mathrm{e}^{-t}\bar{j} + t\sqrt{2}\,\bar{k}$. Se cere: a) Să se calculeze curbura și torsiunea cu ajutorul formulelor S—F. b) Să se determine elementele (centrul, raza) cercului și sferei osculatoare. c) Să se afle axa polară relativă la vîrfurile curbei.

R. Pentru C: a) $ds/dt = |\bar{r}'| = \frac{5}{2}\sin 2t$, $\bar{\imath} = \bar{r}'\frac{dt}{ds} = \frac{3}{5}\left(-\cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} - \frac{4}{3}\bar{k}\right)$. $\bar{n}/\rho = \bar{\imath}'\frac{dt}{ds}$, deci $1/\rho = 6/25 \sin 2t$, iar $\bar{n} = \sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j}\cdot\bar{b} = \bar{\imath}\times\bar{n} = \frac{1}{5}(4\cos t\,\bar{i} - 4\sin t\,\bar{j} - 3\bar{k})\cdot\bar{n}/\tau = \bar{b}'\frac{dt}{ds}$, deci $1/\tau = -8/25 \sin 2t$. C e o elice. b) Avem

(79) $\qquad \Omega_c : \bar{a}_c = \bar{r} + \rho\bar{n},\ R_c = \rho$ și $\Omega_s : \bar{a}_s = \bar{a}_c - \tau\frac{d\rho}{ds}\bar{b},\ R_s^2 = R_c^2 + \tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$.

Deci $\bar{a}_c = \cos t\left(1 + \frac{22}{3}\sin^2 t\right)\bar{i} + \sin t\left(1 + \frac{22}{3}\cos^2 t\right)\bar{j} + \cos 2t\,\bar{k}$, $R_c = \frac{25}{6}\sin 2t$; $a_s = \cos t\left(1 + \frac{22}{3}\sin^2 t + \frac{125}{12}\sin 4t\right)\bar{i} + \sin t\left(1 + \frac{22}{3}\cos^2 t - \frac{125}{12}\sin 4t\right)\bar{j} + \cos 2t\left(1 - \frac{125}{8}\sin 2t\right)\bar{k}$, $R_s = \frac{25}{54}\sqrt{81 + (100\cos 2t)^2}$. c) Vîrfurile sînt determinate de

(79′) $\qquad d\rho/ds = 0.$

C e o curbă închisă: $\bar{r}(0) = \bar{r}(2\pi) = (1, 0, 0)$; deci $I_{max} = [0, 2\pi]$. Ecuația (79′) admite $t_1 = \pi/4$ și $t_2 = 3\pi/4$. În $P_1(\pi/4)$: $\bar{a}_1 = 7\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j})/3$, $R_1 = 25/6$, $\bar{b}_1 = (2\sqrt{2}\,\bar{i} - 2\sqrt{2}\,\bar{j} - 3\bar{k})/5$; deci d_1: $x - y = 0$, $3x + 2\sqrt{2}z - 7\sqrt{2}/3 = 0$. În $P_2(3\pi/4)$: $a_2 = 7\sqrt{2}(-\bar{i} + \bar{j})/3$, $R_2 = 25/6$, $\bar{b}_2 = -(2\sqrt{2}\,\bar{i} + 2\sqrt{2}\,\bar{j} + 3\bar{k})/5$; d_2: $x + y = 0$, $3x - 2\sqrt{2}z + 7\sqrt{2}/3 = 0$. Pentru Γ: a) $\bar{\imath} = (e^t\bar{i} - e^{-t}\bar{j} + 2\bar{k})/2\operatorname{ch} t$, $\bar{n} = [\sqrt{2}(\bar{i} + \bar{j}) - (e^t - e^{-t})\bar{k}]/2\operatorname{ch} t$, $\bar{b} = \bar{\imath}\times\bar{n} = (-e^{-t}\bar{i} + e^t\bar{j} + 2\bar{k})/2\operatorname{ch} t$, $\rho = 2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t = \tau$. b) $\bar{a}_c = (e^t + 2\operatorname{ch} t)\bar{i} + (e^{-t} + 2\operatorname{ch} t)\bar{j} + 2(t - \operatorname{sh} 2t)\bar{k}$, $R_c = 2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t$, $\bar{a}_s = [e^t + 2\operatorname{ch} t(1 + 2e^{-t}\operatorname{sh} 2t)]\bar{i} + [e^{-t} + 2\operatorname{ch} t(1 - 2e^t\operatorname{sh} 2t)]\bar{j} + \sqrt{2}[t - \operatorname{sh} 2t(1 + 4\operatorname{ch} t)]\bar{k}$, $R_s = 2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t\sqrt{1 + 8\operatorname{sh} 2t}$. c) Un vîrf $P_1(0) = (0, 1, 0)$; $\bar{a}_1 = 3(\bar{i} + \bar{j})$, $R_1 = 2\sqrt{2}$, $\bar{b}_1 = (-\bar{i} + \bar{j} + \sqrt{2}\,\bar{k})/2$, d_1: $-(x - 3) = y - 3 = z/\sqrt{2}$.

138 Să se afle elementul de arc al liniei Γ_c a centrelor de curbură și al liniei Γ_s a centrelor sferelor osculatoare ale unei curbe în spațiu.

139 Dacă Ω și Ω_1 sînt centrale de curbură în punctele corespondente P și P_1 de pe 2 curbe Bertrand asociate, să se arate că biraportul $(P\,P_1\,\Omega\,\Omega_1)$ e o constantă pozitivă (*teorema Mannheim*).

140 Pe tangenta într-un punct P al unei curbe strîmbe C se ia un punct P_1 astfel ca $PP_1 = l$ (const.). Se cere: a) Să se arate că tangenta în P_1 la curba C_1, descrisă de acest punct cînd P parcurge pe C, e conținută în planul osculator în P la C. b) Să se demonstreze că planul normal în P_1 la C_1 trece prin axa polară a lui C relativă la P. c) Să se calculeze curbura lui C_1 cu ajutorul curburii și torsiunii lui C.

R. C_1: $\bar{r}_1 = \bar{r} + l\bar{\imath}$. a) $\bar{\imath}_1 = (\bar{\imath} + l\bar{n}/\rho)\frac{ds}{ds_1} \perp \bar{b}$, iar $P_1 \in \pi_0$ (fig. 51). b) π_{1n}: $(\bar{R} - \bar{r}_1)\cdot\bar{r}_1' = 0$, adică $(\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{\imath} + ((\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{n}/\rho - 1) = 0$, conținînd axa polară (78′^{v}). c) $1/\rho_1^2 = [l^2/\rho^4 + (1 - l\rho'/\rho)^2/\rho^2 + l^2/\rho^2\tau^2](1 + l^2/\rho^2)$.

141 Fie C un cerc strîmb și C_0 linia centrelor de curbură ale lui C. Să se arate: a) Linia centrelor sferelor osculatoare coincide cu cea a centrelor de curbură, C_0 fiind un cerc strîmb cu curbura egală cu cea a lui C. b) Linia centrelor de curbură ale lui C_0 e C, iar tangentele în 2 puncte corespondente sînt axele polare ale curbelor respective la cele 2 puncte corespondente. c) Produsul torsiunilor în puncte corespondente e egal cu pătratul curburii comune. d) Curbele C și C_0 sînt în relație involutorie (*teorema Monge*).

142 Fie C o curbă sferică. Se cere : a) Să se arate că axa ei polară, relativă la un punct $P \in C$, trece prin centrul Ω_0 al sferei S pe care se găseşte C. b) Să se exprime elementele cercului osculator, curbura şi torsiunea lui C (în P) în funcţie de unghiul θ dintre raza din P şi axa polară. c) Să se demonstreze că expresia $\theta - \sigma$ rămîne constantă cînd P descrie pe C, σ

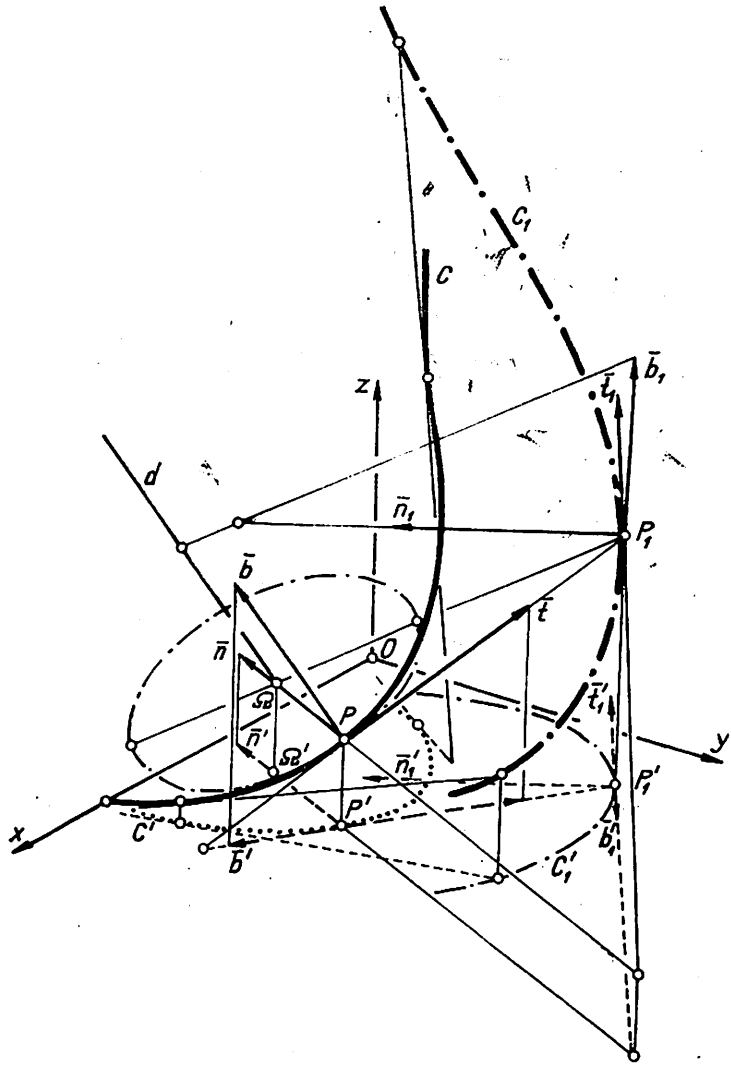


Fig. 51

fiind lungimea indicatoarei sferice a binormalelor lui C. *Apl.* la curba lui Viviani.

R. a) În P la C, $\pi_n \in \Omega_0$ (v. probl. 64); deci $\pi_n : (\overline{R} - \bar{r}_0)\cdot\bar{r}' = 0 (\bar{r}_0 = \overline{O\Omega_0})$. În $P^*(t + \Delta t)$, $\overset{*}{\pi}_n : (\overline{R} - \bar{r}_0)\cdot\bar{r}'\,(t + \Delta t)$. Axa polară $d = \pi_n \cap \overset{*}{\pi}_n$ cînd $P^* \to P$ şi

(80) $$d : (\overline{R} - \bar{r}_0)\cdot\bar{r}' = 0,\ (\overline{R} - \bar{r}_0)\cdot\bar{r}'' = 0, \text{ adică } \overline{R} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{b}$$

și $d \in \Omega_0$. b) Din triunghiul dreptunghic $P\Omega\Omega_0$ (fig. 52) rezultă $\Omega_0\Omega = R\cos\theta$, $\rho = R\sin\theta$; deducem $\Omega : \bar{a}_c = \bar{r}_0 + R\cos\theta\,\bar{b}$, $R_c = R\sin\theta$. Însă $(\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot\bar{n} = |\bar{r} - \bar{r}_0|\cos(\pi/2 + \theta) = -R\sin\theta$, iar din $(\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot\bar{b} = R\cos\theta$ — prin derivare — avem $(\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot\bar{n}/\tau = -R\sin\theta\,\dfrac{d\theta}{ds}$; deci $1/\tau = d\theta/ds$. *Obs.* Sfera osculatoare la C, în fiecare din punctele ei, e chiar S, iar cota de dedesubtul planului osculator al centrului sferei osculatoare (în P la C) e $-\tau\,\dfrac{d\rho}{ds}$; aici $\Omega\Omega_0 = -\tau\,\dfrac{d\rho}{ds} =$

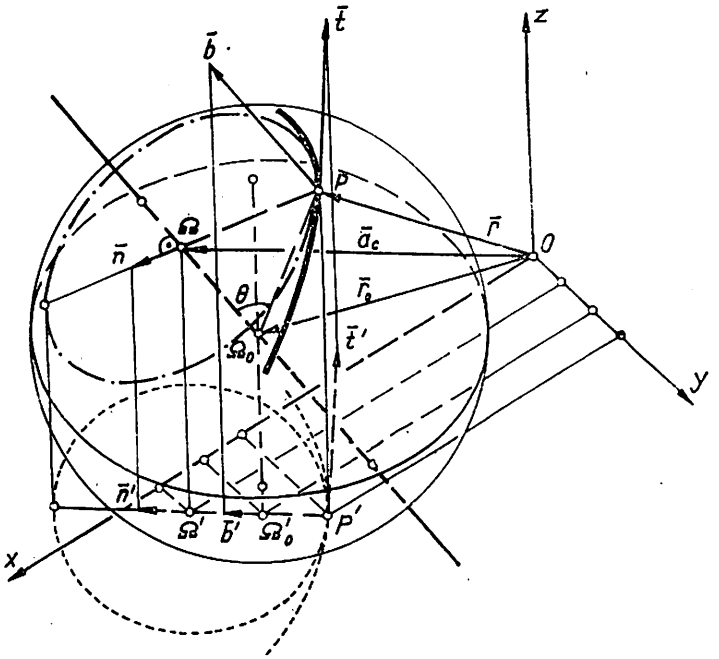


Fig. 52

$= -R\cos\theta$, încît $\tau\,\dfrac{d\theta}{ds} = 1$. c) Deoarece $d\sigma/ds = |1/\tau|$, obținem $d\theta/ds = d\sigma/ds$; deci $\theta - \sigma =$ = const., cînd P descrie pe C. *Obs.* Fie P_1 intersecția axei polare, orientată de $\bar{b}$, cu S; P_1 descrie pe $C_1 : \bar{r}_1 = \bar{r}_0 + R\,\bar{b}$, paralelă cu indicatoarea sferică a binormalelor lui C. Atunci avem $ds_1/ds = |\bar{r}_1'| = R\,|1/\tau| = R\,\dfrac{d\sigma}{ds}$, încît $d\theta/ds = (ds_1/ds)/R$; deci $R\,\theta - s_1 =$ const., cînd P descrie pe C. *Apl.* $d : x/\sin t\,(1 + 2\cos^2 t) = -y/2\cos^3 t = z/2$. Cu $u = \sin t$, $\cos(\Omega_0 P, \Omega_0 P_1) = \cos\theta = u(3 - u^3)/\sqrt{8 - 3u^2}$, $\sin\theta = \sqrt{(2 - u^2)^3/(8 - 3u^2)}$ și $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{(2 - u^2)^3}/u(3 - u^2)$. Atunci $\rho = a\sqrt{(2 - \sin^2 t)^3/(8 - 3\sin^2 t)}$, iar $1/\tau = -6\cos t/a\,(8 - 3\sin^2 t)$; căci $1/\tau = \dfrac{d\theta}{dt}\,\dfrac{dt}{ds}$, $ds/dt = a\sqrt{2 - \sin^2 t}$ și se derivează $\cos\theta$. Cum $\bar{b} = \bar{r}' \times \bar{r}''/|\bar{r}' \times \bar{r}''| = [\sin t(1 + 2\cos^2 t)\,\bar{i} - 2\cos^3 t\,\bar{j} + 2\bar{k}]/\sqrt{8 - 3\sin^2 t}$, iar $r_0 = 0$, obținem $\bar{a}_c = a\cos\theta\,\bar{b}$.

143 Să se găsească în origine sfera osculatoare a curbei

$$x = t,\ y = \ln(1 + t),\ z = e^t - 1.$$

144 Să se afle ecuațiile cercului osculator C_0 și cele ale sferei osculatoare S_0 pentru curba $C : x = t, y = t^2, z = 2t^3/3$.

R. C_0 e intersecția lui $\pi_0 : 2t^2x - 2ty + z - 2t^3/3 = 0$ cu sfera $S(\Omega; \rho)$, Ω fiind centrul de curbură, iar ρ raza de curbură. Avem $ds/dt = 1 + 2t^2$, $\bar{i} = (\bar{i} + 2t\bar{j} + 2t^2\bar{k})/(1 + 2t^2)$; din $d\bar{i}/ds = \bar{n}/\rho$ deducem $\rho = (1 + 2t^2)^2/2$, $\bar{n} = [-2t\bar{i} + (1 - 2t^2)\,\bar{j} + 2t\bar{k}]/(1 + 2t^2)$. Rezultă $\bar{a}_c = -2t^3\bar{i} +$

$+ (1 + 2t^2 - 4t^4)\vec{j}/2 + t(8t^2 + 3)\,\vec{k}/3$ și $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4t^3x - (1 + 2t^2 - 4t^4)\,y - 2t\,(8t^2 + 3)\,z/3 - t^4\,(8t^2 + 15)/9 = 0$. $S_0: x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ e intersectată de C în 4 puncte confundate. Punctele de intersecție sînt date de $4t^6/9 + t^4 + 4ct^3/3 + (1 + 2b)\,t^2 + 2at + d = 0$; ecuația are o rădăcină t multiplă de ordin 4 dacă t anulează ecuația și primele ei 3 derivate. Deducem $a = -2t^3\,(4t^2 + 1)$, $b = 10t^4 + 3t^2 - 1/2$, $c = -t\,(20t^2 + 9)/3$, $d = t^4\,(40t^2 + 9)/9$.

145 Să se determine, în punctul $P_0\,(1, 1, 1)$, sfera osculatoare S_0 a curbei $xy = z^2$, $x^2 + y^2 = 2z$ și să se arate că e supra-osculatoare.

146 Dacă raza sferelor osculatoare la o curbă strîmbă e constantă, atunci curba e sferică sau e un cerc strîmb.

147 Linia centrelor de curbură ale unei elice e tot o elice, iar locul centrelor sferelor osculatoare ale unei elice circulare e de asemenea o elice circulară. *Apl.* a) Să se afle cilindrul de rotație și pasul elicei loc geometric al centrelor sferelor osculatoare ale unei elice circulare. b) Condiția ce trebuie să o satisfacă elicea circulară pentru ca centrul de curbură al ei să se afle pe același cilindru ca și curba însăși.

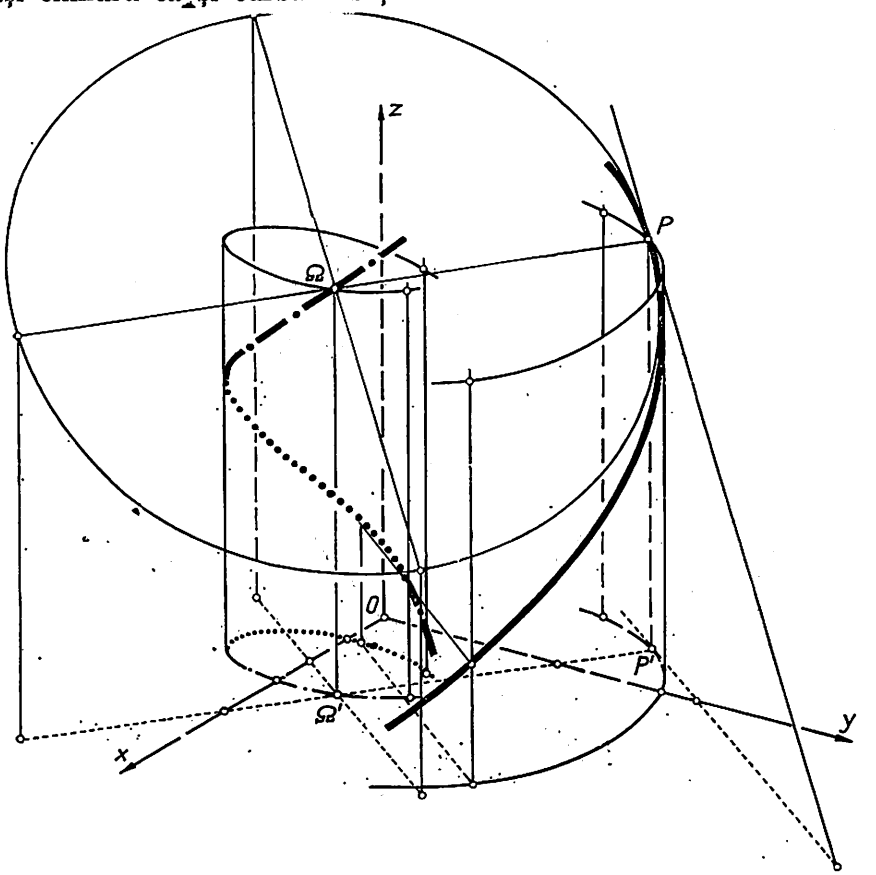


Fig. 53

R. Fie elicea (16) cu $\bar{a}\cdot\bar{l} = \text{const.}$, $\bar{a}$ — versor director al generatoarelor cilindrului pe care se află elicea. Din (79) și (v. probl. 126) $\bar{a}\cdot\bar{n} = 0$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = \text{const.}$, deci $\bar{a}\cdot\bar{n}' = 0$, $\bar{a}\cdot\bar{b}' = 0$, deducem $\bar{a}\cdot\bar{a}_c' = \bar{a}\cdot\bar{l} = \text{const.}$ și $\bar{a}\cdot\bar{a}_s' = \bar{a}\cdot\bar{l} - (\tau\rho')'\,\bar{a}\cdot\bar{b}$ (fig. 53); dacă elicea e circulară ($\rho = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$), atunci $\bar{a}\cdot\bar{a}_s' = \bar{a}\cdot\bar{l} = \text{const.}$ *Apl.* a) Fie elicea (6); atunci $\bar{a}_s = \bar{a}_c = -k^2(\cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j})/r +$

$+ kt\,\bar{k}$. Prin $t = t^* + \pi$ (rotație de 180° în jurul axei Oz) și $z = z^* + k$ (translație în lungul axei Oz) rezultă elicea circulară $\bar{a}_c = k^2(\cos t^*\,\bar{i} + \sin t^*\,\bar{j})/r + kt^*\bar{k}$, cu același pas ca și elicea dată, situată pe un cilindru de rotație de axă Oz și de rază k^2/r (fig. 54). b) Elicea (6) se află pe cilindrul $K : x^2 + y^2 = r^2 \cdot \Omega \in K$ dacă avem $k = r$. Pasul elicei : $h = 2k\pi$, lungimea cercului de bază : $l = 2r\pi$; deci $h = l$ (fig. 55).

148 Folosind sfera osculatoare, să se găsească condiția pentru ca o curbă în spațiu să fie sferică. *Ex.* : $x = 4t\,(1 - t^2)/(1 + t^2)^2$, $y = 8t^2/(1 + t^2)^2$, $z = 2\,(1 - t^2)/(1 + t)$.

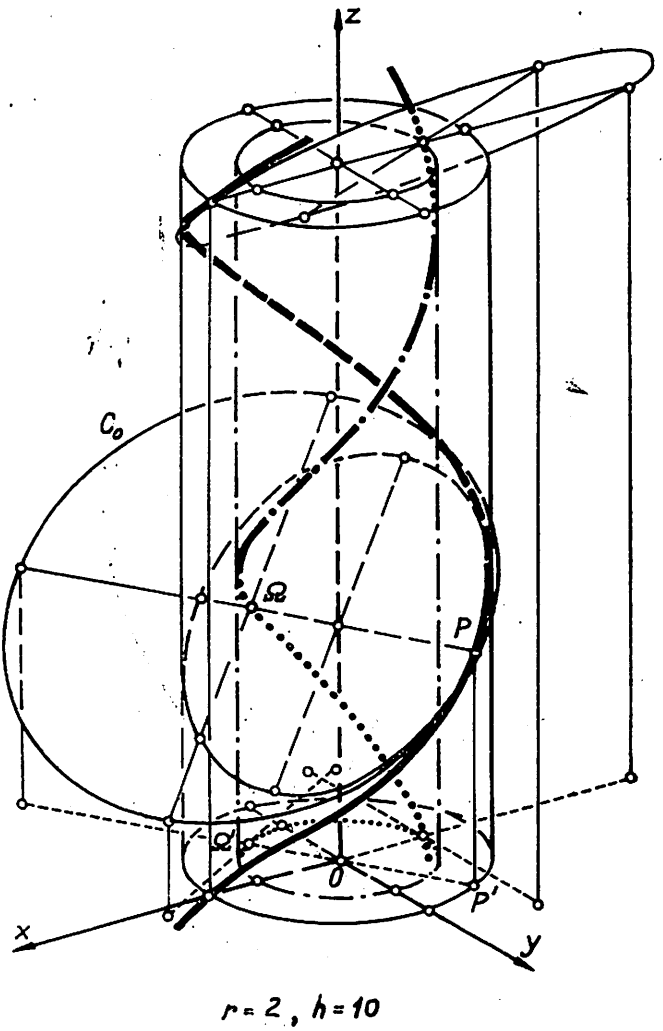


Fig. 54

149 Se numește *elice sferică* o curbă situată pe o sferă și ale cărei tangente formează unghiuri de mărime constantă cu o direcție fixă. Să se găsească ecuațiile intrinsece ale curbei.

R. Sînt curbe care satisfac simultan ecuațiile

$$\frac{\rho}{\tau} = a, \quad \rho + \tau \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right) = 0 \qquad (a = \operatorname{ctg} \theta = \text{const.}). \tag{81}$$

Ținînd seama de prima ecuație în a doua și integrînd de două ori, avem

$$\rho^2 = -a^2 s^2 + bs + c, \quad a\tau = \rho. \tag{81'}$$

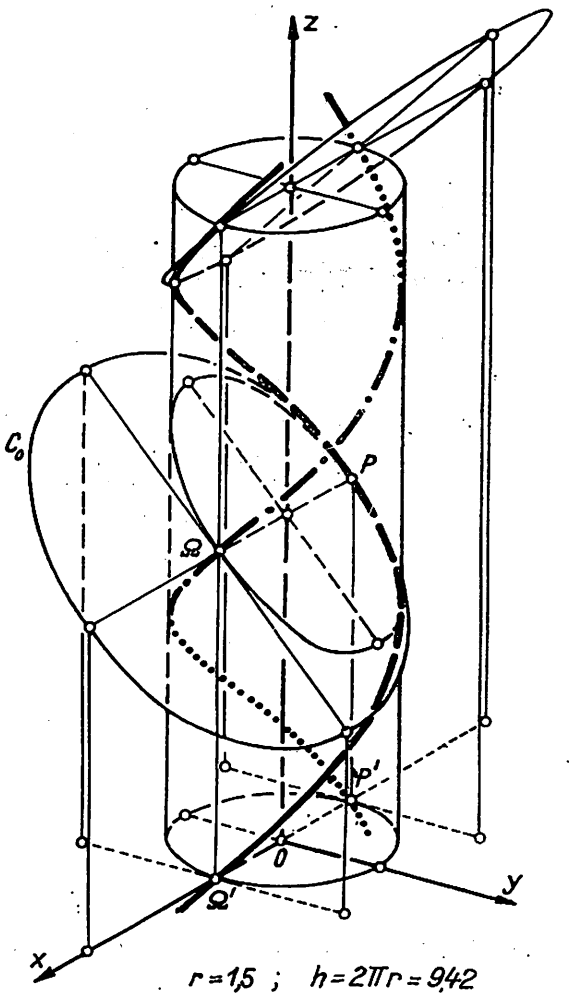


Fig. 55

Obs. a) Parametrul s variază între 2 valori finite: rădăcinile trinomului $-a^2s^2 + bs + c$; pentru aceste valori $\rho = \tau = 0$. b) Printr-o schimbare a originii arcelor pe curbă, ecuațiile intrinsece devin

$$\rho^2 = -a^2 s^2 + b^2/4a^2 + c, \quad a\tau = \rho; \tag{81''}$$

singurele elice sferice sînt epicicloidele sferice (v. probl. 79).

150 Dîndu-se curba C, fie Γ_c locul centrelor de curbură Ω_c și Γ_s locul centrului Ω_s al sferei osculatoare în P la C, cînd P descrie pe C. Să se

arate : a) Dreapta $P\Omega_s$ şi tangenta în Ω_c la Γ_c sînt antiparalele în raport cu unghiul $P\Omega_c\Omega_s$. b) Triedrele $S-F$ în P la C şi în Ω_s la Γ_s au muchiile paralele. c) Avem relaţia $\rho\rho_s + \tau\tau_s = 0$. Ce proprietate rezultă pentru elice?

R. a) Avem $\bar{a}_s' = \rho'\bar{n} - \rho b/\tau$; deci $\cos\theta = \bar{b}\cdot\bar{a}_c'/|\bar{a}_c'| = \rho/\sqrt{\rho^2 + \tau^2\rho'^2}$. $\overline{P\Omega}_s = \bar{a}_s - \bar{r} = \rho\bar{n} - \tau\rho'\bar{b}$; deci $\cos\theta_1 = \overline{P\Omega}_s\cdot\bar{n}/|\overline{P\Omega}_s| = \rho/\sqrt{\rho^2 + \tau^2\rho'^2}$. Tangenta în Ω_c la Γ_c se află în planul

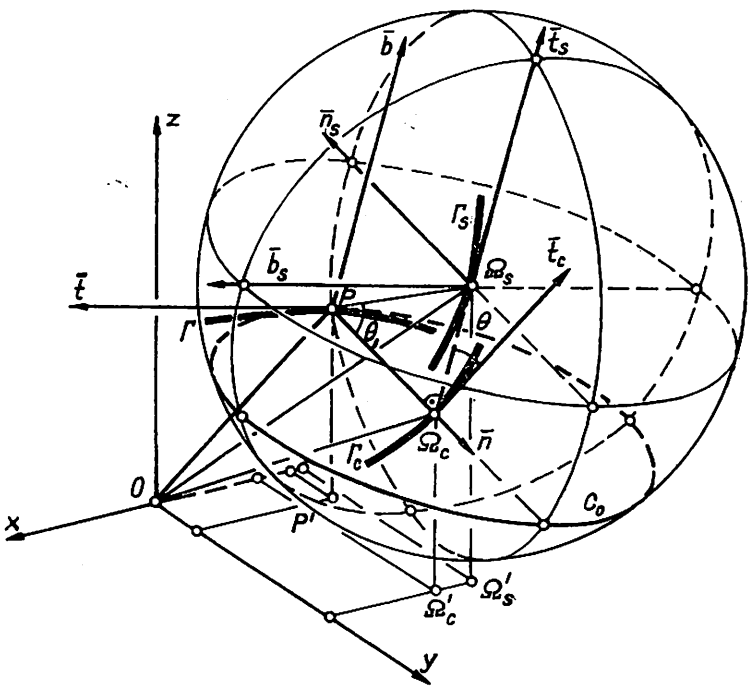


Fig. 56

normal în P la C; de unde rezultă $\theta = \theta_1$ (fig. 56). b) $\bar{a}_s' = -[\rho/\tau + (\tau\rho')']\,\bar{b}$; deci $\bar{l}_s \| \bar{b}$. Cum $ds_s/ds = |\bar{a}_s'| = \varepsilon(\rho/\tau + (\tau\rho')') = l$ (ε = sign τ), rezultă $\bar{l}_s = -\varepsilon\bar{b}$. Deci $\bar{n}_s/\rho_s = \bar{l}_s'(ds/ds_s) = -\varepsilon\bar{n}/l\tau$, adică $\bar{n}_s = -\bar{n}$, iar $\bar{b}_s = -\varepsilon\bar{l}$. c) $\rho_s = \varepsilon l\tau$, iar $\bar{n}_s/\tau_s = \bar{b}_s'(ds/ds_s) = -\varepsilon\bar{n}/l\rho$, încît $\tau_s = -\varepsilon l\rho$; de unde relaţia cerută. Dacă C e o elice, atunci şi Γ_s e o elice. *Obs.* Dacă C nu e curbă sferică : Ω_s e fix iar $\Gamma_s \equiv \Omega_s$ şi $l = 0$.

11. ÎNFĂŞURĂTOAREA UNEI FAMILII DE CURBE STRÎMBE

151 Să se afle înfăşurătoarea unei familii de curbe date parametric. *Apl.* : a) $x = t^2/4 + \alpha$, $y = 4t^3/3 + \alpha^2/2$, $z = 4t^4 + \alpha^3/6$; b) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \alpha t - (1 + \alpha^2)\,t^2/4$.

R. Fie familia de curbe (care depind de un parametru α)

(82) $$C_\alpha : \bar{r} = \bar{r}(t, \alpha).$$

Punctul caracteristic P_α al lui C_α fiind determinat de o funcţie $t(\alpha)$, vectorul său de poziţie dă ecuaţia vectorială a înfăşurătoarei

(82′) $$\Gamma : \bar{r} = \bar{r}(t(\alpha), \alpha).$$

C_α și Γ sînt tangente în P_α, deci vectorii tangentă $\bar{r}_t$ și $\bar{r}_t t' + \bar{r}_\alpha$ sînt paraleli : $\bar{r}_t \times (\bar{r}_t t' + \bar{r}_\alpha) = 0$, obținînd astfel condiția necesară și suficientă

(82'') $$\bar{r}_t \times \bar{r}_\alpha = 0, \text{ adică } x_\alpha/x_t = y_\alpha/y_t = z_\alpha/z_t,$$

care determină funcția $t(\alpha)$ caracterizînd punctul P_α. *Apl.* a) Condiția (82'') e îndeplinită dacă $\alpha = 8t$; deci $\Gamma : x = t^4/4 + 8t$, $y = 4t^3/3 + 32t^2$, $z = 4t^4 + 256\,t^3/3$; b) $\alpha = 2/t$, $\Gamma : x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - t^2/4$.

152 Să se arate că pentru o familie (82) de curbe plane, condiția (82'') e întotdeauna posibilă.

R. Fie planul $\pi : \bar{R} \cdot \bar{a} + d = 0$ cu $\bar{a}(a, b, c)$ — vector normală la π. Din condiția $C_\alpha \in \pi$, prin derivare, obținem $\bar{r}_t \cdot \bar{a} = 0$; $\bar{r}_\alpha \cdot \bar{a} = 0$; atunci $x_\alpha/x_t = y_\alpha/y_t = (ax_\alpha + by_\alpha)/(ax_t + by_t) = z_\alpha/z_t$, condiția (82'') reducîndu-se la una singură, care permite să găsim pe $t(\alpha)$.

153 Să se cerceteze dacă familia de curbe în spațiu : a) $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z, \alpha) = 0$; b) $F(x, y, z) = \alpha$, $G(x, y, z, \alpha) = 0$; c) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t, \alpha)$; d) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t) + \alpha$; e) $x = \alpha\, f(t)$, $y = \alpha\, g(t)$, $z = \alpha\, h(t)$ admite înfășurătoare. Explicație.

154 Se numește *riglată* o familie de drepte în spațiu care depind de un parametru; dacă familia admite înfășurătoare, se zice că riglata e o *desfășurabilă*. Să se determine condiția ca riglata

(83) a) $\bar{r} = \bar{r}_0(\alpha) + t\,\bar{a}(\alpha)$; b) $x = pz + a$, $y = qz + b$ (p, q, a, b—funcții de α)

să fie o desfășurabilă. *Apl.* a) Să se găsească condiția ca dreptele $x = \alpha z + 3\alpha^2$, $y = \alpha^2 z + 4\lambda$ să admită o înfășurătoare. b) Se cere condiția ca înfășurătoarea dreptelor $x/aAt^a - y/bBt^b = 1/a - 1/b, x/aAt^a - z/cCt^c = 1/a - 1/c$ să fie o curbă Țițeica. c) Să se cerceteze dacă generatoarele cuadricelor admit înfășurătoare. d) Să se determine care dintre muchiile triedrului S—F asociate unei curbe strîmbe (care nu e o dreaptă) constituie o desfășurabilă. e) Să se arate că dreptele polare ale unei curbe C e o desfășurabilă, numită *desfășurabila polară a lui C*.

R. a) După (82'') : $\bar{r}_\alpha = \bar{r}_0' + t\bar{a}'$ și $\bar{r}_t = \bar{a}$ sînt coliniari, adică $\bar{r}_t + \lambda \bar{r}_\alpha = 0$; deci $\bar{r}_0'$, $\bar{a}$ și $\bar{a}'$ sînt coplanari. Rezultă

(83') $$\text{a) } (\bar{r}_0'\, \bar{a}\, \bar{a}') = 0; \text{ b) } a'q' - b'p' = 0.$$

Obs. Denumirea provine de la faptul că o familie de drepte (în spațiu) cu un parametru generează o *suprafață riglată* S (v., de ex., [38], p. 305); condiția (83') exprimă că S e o *suprafață desfășurabilă*, înfășurătoarea Γ fiind curba de întoarcere a lui S. Să determinăm înfășurătoarea Γ; există o funcție $t(\alpha)$, soluție a condiției (82'') : $\bar{r}_0' \times \bar{a} + t(\bar{a}' \times \bar{a}) = 0$. Dacă $\bar{r}_0' = 0$, deci $\bar{r}_0 = \overline{O\Omega_0}$ — vector constant, obținem $t = 0$; rezultă $\Gamma \equiv \Omega_0$(Γ se reduce la un punct fix Ω_0), dreptele familiei generînd un *con* de vîrf Ω_0. Dacă $\bar{a}' = 0$ (sau $\bar{a}' \times \bar{a} = 0$), deci $\bar{a}$ — vector constant, obținem $t = \infty$; rezultă $\Gamma = \Omega_\infty$(Γ se reduce la punctul Ω_∞ de la infinit în direcția dată $\bar{a}$), dreptele familiei generînd un *cilindru* cu generatoarele paralele cu $\bar{a}$. Dacă $\bar{a} = \lambda \bar{r}_0'$, deci $\bar{a}$ e vectorul tangentă la o curbă strîmbă $C_0 : \bar{r} = \bar{r}_0(\alpha)$, rezultă $t = 0$; atunci $\Gamma \equiv C_0$, *suprafața desfășurabilă S fiind generată de tangentele la o curbă strîmbă* C_0 (fig. 57). Dacă vectorii coliniari $\bar{r}_0' \times \bar{a}$ și $\bar{a}' \times \bar{a}$ sînt nenuli, atunci $t = -(\bar{r}_0' \times \bar{a})(\bar{a}' \times \bar{a})/(\bar{a}' \times \bar{a})^2 = k$, iar $\Gamma : \bar{r} = \bar{r}_0 + k\bar{a}$; în acest caz, observăm că ecuația (83 a) se poate scrie $\bar{r} = \bar{r}_0 + k\bar{a} + (t - k)\,\bar{a}$ sau încă, ținînd seama că $\bar{a} = \lambda(\bar{r}_0 + k\bar{a})'$ și notînd $v = \lambda(t - k)$, sub forma că e constituită din tangentele lui $C_0 : \bar{r} = \bar{r}_0 + k\bar{a} + v(\bar{r}_0 + k\bar{a})'$. Dacă $\bar{r}_0 + k\bar{a}$ — vector constant, atunci $\Gamma = \Omega_0^*(\overline{O\Omega_0^*} = \bar{r}_0 + k\bar{a})$, cînd avem un con de vîrf Ω_0^*. *Apl.* a) Din (83'b) rezultă $\lambda = \alpha^3 + C$, din (82'') obținem $z + 6\alpha = 0$; deci $\Gamma : x = -z^2/12$, $y = z^3/108 + 4C$. b) Curba afină (54). c) O cuadrică nedegenerată (riglată real) fiind o suprafață dublă riglată, are generatoarele

(84) $$\bar{r} = \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_2 + t(\bar{a}_1 + \alpha \bar{a}_2) \text{ cu } \Delta = (\bar{r}_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2) \neq 0 \quad (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2 - \text{const.}).$$

Or $(\bar{r}_0'\, \bar{a}\, \bar{a}') = \Delta \neq 0$; deci : *generatoarele unei cuadrice nedegenerate (riglate real) nu admit înfășurătoare. Obs.* c$_1$) Dacă $\Delta = 0$, $\bar{r}_2$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sînt coplanari; există un vector constant $\bar{N}(A, B, C)$ astfel ca $\bar{N} \cdot \bar{r}_2 = 0$, $\bar{N} \cdot \bar{a}_1 = 0$, $\bar{N} \cdot \bar{a}_2 = 0$. Notînd $\bar{N} \cdot \bar{r}_1 = -D$, rezultă că dreptele (84) se găsesc în planul

$\bar{N}\cdot\bar{r} + D = 0$ (suprafața S e un plan). c_2) Hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic nu sînt suprafețe desfășurabile. d) Fie tangenta $\bar{R} = \bar{r}(s) + t\bar{l}(s)$. Condiția (83′) e îndeplinită. Condiția (82″) se scrie $\bar{R}_s \times \bar{R}_t = -t\bar{b}/\rho$, încît $t = 0$. Deci: *tangentele unei curbe strîmbe admit înfășurătoare, aceasta fiind curba însăși.* Pentru normalele principale $\bar{R} = \bar{r}(s) + t\bar{n}(s)$ avem $(\bar{r}'\ \bar{n}\ \bar{n}') = -1/\tau \neq 0$, iar pentru binormalele $\bar{R} = \bar{r}(s) + t\bar{b}(s)$ obținem $(\bar{r}'\ \bar{b}\ \bar{b}') = 1/\rho \neq 0$, încît: *normalele principale și binormalele unei curbe strîmbe nu admit înfășurătoare.* e) Pentru dreptele polare

(84′) $$d : \bar{R} = \bar{r} + \rho\bar{n} + t\bar{b},$$

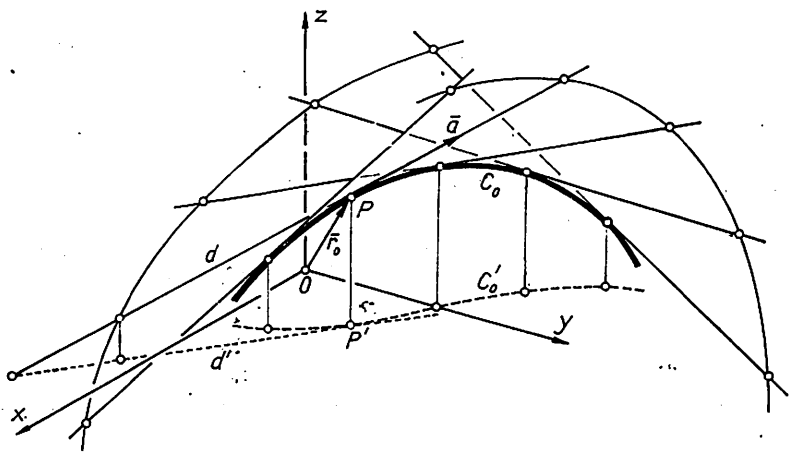


Fig. 57

condiția (83′) e îndeplinită. Condiția (82″) se scrie $\bar{R}_t \times \bar{R}_s = -(\rho' + t/\tau)\,\bar{l}$; deci

(84″) $$\Gamma : \bar{R} = \bar{r} + \rho\bar{n} - \rho'\tau\bar{b},$$

care e linia centrelor sferelor osculatoare (v. fig. 56).

155 Se numește *congruență de curbe* o familie de curbe în spațiu care depind de doi parametri, astfel că printr-un punct al spațiului (sau al unei regiuni Δ a spațiului) trece o singură curbă din familie. Să se determine cond. ca congruența de curbe să admită o înfășurătoare. *Apl.* a) Se cere relația dintre α și β astfel ca

$$C : x = (1 - 2\alpha t)/(\beta + t),\ y = (\alpha - \alpha^2 t/2)/(\beta + t),\ z = t/(\beta + t)$$

să admită o înfășurătoare. b) Să se cerceteze dacă congruența de curbe $F(x, y, z) = \alpha$, $G(x, y, z) = \beta$ admite o înfășurătoare. c) Să se studieze cazul unei congruențe de drepte.

R. Fie congruența de curbe (α, β — doi parametri)

(85) $$C_{\alpha\beta} : \bar{r} = \bar{r}(t, \alpha, \beta) \text{ sau } C_{\alpha\beta} : F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,\ G(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

$C_{\alpha\beta}$ admite o înfășurătoare dacă există o relație între α și β astfel încît condiția (82″) să fie satisfăcută; atunci, considerînd β funcție de α, vectorii $\bar{r}_\alpha + \bar{r}_\beta\beta'$ și $\bar{r}_t$ sînt coliniari, adică avem condiția

(85′) $$(\bar{r}_t\ \bar{r}_\alpha\ \bar{r}_\beta) = 0,$$

care determină pe t ca funcție de α și β: $t = t(\alpha, \beta)$. Eliminînd pe t din (82″), rezultă o ecuație diferențială de ordinul întîi în β:

(85″) $$(\bar{r}_t \times \bar{r}_\beta)\,\beta' + (\bar{r}_t \times \bar{r}_\alpha) = 0$$

cu soluția (pentru $\alpha = \alpha_0$ ia valoarea β_0 dată dinainte)

(85‴) $$\beta = \beta(\alpha, C),\ C \text{ — constantă de integrare.}$$

Pentru o valoare precizată a lui C, obținem o familie de curbe

$$C_\alpha : \bar{r} = \bar{r}\,(t, \alpha, \beta\,(\alpha, C)), \tag{86}$$

cu un singur parametru α, care admite o înfășurătoare Γ, tangentă lui C_α într-un punct caracteristic $P\,(\alpha, C)$ al lui C_α; din $t = t\,(\alpha, \beta\,(\alpha, C))$ scoțind $\alpha = \alpha\,(t, C)$, rezultă

$$\Gamma : \bar{r} = \bar{r}_1\,(t, C). \tag{86'}$$

Însă, din ecuația (85') în t, obținem una sau mai multe funcții $t\,(\alpha, \beta)$: deci pe fiecare curbă a familiei C_α există unul sau mai multe puncte caracteristice $F_i\,(\alpha, C)$, numite *focare* (sin.: *puncte focale*) ale lui C_α; cînd α variază (C avînd valoarea precizată), traiectoria f_i descrisă de un astfel de punct se numește *linie focală* a familiei C_α, focarul care coincide cu P generînd înfășurătoarea Γ a desfășurabilei C_α. Dar C poate lua diferite valori; deci putem să grupăm curbele unei congruențe, într-o infinitate de moduri, în familii de curbe cu un parametru, care admit înfășurătoare. Fiecare curbă a congruenței face parte (cel puțin) dintr-o astfel de familie; căci, pentru α și β dați, constanta C e determinată. *Obs.* Cînd C variază, focarele depind de 2 parametri: α și C. Deci (v., de ex., [40], p. 129), focarele generează o suprafață $\sum : \bar{r} = \bar{r}\,[t\,(\alpha, \beta\,(\alpha, C)), \alpha, \beta\,(\alpha, C)] = \bar{r}^*\,(\alpha, C)$, denumită *suprafața focală a congruenței* (formată din i pînze $\sum_i : \bar{r} = \bar{r}\,[t_i\,(\alpha, \beta), \alpha, \beta]$); suprafața $\sum$ e, de asemenea, și locul liniilor focale (linia focală f_i generînd pînza $\sum_i$). Fie (85_2); există o reprezentare parametrică (85) a congruenței, care satisface identic pe cea implicită și

$$\mathrm{F}_x x_t + \mathrm{F}_y y_t + \mathrm{F}_z z_t = 0,\ \ \mathrm{F}_x x_\alpha + \mathrm{F}_y y_\alpha + \mathrm{F}_z z_\alpha + \mathrm{F}_\alpha = 0,\ \ \mathrm{F}_x x_\beta + \mathrm{F}_y y_\beta + \mathrm{F}_z z_\beta + \mathrm{F}_\beta = 0. \tag{87}$$

$$\mathrm{G}_x x_t + \mathrm{G}_y y_t + \mathrm{G}_z z_t = 0,\ \ \mathrm{G}_x x_\alpha + \mathrm{G}_y y_\alpha + \mathrm{G}_z z_\alpha + \mathrm{G}_\alpha = 0,\ \ \mathrm{G}_x x_\beta + \mathrm{G}_y y_\beta + \mathrm{G}_z z_\beta + \mathrm{G}_\beta = 0;$$

Notînd $\nabla \mathrm{F} \times \nabla \mathrm{G} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, atunci $\Delta = (\nabla \mathrm{F}\ \nabla \mathrm{G}\ \nabla \mathrm{F} \times \nabla \mathrm{G}) = A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Din $(\bar{r}_t\ \bar{r}_\alpha\ \bar{r}_\beta)\,\Delta = 0$, cu (87), obținem $\bar{r}_t \,.\, (\nabla \mathrm{F} \times \nabla \mathrm{G})\,(\mathrm{F}_\alpha\,\mathrm{G}_\beta - \mathrm{F}_\beta\,\mathrm{G}_\alpha) = 0$; de unde condiția (care determină relația dintre α, β) pentru existența lui Γ:

$$\mathrm{D}\,(\mathrm{F}, \mathrm{G})/\mathrm{D}\,(\alpha, \beta) = \mathrm{F}_\alpha\,\mathrm{G}_\beta - \mathrm{F}_\beta\,\mathrm{G}_\alpha = 0. \tag{87'}$$

Eliminînd pe α și β între ecuațiile (85_2) și (87') obținem ecuația suprafeței focale Σ. Rezolvîndu-le în raport cu x, y, z, găsim focarele F_i. *Obs.* Dacă o curbă $C_{\alpha\beta}$ are un punct singular, coordonatele lui verifică ecuația (85'). *Apl.* a) (85') se scrie $1 + \alpha t = 0$; (82'') devine $\alpha\beta' - 2\beta = 0$ încît $\beta = C\alpha^2$. $C_\alpha : x = (1 - 2\alpha t)/(C\alpha^2 + t)$, $y = (\alpha - \alpha^2 t/2)/(C\alpha^2 + t)$, $z = t/(C\alpha^2 + t)$ și $\Gamma : x = 3t^2/(C + t^3)$, $y = -3t/2\,(C + t^3)$, $z = t^3/(C + t^3)$ (care e și singura linie focală, generînd conul focal $\Sigma : 6yz + x^2 = 0$). C_α sînt conice, situate în planele osculatoare $Ctx + 2Ct^2y - (C + t^3)\,z + t^3 = 0$ și tangente lui Γ. b) Condiția (87') nu e îndeplinită; congruența dată n-are înfășurătoare. c) Fie

$$\bar{R} = \bar{r}\,(\alpha, \beta) + t\,\bar{a}\,(\alpha, \beta). \tag{88}$$

Obs. c_1) O dreaptă d a congruenței trece prin punctul P cu $\overrightarrow{OP} = \bar{r}\,(\alpha, \beta)$ și are vectorul director $\bar{a}\,(\alpha, \beta)$, t fiind coordonata pe d. Punctul P descrie o suprafață $S : \bar{r} = \bar{r}\,(\alpha, \beta)$, numită *suprafața directoare* (sin.: *suprafața suport, deferentă*) a congruenței. c_2) Dacă α și β sînt legați printr-o relație $\Phi\,(\alpha, \beta) = 0$, obținem o *riglată a congruenței*; în acest caz, ecuația (88) reprezintă o suprafață riglată Π. Cînd riglata admite înfășurătoare, ea e o *desfășurabilă a congruenței*; atunci Π e o suprafață desfășurabilă. După (85'), extragem din (88) o desfășurabilă, dacă

$$(\bar{a}_\alpha\ \bar{a}_\beta\ \bar{a})\,t^2 + [(\bar{r}_\alpha\ \bar{a}_\beta\ \bar{a}) - (\bar{r}_\beta\ \bar{a}_\alpha\ \bar{a})]\,t + (\bar{r}_\alpha\ \bar{r}_\beta\ \bar{a}) = 0. \tag{88'}$$

Deci: pe fiecare dreaptă $d\,(\alpha, \beta) \in (88)$ sînt cîte 2 focare $F_i\,(t_i)$ cu t_i ($i = 1, 2$) rădăcinile ecuației (88'), care sînt reale distincte, confundate sau imaginare după cum realizantul ecuației este $\gtrless 0$; despre d spunem că e o *dreaptă hiperbolică, parabolică sau eliptică*. Atunci (v. probl. 154) există β funcție de α astfel ca $\bar{R}_\alpha = \bar{r}' + t\bar{a}'$ și $\bar{R}_\beta = \bar{a}$ să fie coliniari, adică să avem condiția (83'); derivînd funcțiile compuse $\bar{r}$ și $\bar{a}$, obținem

$$(\bar{r}_\beta\ \bar{a}_\beta\ \bar{a})\,\beta'^2 + [(\bar{r}_\alpha\ \bar{a}_\beta\ \bar{a}) + (\bar{r}_\beta\ \bar{a}_\alpha\ \bar{a})]\,\beta' + (\bar{r}_\alpha\ \bar{a}_\alpha\ \bar{a}) = 0, \tag{88''}$$

cu soluțiile $\beta_i\,(\alpha, C_i)$ care satisfac condiția inițială $\beta_i(\alpha_0, C_i) = \beta_0$. Acestor soluții corespunzîndu-le 2 desfășurabile S_i, iar valorilor α_0, β_0 o dreaptă d_0 a congruenței, rezultă: *orice dreaptă d a unei congruențe e dreaptă comună a 2 desfășurabile ale congruenței, desfășurabilele fiind de același gen.* Căci, ținînd seama de $(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{a})\,(\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{a}) = (\bar{u}\ \bar{p}\ \bar{a})\,(\bar{v}\ \bar{q}\ \bar{a}) - (\bar{u}\ \bar{q}\ \bar{a})\,(\bar{v}\ \bar{p}\ \bar{a})$, realizanții ecuațiilor (88') și (88'') coincid. Cînd dreapta d variază, generînd congruența, înfășurătoarele Γ_i (variabile cu d) generează 2 pînze $\Sigma_i : \bar{R} = \bar{r}\,(\alpha, \beta) + t_i\bar{a}\,(\alpha, \beta)$ ale suprafeței focale Σ a congruenței. Dacă impunem lui d să descrie pe S_1, ceea ce înseamnă că F_1 descrie pe Γ_1, Γ_2 (variabilă cu d) generează pînza Σ_2, iar F_2 descrie linia focală f_2 pe Σ_2. Deci (fig. 58): *desfășurabila S_i e circumscrisă pînzei Σ_j în lungul*

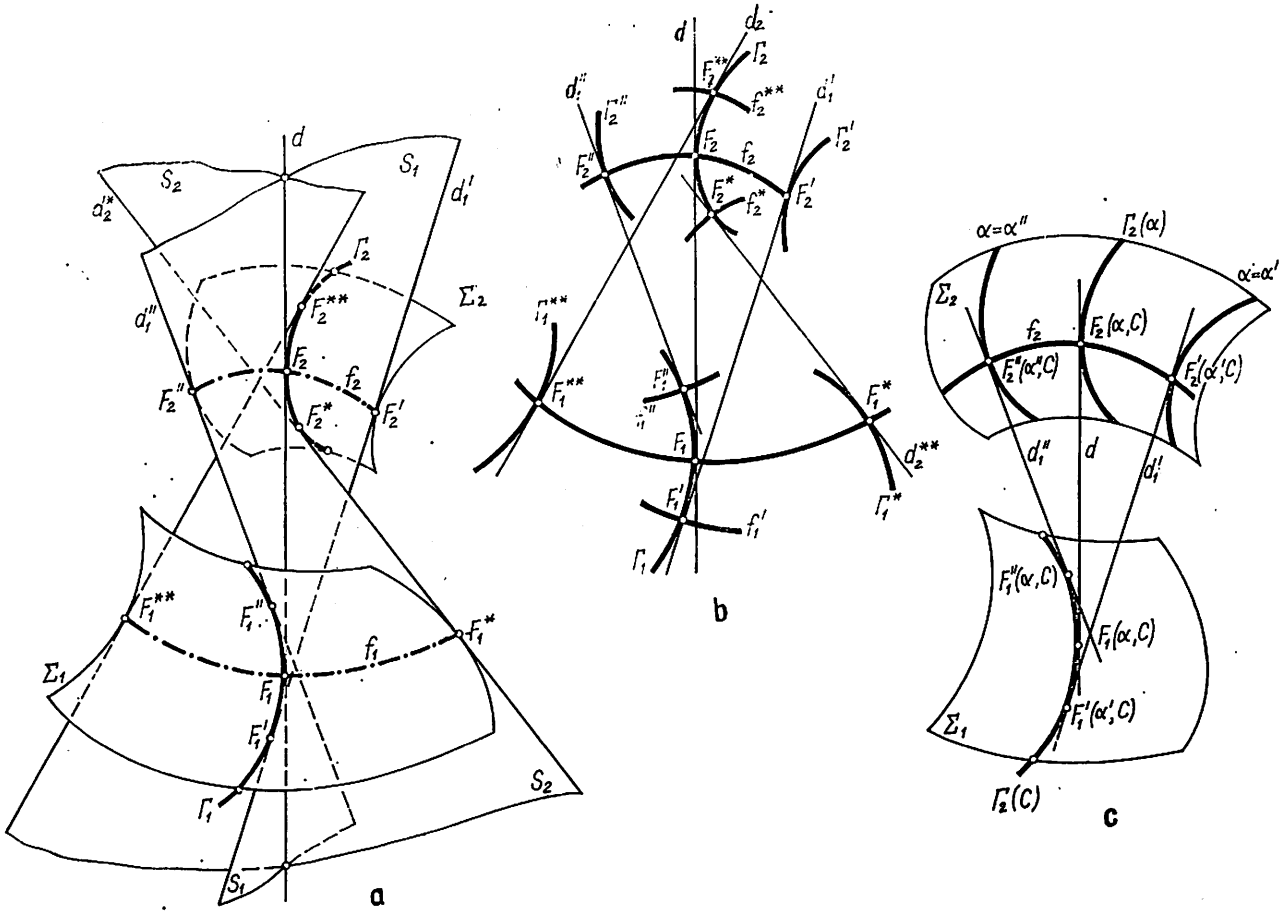

d
S2
S1
d2'*
d1'
Γ2
F2**
Σ2
d1''
F2
f2
F2''
F2*
F2'
F1**
F1''
f1
F1*
Σ1
F1
F1'
Γ1
S2
S1
a
d
d2
Γ2
F2**
d2''
Γ2''
f2**
d1'
Γ2'
F2''
F2
f2
F2*
f2*
F2'
Γ1**
F1**
F1''
F1*
F1
d2**
F1'
f1'
Γ1*
Γ1
b
α=α''
Γ2(α)
α=α'
Σ2
f2
F2(α,C)
F2''(α'',C)
F2'(α',C)
d1''
d
d1'
F1''(α,C)
F1(α,C)
F1'(α',C)
Σ1
Γ2(C)
c

Fig. 58

liniei focale f_j ($j \neq i$). Aplicînd raționamentul oricărei drepte și oricărei desfășurabile a congruenței, rezultă: *desfășurabilele unei congruențe de drepte sînt circumscrise suprafeței focale a congruenței*; altfel spus: pe Σ, tangentele la $\alpha = \text{const.}$, unde întîlnesc o curbă $C = \text{const.}$, formează o desfășurabilă S a cărei înfășurătoare Γ e curba $C = \text{const.}$ *Obs. d* e tangentă lui Σ_i în F_i, deci: *dreptele unei congruențe sînt tangentele comune a* 2 *suprafețe* Σ_1 *și* Σ_2, *pînzele suprafeței focale* Σ *a congruenței*. Dacă Σ_1 se reduce la o curbă C_1, cum d trebuie să taie pe C_1 și să fie tangentă lui Σ_2, S_1 e un con cu vîrful pe C_1 și circumscris lui Σ_2. Dacă Σ_i se reduce la curba C_i ($i = 1, 2$), desfășurabilele congruenței se vor reduce la 2 familii de conuri cu vîrfurile pe una din curbe și avînd ca directoare ocalaltă curbă; în particular, dacă C_i sînt drepte, cele 2 familii de desfășurabile se reduc la 2 familii de plane și *congruența* se numește *liniară*.

156 Se numește *evolută* (sin.: *desfășurată*) a unei curbe în spațiu înfășurătoarea unei desfășurabile a congruenței normalelor curbei (înfășurătoarea unei familii de normale ale curbei care depind de un parametru). Să se arate: a) O curbă în spațiu C admite o familie de evolute depinzînd de un parametru, situate pe suprafața polară asociată lui C. b) Normalele tangente unei evolute a lui C se obțin rotind în jurul tangentelor curbei, de același unghi, normalele tangente altei evolute. c) Dacă din congruența normalelor se poate extrage o desfășurabilă a cărei evolută e redusă la un punct, C e o curbă sferică. d) Dacă din congruența normalelor se poate extrage o desfășurabilă cu generatoarele paralele, C e o curbă plană.

R. a) Normalele lui C formează o congruență de drepte

$$\bar{R} = \bar{r}(s) + t\,[\bar{n}(s) + \lambda\,\bar{b}(s)],\ \lambda = \operatorname{tg}\theta, \tag{89}$$

depinzînd de arcul s al curbei și unghiul θ pe care normala îl face cu normala principală (în $P(s)$ la C). Cu formulele $S-F$, ecuația (85′) se scrie $t\,(t-\rho) = 0$: *normalele lui C sînt drepte hiperbolice, focarele unei normale* (89) *fiind* $F_1(t=\rho)$ *de pe axa polară și* $F_2\,(t=0) \equiv P(s)$ *de pe curba însăși*; deci: *pînzele focale* Σ_1 *și* Σ_2 *ale congruenței* (89) *sînt date de suprafața polară* Σ_1 *a curbei și curba însăși* $\Sigma_2 \equiv C$. Obținem desfășurabilele congruenței normalelor lui C sînt grupate în 2 familii, desfășurabila S_2 a uneia din familii fiind fasciculul de drepte cu centrul în $F_2 \equiv P \in C$ și cu directoarea axa polară a lui C relativă la P (care e și linia focală f_1 a desfășurabilei) și a cărei înfășurătoare Γ_2 e redusă la P. Să găsim înfășurătoarea unei desfășurabile S_1 din celalaltă familie. Cum $t = \rho$, (85″) devine $\lambda' - (1+\lambda^2)/\tau = 0$, adică $\operatorname{arc\,tg}\lambda = \int_0^s \frac{ds}{\tau} + k$ (k — constanta de integrare). Rezultă: *o curbă în spațiu admite o familie de evolute care depind de un parametru k, avînd ecuațiile* (89) *cu*

$$t = \rho,\ \lambda = \operatorname{tg}\theta,\ \theta = \int_0^s \frac{ds}{\tau} + k. \tag{89′}$$

Obs. a_1) Integrala $\int_0^s \frac{ds}{\tau}$ se numește *torsiunea integrală* corespunzătoare intervalului $[0, s]$. a_2) Obținem (89′) și astfel: Dacă F_1 e punctul caracteristic al evolutei și $t = PF_1$, atunci $F_1(0, t\cos\theta, t\sin\theta)$; deci normala PF_1: $\bar{R} = \bar{r} + t\cos\theta\,\bar{n} + t\sin\theta\,\bar{b}$, iar $\overline{PF_1} \parallel d\bar{R}/ds$. *Evolutele lui C se găsesc pe suprafața polară a lui C*; căci înfășurătoarea Γ_1 a lui S_1 se află pe Σ_1. Sau: $PF_1 = |\bar{R} - \bar{r}| = t\sqrt{1+\lambda^2} = \rho/\cos\theta = P\Omega/\cos\theta$; deci tr. $P\Omega F_1$ e dreptunghic în Ω, adică F_1 e pe axa polară, încît Γ_1 (la care rămîne tangentă PF_1, cînd P descrie pe C) e situată pe suprafața polară. Pentru $P(s) \in C$ dat, punctele evolutelor se găsesc pe axa polară a lui C relativă la P, S_2 fiind fasciculul normalelor în P la C (fig. 59). Deci o evolută Γ_1 (k dat) e traiectoria focarului $F_1(k)$ de pe axa polară a lui C relativă la P, cînd P descrie pe C; în mișcarea lui P pe C, F_1 se deplasează odată cu S_2, care se rotește în jurul lui P (odată cu planul normal, de care e rigid legat) cu o viteză egală cu torsiunea curbei (v. probl. 123). Rezultă: α) *Nici una din evolutele unei curbe strîmbe nu coincide cu locul centrelor de curbură* Ω_c *ale curbei.* De altfel, pentru $P(s) \in C$ dat, fie $k=0$, deci $F_1(k=0) = \Omega_c$; cînd P descrie pe C, conform cu (89′), avem $\theta = \int_0^s ds/\tau \neq 0$, încît $F_1(s)$ nu mai coincide cu nici un centru de curbură. β) *O evolută a unei curbe strîmbe e locul centrelor sferelor osculatoare*; căci, pentru $P(s) \in C$ dat, putem lua k astfel ca $F_1(k) = \Omega_s$. γ) *Pentru ca o evolută a unei curbe în spațiu să fie locul centrelor de curbură e necesar și suficient ca acea curbă să*

fie plană. 8) *Familia de normale care fac unghiuri egale cu normala principală admite înfășurătoare dacă, și numai dacă, curba e plană*; atunci *înfășurătoarea normalelor (principale) ale lui C este evoluta curbei plane C.* Alte evolute se obțin considerînd familii de normale nesituate în planul curbei *C*, care fac același unghi cu normalele (principale) ale lui *C*; ele sînt *elice. Obs.* Evoluta unei curbe *C* (în plan; în spațiu) e curba Γ ale cărei tangente sînt normalele lui *C*. Celelalte proprietăți caracteristice ale unei evolute în plan (locul centrelor de curbură ale lui *C* etc.) nu se extind la evolutele

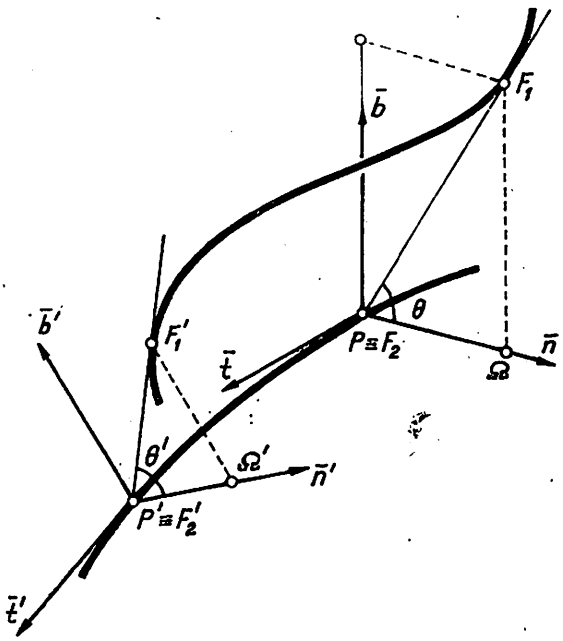


Fig. 59

în spațiu. b) Fie θ' și θ'' corespunzătoare lui k' și k'' (și aceleași valori ale limitei superioare a integralei); deducem $\theta' - \theta'' = k' - k''$. Reciproca e adevărată. c) Fie $\Gamma_1 \equiv F_1$; deci $\overline{OF_1} = \bar{R}$ și $\bar{R}' = 0$, încît obținem $\tau\rho' + \rho\lambda = 0$, $\lambda\tau\rho' - \rho + \rho\tau\lambda' = 0$, adică $\rho + \tau(\tau\rho')' = 0$. Deci (v. probl. 148), curba e sferică. *Obs.* Evident, dacă o curbă sferică e diferită de un cerc, congruența normalelor conține o singură familie de normale a cărei evolută degenerează într-un punct. d) Fie a vectorul director (constant) al acelor normale și $r = r(s)$ ecuația lui C; $r' \cdot \bar{a} = 0$, adică $\bar{r} \cdot \bar{a} + d = 0$ (d — constantă de integrare). Deci C e plană. *Obs.* Dacă C e plană, există o familie de normale ale lui C perpendiculare pe planul curbei, deci paralele. Atunci, evoluta acestei desfășurabile se reduce la punctul impropriu al direcției perpendiculare pe plan.

12. PROBLEME DIVERSE

157 Să se stabilească între curbele $C: x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = b\theta$ și $\Gamma: x = t^2 - t + a$, $y = t^2 - 3t + 2$, $z = (t-1)/t$ o bijecție (folosind plane paralele cu Oxy).

158 Să se arate că ecuațiile: a) $x = a_1t^n + b_1t^p + c_1$, $y = a_2t^n + b_2t^p + c_2$, $z = a_3t^n + b_3t^p + c_3$ reprezintă o curbă plană; b) $x = a\sin\theta\cos\theta$, $y = a\sin^2\theta$, $z = a\cos\theta$ reprezintă o curbă sferică; c) $x = (3t-2)/2(t-1)$, $y = (23t+2)/2(t+1)$, $z = (2t^2 + 9t - 2)/2(t^2 - 1)$ sînt ale unei conice

care intersectează cuadrica $z^2 = xy$; d) $x = t^2 + 1$, $y = (t^2 - t + 1)/(t^2 + 1)$, $z = t^2 - t + 1$ reprezintă o conică ce se află pe cuadrica $z = xy$.

159 Să se determine centrul, asimptotele, vîrfurile și focarele conicei: a) $x = 1/(t^2 + t + 1)$, $y = (t - 1)/(t^2 + t + 1)$, $z = t^2/(t^2 + t + 1)$; b) $x = t/(1 + t)^2$, $y = t^2/(1 + t)^2$, $z = (1 + t^2)/(1 + t)^2$; c) $x = (1 + t)/(1 - t)$, $y = 1/(1 - t^2)$, $z = t/(1 + t)$.

160 Să se găsească proiecțiile pe planele de coordonate ale curbei: a) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = 2t$; b) $x = at \cos t$, $y = at \sin t$, $z = a^2t^2/2p$; c) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $z = ct$; d) $z = x^2 - y^2$, $x + y - z - 1 = 0$; e) $y = ax^2, z = bx^3$.

161 Fie curba $x = t^3/3$, $y = t^2/2$, $z = t^4/4$. Să se afle: a) punctele ei singulare; b) punctele de pe curbă în care tangenta e paralelă cu planul $3x + 2y + z - 1 = 0$.

162 Se dă curba $x = t^2$, $y = -\ln t$, $z = f(t)$. Se cere: a) Să se determine $f(t)$ astfel încît curba să fie plană. b) Cu $f(t) = \arcsin t$, să se scrie ecuațiile planelor triedrului $S-F$ în punctul $P(t = 1)$.

163 Proiecția unei elice circulare pe un plan perpendicular pe axa cilindrului dintr-un punct al ei e o cohleoidă.

164 Fiind dată curba: a) $x = a \cos t$, $y = -a \sin t$, $z = be^t$; b) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, să se afle locul intersecției tangentelor curbei cu planul Oxy și locul centrelor de curbură ale curbei.

165 Fie cubica $C: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$. Tangenta în $P \in C$ intersectează planul Oxy în A și planul Oxz în B. Se cere: a) Să se arate că raportul $\overline{PA}/\overline{PB}$ e constant și să se găsească locurile lui A și B cînd P descrie pe C. b) Să se calculeze lungimea arcului OP al curbei. c) Din P se duce perpendiculara PM pe Oxy și se ia pe PM, în sensul de la P la M, lungimea PQ egală cu arcul OP; să se găsească locul lui Q. d) Să se arate că una din bisectoarele dintre tangenta și binormala la C are o direcție fixă.

166 Să se determine punctele de pe curba $x = t + \ln t$, $y = t^2$, $z = 1 - t$ în care: a) planele normale sînt paralele cu Ox; b) normala taie axa Oz.

167 Să se determine punctele de pe curba $x^2 - y^2 = z$, $2x = 3y^2$ ale căror binormale să fie paralele cu planul Oyz.

168 Să se găsească versorii fundamentali ai triedrului $S-F$, curbura și torsiunea curbei: a) $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ în punctul $t = 2$; b) $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$; c) $x = 2abt$, $y = a^2t^2$, $z = b^2 \sin t$; d) $\bar{r} = t(\sin t\, \bar{i} + \cos t\, \bar{j} + e^t \bar{k})$; e) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$; f) $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$; g) $y^3 = x$, $x^3 = z$; h) $y = x^2$, $3z = 2x^3$.

169 Fie curba lui Viviani. Se cere: a) Proiecțiile curbei pe planele de coordonate. b) Să se arate că tangenta în $P(a/2, a/2, a/\sqrt{2})$ e perpendiculară pe Oz. c) Să se afle ecuațiile tangentei în punctul ei dublu.

170 Să se arate că spirala $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = kt$ e o loxodromă a conului pe care se află.

171 Să se afle, în origine, ecuaţiile axei polare, centrul şi raza de curbură, centrul şi raza sferei osculatoare ale curbei : a) $x = t^3/3 + t^2 - t$, $y = -t^3/3 + t^2 + t$, $z = t^3/3 + t$; b) $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t^3/6$.

172 Două arce de curbă strîmbă care au într-un punct comun un contact de ordinul 3 au în acel punct aceeaşi sferă osculatoare.

173 Fie curba strîmbă $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$. Se cere : a) Să se afle punctele singulare ale curbei. b) Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei cu ajutorul formulelor $S-F$. c) Să se scrie, în $P_0(\pi/2)$, ecuaţiile (vectorială, carteziană) ale muchiilor şi feţelor triedrului $S-F$.

174 Fie curba $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$, $z = e^{at} - 1$. Se cere : a) curba dată ca intersecţie de suprafeţe ; b) tangenta pentru $t = \pi/4$; c) planul normal pentru $t = \pi/3$; d) planul osculator pentru $t = -\pi/4$; e) planul rectificant pentru $t = -\pi/3$; f) versorii fundamentali în $t = \pi/4$; g) curbura şi torsiunea în $t = -\pi/4$; h) locul centrelor de curbură ; i) formulele $S-F$ pentru $t = \pi/6$.

175 Fiind dată indicatoarea sferică (a tangentelor) C_1 a unei curbe C, se cere : a) Să se găsească arcul σ al curbei C_1 în funcţie de arcul curbei C. b) Să se calculeze versorii fundamentali ai triedrului $S-F$ al curbei C_1. c) Ce se poate spune despre planul osculator al lui C_1? d) Să se exprime curbura şi torsiunea lui C_1 cu ajutorul curburii şi torsiunii lui C.

Aceeaşi problemă pentru indicatoarea sferică a binormalelor.

176 Să se cerceteze dacă riglata : a) $x = 2\alpha + t + 1$, $y = 3\alpha^2 + 2t\alpha$, $z = -t/\alpha^2$; b) $x = a(\alpha + t)$, $y = b(\alpha - t)$, $z = 2\alpha t$; c) $x = 1 + \alpha t$, $y = \alpha + \alpha^2 t$, $z = \alpha^2 + \alpha^3 t$ e desfăşurabilă ; în caz afirmativ, să se afle înfăşurătoarea familiei.

177 Dacă riglata $x = a + bt$, $y = a' + b't$, $z = a'' + b''t$ e desfăşurabilă, să se afle coordonatele punctului curent al înfăşurătoarei.

178 Să se determine ecuaţiile tangentei la curba $x^3 = a^2 y$, $6xz = a^2$ în punctele în care curba taie planele $6z = a$ şi $3z = a$. De asemenea, să se determine lungimea arcului curbei cuprins între aceste plane.

179 Să se arate că, prin transformări carteziene ortogonale, se poate face ca polinoamele P_i $(i = 1, 2, 3)$ din ecuaţiile cubice strîmbe (20) să aibă gradele 0, 1, 2, iar P_4 să nu aibă termen în t^2. Se cere : a) Să se găsească curbura şi torsiunea cubicei. b) Să se determine cubicele de torsiune constantă. c) Să se afle locul intersecţiei tangentelor la curbă cu un plan osculator fixat.

180 Fie P un punct al curbei C, iar Ω centrul de curbură în P la C. Prin origine se duce o paralelă la dreapta polară a lui C relativă la P şi pe această paralelă se ia un punct P_1 depărtat de origine cu distanţa ρ în sensul pozitiv al binormalei. Să se arate : a) Pe curbele C_1 şi Γ, descrise respectiv de P_1 şi Ω, elementul de arc e acelaşi. b) Tangenta lui C_1 e perpendiculară pe tangenta lui Γ.

181 Să se găsească liniile de curent ale cîmpului vectorial $\bar{v} = yz\,\bar{i} + (xz - z)\,\bar{j} + (xy - y)\,\bar{k}$ şi să se studieze aceste curbe.

182 Se consideră un cerc Γ cu centrul în O şi de rază unitatea. Fie $\bar{R} = \overline{OP}$ cu $P \in \Gamma$, $\bar{T}$ versorul tangentei în P la Γ şi σ arcul descris de

P începînd dintr-un punct fix $P_0 \in \Gamma$, iar $\bar{a}$ e un versor perpendicular pe planul cercului. Se consideră curba descrisă de vîrful vectorului: $\alpha)$ $\bar{r} = \bar{R}\cos\sigma + \bar{a}\sigma$; $\beta)$ $\bar{r} = \bar{R}\cos\sigma + \bar{T}\sin\sigma + 2\bar{a}\sigma$; $\gamma)$ $\bar{r} = \bar{R}e^{\sigma} + \bar{T}e^{\sigma} + \bar{a}\,\mathrm{ch}\,\sigma$. Se cere: a) Să se calculeze elementul de arc. b) Să se arate că muchiile triedrului $S-F$ la curbă fac unghiuri constante cu versorii triedrului mobil $\bar{R}, \bar{T}, \bar{a}$. c) Raportul dintre curbura și torsiunea curbei. În cazul γ): Dacă s e arcul curbei avînd originea în punctul corespunzător lui $\sigma = 0$, să se arate că distanțele de la origine la planele osculator și normal sînt proporționale cu s, iar cea la planul rectificant e proporțională cu curbura și torsiunea curbei; pentru $\sigma = 0$, tangenta și binormala întîlnesc perpendiculara dusă din O pe planul $(\bar{R}, \bar{T})$.

183 Să se găsească ecuația (55) pe care o satisface curba: a) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; b) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^{-3}$ și să i se găsească invarianții centro-afini și forma redusă. Concluzie.

184 Dacă α, β, γ sînt 3 funcții de t astfel încît $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, iar $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2 + \mathrm{d}\gamma^2$, să se arate că toate curbele care au: a) curbura constantă $1/a$ sînt date de formula $x = a\int\alpha\mathrm{d}\sigma$, $y = a\int\beta\mathrm{d}\sigma$, $z = a\int\gamma\mathrm{d}\sigma$; b) torsiunea constantă $1/b$ sînt date de formula $x = b\int(\beta\mathrm{d}\gamma - \gamma\mathrm{d}\beta)$, $y = \int(\gamma\mathrm{d}\alpha - \alpha\mathrm{d}\gamma)$, $z = b\int(\alpha\mathrm{d}\beta - \beta\mathrm{d}\alpha)$.

185 Să se găsească punctul de pe curba $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = at$ al cărui plan normal conține originea. În acest punct, să se afle versorii fundamentali, curbura, torsiunea, cercul și sfera osculatoare.

186 Fie un cerc strîmb C. Dacă pe tangenta în $P \in C$ se ia segmentul $PP_1 = l$ (const.), curba C_1 descrisă de P_1 are curbura dată de relația $1/\rho_1^2 = \rho^2[1 + l^2(1/\rho^2 + 1/\tau^2)]/(\rho^2 + l^2)^2$.

187 Să se determine punctele singulare ale curbei: a) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos\frac{t}{2}$; b) $x = \cos t\cos^2\frac{t}{2}$, $y = \sin t\cos^2\frac{t}{2}$, $z = \sin\frac{t}{2}$.

188 Se consideră congruența de drepte $x = pz + a$, $y = qz + b$. Să se determine: a) condiția care dă desfășurabilele congruenței; b) focarele; c) planele focale.

189 Dacă normala principală a unei curbe face un unghi constant cu o direcție fixă, indicatoarea sferică a tangentelor acestei curbe e elice și reciproc.

190 Dacă considerăm *curbe strîmbe de gradul n* situate pe o cuadrică Q (nedegenerată), ele se proiectează dintr-un punct $O \in Q$ pe un plan π (care nu conține pe O) după curbe plane de grad n, care trec de r ori prin A și de s ori prin B, astfel ca $r + s = n$, A și B fiind puncte ce corespund la generatoarele a și b (ale cuadricei) care trec prin O. Să se arate: a) Curbele strîmbe de grad n se împart în $n - 1$ clase

$$C_n(A^{n-1}B),\ C_n(A^{n-2}B^2),\ldots,\ C_n(AB^{n-1}),$$

după cum în imaginile lor punctul A e multiplu de ordin r, iar punctul B e multiplu de ordin s. b) Intersecţia completă a cuadricei Q cu o suprafaţă F_n de grad n e o curbă aparţinînd familiei $C_{2n}(A^nB^n)$; diferitele cazuri, după cum Q şi F_n au în comun o generatoare sau două (din aceeaşi familie). Să se studieze cazul $n = 3$ (*cubice strîmbe*) şi $n = 4$ (*cuartice strîmbe*), determinîndu-se căror clase le corespund curbe raţionale; de aici, să se arate că *cuarticele strîmbe* sînt de *prima speţă* (intersecţia a 2 cuadrice) sau *de a doua speţă* (intersecţia parţială a unei cuadrice cu o suprafaţă cubică ce conţine 2 generatoare dintr-o aceeaşi familie a cuadricei).

191 O dreaptă d paralelă cu Oz se mişcă cu o viteză unghiulară constantă, urma sa pe planul Oxy fiind o curbă oarecare. Un punct P o parcurge uniform. Ce curbă descrie punctul P?

192 Se consideră o congruenţă de curbe strîmbe, curba care dă naştere familiei putînd fi determinată prin m condiţii. Se cere: a) Să se determine numărul punctelor focale ale congruenţei. b) Să se verifice rezultatul pe cazul unei congruenţe de cercuri. *Apl.*: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha y - 2\beta z = 0$, $x + \alpha y + \beta z + \alpha\beta = 0$.

193 Curba asociată unei familii de curbe în spaţiu, după o anumită lege (prin care fiecărui element al familiei îi corespunde un punct al acestei curbe) se numeşte *traiectorie* (sin.: *curbă transversală*) a familiei date. Considerînd o familie de curbe $C_\alpha : \bar{r} = \bar{r}(t, \alpha)$ cu un parametru α şi legea de asociere $t = t(\alpha)$, prin care fiecărei curbe C_α i se asociază un punct P, să se arate: a) Traiectoria familiei date e curba $\Gamma = \{P\} : \bar{r} = \bar{r}(t(\alpha), \alpha)$. b) Dacă Γ intersectează pe C_α sub un acelaşi unghi constant θ, se spune că Γ e o *traiectorie izogonală* a familiei; în particular, funcţia $t(\alpha)$ verifică relaţia: $b_1)$ $\bar{r}_t^2 t' + \bar{r}_t \cdot \bar{r}_\alpha = 0$, cînd $\theta = \pi/2$, Γ fiind o *traiectorie ortogonală* a familiei (această ecuaţie diferenţială admiţînd soluţia generală $t = t(\alpha, C)$, în general, o familie de curbe C_α admite o familie de traiectorii ortogonale depinzînd de un parametru); $b_2)$ $\bar{r}_t \times \bar{r}_\alpha = 0$, cînd $\theta = 0$, Γ fiind *înfăşurătoarea* familiei. c) Dacă, într-un plan raportat la un reper cartezian ortogonal, familia C_α e definită prin ecuaţia diferenţială $F(x, y, y') = 0$, traiectoriile ei ortogonale sînt curbele integrale ale ecuaţiei diferenţiale $F(x, y, -1/y') = 0$.

194 O *curbă tetraedrală simetrică* e curba în spaţiu C de ecuaţii

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n + \left(\frac{x_4}{a_4}\right)^m = 0, \quad \left(\frac{x_1}{b_1}\right)^m + \left(\frac{x_3}{b_3}\right)^m + \left(\frac{x_4}{b_4}\right)^n = 0,$$

unde m e un număr raţional, numit *exponentul* curbei, iar a_i şi b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt numere reale sau complexe; tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ al reperului proiectiv se numeşte *tetraedrul fundamental* al lui C. Să se arate: a) C e o curbă algebrică, fiind de gradul p^2q sau $3p^2q$ cînd $m = p/q$ şi $(p, q) = 1$, după cum $m \gtrless 0$. b) C fiind intersecţia a 2 *conuri triunghiulare simetrice* (avînd vîrful în unul din vîrfurile tetraedrului fundamental, iar directoarea fiind o curbă triunghiulară simetrică în planul feţei opuse), fiecare generatoare a uneia din conuri taie pe C în p puncte diferite de vîrf; dacă $m > 0$, curba conţine şi vîrful. c) Curba $\Gamma : \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^m = 0$, $\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i}{b_i}\right)^m = 0$ e formată din q^3 curbe tetraedrale simetrice şi prin fiecare din ele trec 4 conuri triunghiulare simetrice.

195 Dacă o curbă în spaţiu are un contact de ordin 4 (cel puţin) cu sfera osculatoare în punctul curent, curba e sferică.

196 Orice dreaptă a spaţiului R^3 depinde de 4 parametri; una, două sau trei relaţii între parametri definesc o familie de drepte care depind de 3, 2 sau 1 parametru, numită respectiv *complex*, *congruenţă* sau *riglată de drepte*. Fiind dat un *complex de drepte*, printr-un punct $P_0 \in R^3$ trec o infinitate de drepte ale complexului, generînd *conul complexului* corespunzător lui P_0, iar într-un plan π există o infinitate de drepte ale complexului, înfăşurînd *curba complexului* relativă la π; să se arate: a) În coordonate plückeriene p_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, un complex de drepte e definit printr-o ecuaţie omogenă

$$f(p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) = 0;$$

dacă f e un polinom (omogen) de gradul q, se zice că *complexul* e *de* grad q. b) Conul complexului corespunzător lui P_0 e

$$f(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0,\ zy_0 - yz_0,\ xz_0 - zx_0,\ yx_0 - xy_0) = 0,$$

gradul conului fiind egal cu cel al complexului; dacă *complexul* e *liniar*, conul se reduce la un plan (dreptele unui complex liniar care trec prin P_0 sînt situate într-un plan trecînd prin P_0). c) Curba complexului relativă la $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ e dată de ecuaţia tangenţială

$$f(BC'-CB',\ CA'-AC',\ AB'-BA',\ DA'-AD',\ DB'-BD',\ DC'-CD') = 0,$$

care exprimă că planul $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ e tangent curbei complexului, clasa acestei curbe fiind egală cu gradul complexului; dacă complexul e liniar, π' trece printr-un punct fix (dreptele unui complex liniar situate într-un plan π trec printr-un acelaşi punct).

Fiind dat un *complex liniar de drepte*, a cărei ecuaţie se poate scrie

$$ap_{12} + bp_{34} + cp_{13} + dp_{42} + ep_{14} + fp_{23} = 0 \quad (a, b, \ldots, f \text{ —constante}),$$

se cere: d) Dacă $a, b, \ldots, f$ sînt repectiv egale cu coordonatele $p'_{34}, p'_{12}, p'_{42}, p'_{13}, p'_{23}, p'_{14}$ ale unei drepte d', atunci ecuaţia complexului reprezintă condiţia de intersecţie între dreptele $d(p_{ij})$ şi dreapta fixă $p'(p'_{ij})$; în acest caz, se zice că avem un *complex special* de axă d' (compus din drepte care întîlnesc pe d'). e) Dacă complexul nu e special, ecuaţia lui se poate reduce la forma canonică

$$p_{12} + k\,p_{34} = 0 \quad (k \text{ — } \textit{constanta complexului}).$$

f) Un complex e determinat cînd cunoaştem 5 drepte ale complexului; 5 tangente ale unei curbe strîmbe determină un complex liniar, iar cînd aceste tangente se confundă cu tangenta curbei într-un punct P, obţinem un *complex liniar osculator curbei*. g) Dacă tangentele unei curbe aparţin unui complex nespecial, coordonatele punctului curent al curbei satisface ecuaţia

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + k\mathrm{d}z = 0 \quad (k \text{ — constanta complexului});$$

cînd x, y sînt funcţii raţionale de un parametru t, atunci şi z e o funcţie raţională; dacă x, y sînt funcţii liniare de t^m, t^n, t^r, unde m, n, r sînt numere întregi, să se determine cazurile în care z are aceeaşi formă. h) Să se găsească relaţia care există între curbura şi torsiunea unei curbe ce aparţine unui complex liniar.

Capitolul III

SUPRAFEŢE

1. REPREZENTĂRI ANALITICE ALE UNEI SUPRAFEŢE

1 Să se determine ecuaţia carteziană a suprafeţei : a) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$; b) $x = u^2$, $y = uv$, $z = au + v^2$; c) $x = (1+u^2)/u$, $y = (1 + v^2)/v$, $z = (u^2 + v^2)/uv$.

2 Să se arate că o dreaptă intersectează o suprafaţă algebrică de grad n în n puncte (reale sau complexe, distincte sau confundate). *Apl.* $S : (x - y)^3 - 2x(x - y)^2 + 8z^2$, $d : (2x - 5)/5 = 2y - 5 = (2z - 1)/3$.

R. Fie dreapta dată prin ecuaţiile reduse

$$d : x = pz + a,\ y = qz + b. \tag{1}$$

O suprafaţă algebrică de grad n are ecuaţia de forma

$$S : \sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu=0 \\ 0\leqslant\lambda+\mu+\nu\leqslant n}}^{n} a_{\lambda\mu\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu = 0 \quad (a_{\lambda\mu\nu} - \text{constante}).$$

Prin eliminarea lui x şi y între ecuaţiile lui d şi S obţinem că z satisface o ecuaţie algebrică de grad n; dacă 2 din rădăcinile ecuaţiei în z sînt confundate, d e o tangentă la S. *Apl.* $P_1(0, 2, -1)$, $P_2(5, 3, 2)$ şi $P_3(25/12, 29/12, 1/4)$. Cu $x - y = 2v$, $z = uv$, găsim $S : x = u^2 + v$, $y = u^2 - v$, $z = uv$ (S e riglată).

3 Să se cerceteze dacă pînzele date de reprezentările : a) $p : x = u$, $y = v$, $z = u^3 - 3uv$ şi $p' : x = u' + v'$, $y = u'v'$, $z = u'^3 + v'^3$; b) $p : x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = 2uv$ şi $p' : x = a(v' - u'^2 + 1/u')$, $y = b(v' - u'^2 - 1/u')$, $z = 2(v' - u')/u'$ sînt echivalente.

R. Fie $p = (\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}) : \Delta \to R^3$ şi $p' = (\mathrm{f}', \mathrm{g}', \mathrm{h}') : \Delta' \to R^3$, iar $p \sim p'$; atunci există o bijecţie $\theta = (\varphi, \psi) : \Delta' \to \Delta$ cu $p' = p \cdot \theta$, adică

$$u = \varphi(u', v'),\ v = \psi(u', v') \text{ cu } J = \mathrm{D}(u, v)/\mathrm{D}(u', v') \neq 0, \tag{2}$$

astfel încît $\mathrm{f}'(u', v') = \mathrm{f}(\varphi(u', v'), \psi(u', v')), \ldots, \mathrm{h}'(u', v') = \mathrm{h}(\varphi(u', v'), \psi(u', v'))$. a) $\theta : u = u' + v'$, $v = u'v'$ e bijecţie dacă $u' \neq v'$; atunci $\theta^{-1} : u' = (u + \sqrt{u^2 - 4v})/2$, $v' = (u - \sqrt{u^2 - 4v})/2$ cu $u^2 - 4v > 0$. Pentru $v = u'$, obţinem cubica $C' = (r' : x = 2u', y = u'^2, z = 2u'^3 ; \Gamma')$, iar pentru $v = u^2/4$ rezultă cubica $C = (r : x = u, y = u^2/4, z = u^3/4 ; \Gamma)$; aceste cubice coincid, căci $r \sim r'$ prin $u = 2u'$. Pînzele (p, Σ) şi (p', Σ') nu sînt echivalente, deşi $\Sigma' \subset \Sigma : z = x^3 - 3xy$. b) Sînt echivalente ; $\theta : u = -u'^2 + v'$, $v = 1/u'$ e o bijecţie ($\Delta = \Delta' = R^2$). Suprafaţa e paraboloidul hiperbolic $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$.

4 Fie suprafaţa dată de reprezentarea parametrică :

$$x = u^2 + v,\ y = u^2 - v,\ z = uv ; \tag{3}$$

$$x = a(uv + 1)/(u + v),\ y = b(u - v)/(u + v),\ z = a(uv - 1)/(u + v). \tag{4}$$

Să se determine curbele parametrice şi curba $v = u$ de pe suprafaţă.

R. a) Curbele $u = \lambda$ (const.) sînt dreptele $x + y - 2\lambda^2 = 0$, $\lambda x - z - \lambda^3 = 0$; curbele $v = \mu$ (const.) sînt parabolele $z' = \mu^2(x - \mu)$; curba $v = u$ e parabola $(x - y)^2 = 4z$, $x + y - 2z = 0$. $S : (x + y)(x - y)^2 - 8z^2 = 0$. b) $u = \lambda$ şi $v = \mu$ sînt cele două familii de generatoare ale hiperboloidului cu o pînză

(4') $$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 - 1 = 0;$$

curba $v = u$ e hiperbola de secţiune cu planul Oxz.

5 Să se arate că liniile $u = \text{const.}$ de pe suprafaţa

(5) $$x = u^3 + v^2 + uv - 1,\ y = uv^2 - 2v + 3,\ z = uv$$

sînt curbe plane.

6 Se numeşte *suprafaţă de rotaţie* suprafaţa generată de o curbă ce se roteşte în jurul unei drepte fixe, numită *axă de rotaţie*. Să se găsească ecuaţia suprafeţei de rotaţie care admite pe Oz ca axă de rotaţie. *Apl.* a) Ecuaţia $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = r^3$ reprezintă o suprafaţă de rotaţie. b) Curba meridiană e : b_1) un cerc ; b_2) lănţişorul rotit în jurul bazei sale ; b_3) tractricea rotită în jurul asimptotei sale.

R. Axa de rotaţie d poate să nu fie situată în planul *curbei generatoare* C, dacă C e plană. Însă, orice punct al lui C descrie un cerc Γ_p, numit *paralel* (cu centrul pe d, planul lui Γ_p fiind perpendicular pe d). Un plan conţinînd pe d taie suprafaţa S după o secţiune plană Γ_m, numită *curbă meridiană* (simplificat : *meridian*). Deci : *S e generată de Γ_m care se roteşte în jurul*

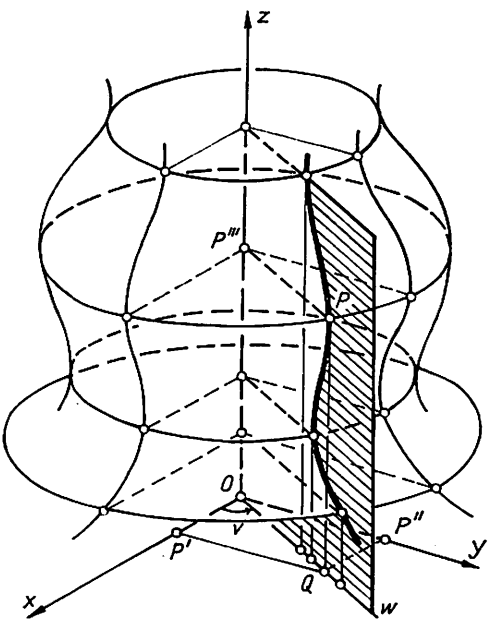


Fig. 1

axei d din panul în care e situată. Considerînd, în planul Owz (fig. 1), $\Gamma_m : w = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$, obţinem

(6) $$S : x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u).$$

Obs. Luînd raza u a lui Γ_p ca parametru, deci $\Gamma_m : z = f(u)$ în Owz, găsim

(6') $$S : x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u).$$

Obs. Γ_m: $v = \text{const.}$ și Γ_p: $u = \text{const}$: Dacă Γ_m are un punct singular, toate punctele de pe paralelul corespunzător sînt puncte singulare ale lui S. *Apl.* a) Scriind S: $(x + y + z)(3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2) = 2r^3$, rezultă că intersecțiile ei cu planele $x + y + z = \lambda$ sînt cercuri; $d: x = y = z$. b_1) După cum cercul are centrul în O ($w = r\cos u$, $z = r\sin u$; Oz e diametru) sau e pe Ow ($w = a + r\cos u$, $z = r\sin u$; $a > r$), obținem *sfera* (fig. 2)

(7) $$x = r\cos u\cos v,\ y = r\cos u\sin v,\ z = r\sin u$$

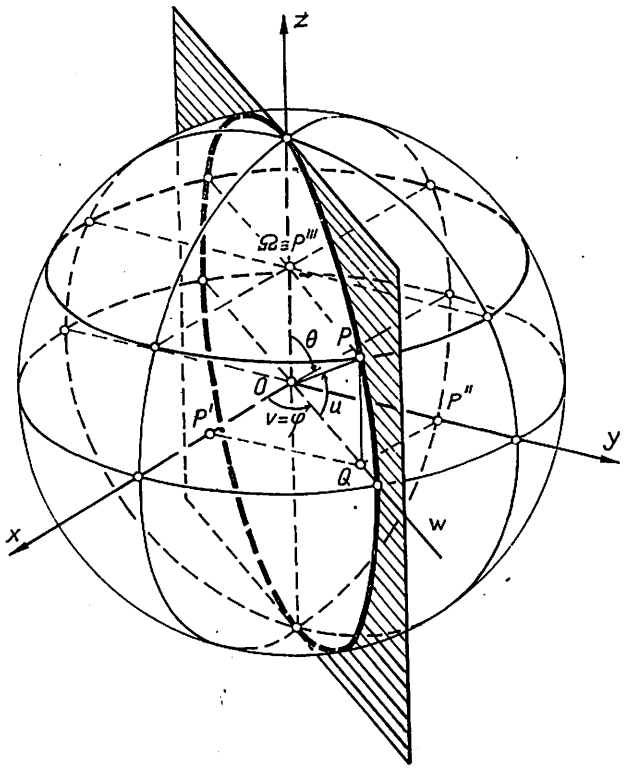


Fig. 2

sau *torul* (fig. 3), care conține *ombilicala* ca dublă linie:

(8) $$x = (a + r\cos u)\cos v,\ y = (a + r\cos u)\sin v,\ z = r\sin u;$$

torul e o suprafață algebrică de gradul al patrulea:

(8′) $$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Obs. α_1) v e *longitudinea*, iar u e *latitudinea* punctului P de pe sfera (7), obținînd toate punctele sferei cînd u și v iau valori de la $-\pi/2$ la $\pi/2$ și de la 0 la 2π. Un punct P al sferei poate fi definit de unghiurile $\varphi = v$ și $\theta = \pi/2 - u$ (*coordonatele polare în spațiu, coordonatele sferice* sau *coordonatele geografice*), θ numindu-se *colatitudinea* lui P și variind între 0 și π; în acest caz, sfera are reprezentarea

(7′) $$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

α_2) În general, centrul cercului e $\Omega(a, b)$ în planul Owz, însă putem presupune $b = 0$ (prin translația lui $Oxyz$ în lungul lui Oz din O în $(0, 0, b)$). b_2) În planul Owz, *lănțișorul* Γ_m: $w = u$, $z = a\ln(u +$

$+\sqrt{u^2-a^2}$) sau $w = a \operatorname{ch} \frac{u}{a}$, $z = u$; căci $\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) = \operatorname{arg\,ch} \frac{u}{a} + \ln a$. Obținem *catenoidul* (sin. : *aliseida*), care e o suprafață transcendentă de ecuații (fig. 4)

$$(9)\qquad \begin{aligned} &x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}); \\ &x = a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v,\ y = a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v,\ z = u; \end{aligned} \qquad x^2+y^2 = a^2\operatorname{ch}^2\frac{u}{a}.$$

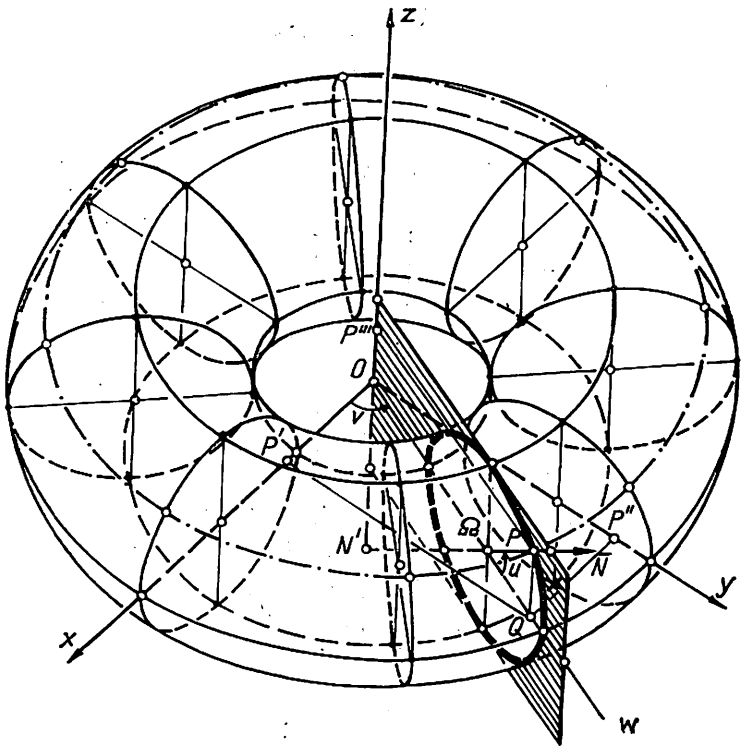


Fig. 3

Obs. De la (9_1) se ajunge la ecuația carteziană (9_3) în urma unei translații în lungul axei Oz. b_3) Fie, în planul Owz, *tractricea* Γ_m : $w = a\sin u$, $z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$; obținem *pseudosfera* (suprafață transcendentă) :

$$(10)\qquad x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u).$$

Pentru $u = 0$ și $u = \pi$, z ia valoarea infinită ; deci suprafața e deschisă la infinit. Pentru $u = \pi/2$, avem $z = 0$; acest cerc e o linie singulară a suprafeței, căci punctul $z = 0$ al lui Γ_m e punct de întoarcere (fig. 5). Are ecuația carteziană

$$(10')\qquad z = a\left[\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right) / \sqrt{x^2+y^2} \mp \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right].$$

7 Se numește *rotoidă* suprafața generată de un profil plan C, de formă invariabilă, care se mișcă sprijinindu-se pe directoarea C_1 plană închisă,

dată, astfel încît planul lui C să fie perpendicular pe tangenta la C_1 în punctul de contact (fig. 6). Ce devine rotoida cînd C_1 e un cerc?

8 Fie, în sistemul cartezian ortogonal $Oxyz$, *cilindrul circular drept* cu Oz ca generatoare iar Ox ca diametrul secțiunii drepte, *torul* născut prin rotirea în jurul lui Oz a unui cerc situat în Oxz, tangent în O la Oz și de diame-

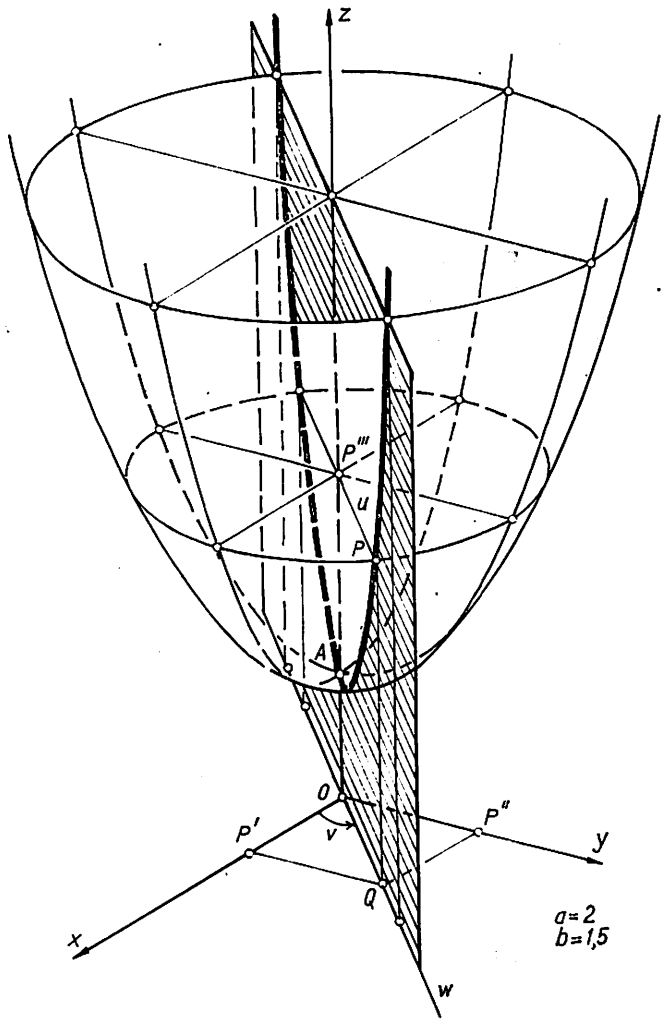


Fig. 4

tru egal cu cel al cercului secțiunii drepte a cilindrului, și *conul de rotație* cu Oz ca axă și ale cărei generatoare formează un unghi de 60° cu axa. Să se arate că torul și conul taie cilindrul după 2 curbe în spațiu C_1 și C_2 care au rolul de *curbe duplicatoare* (ce dau soluția problemei dedublării cubului).

R. Cilindrul: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; torul: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$; conul: $-3x^2 + y^2 + z^2 = 0$. În coordonate sferice: $r = 2a \cos \varphi / \sin \theta$ (cilindrul), $r = 2a \sin \theta$ (torul),

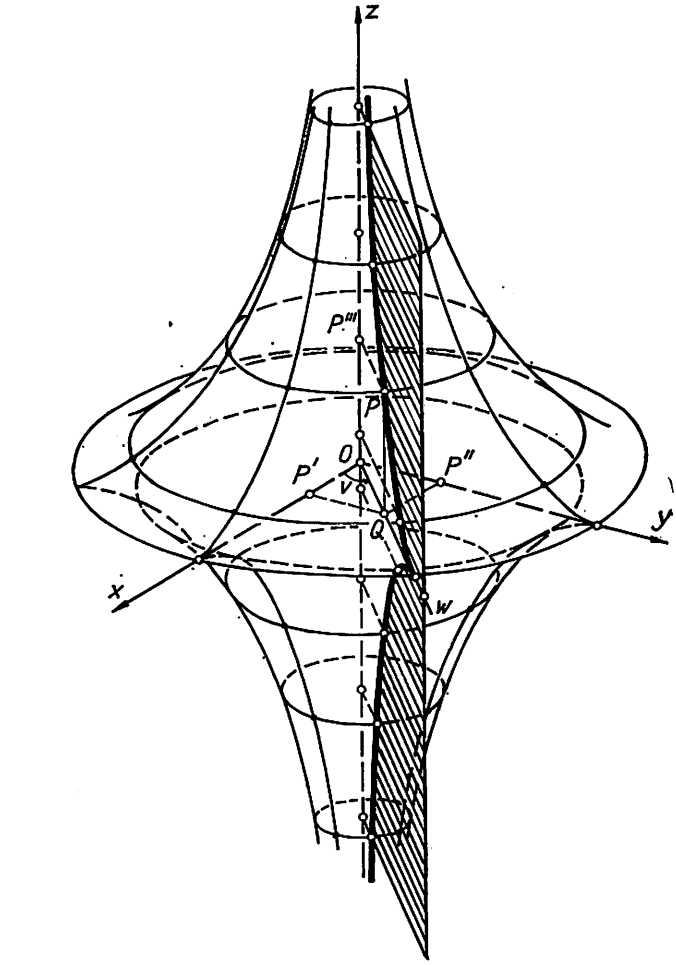


Fig. 5

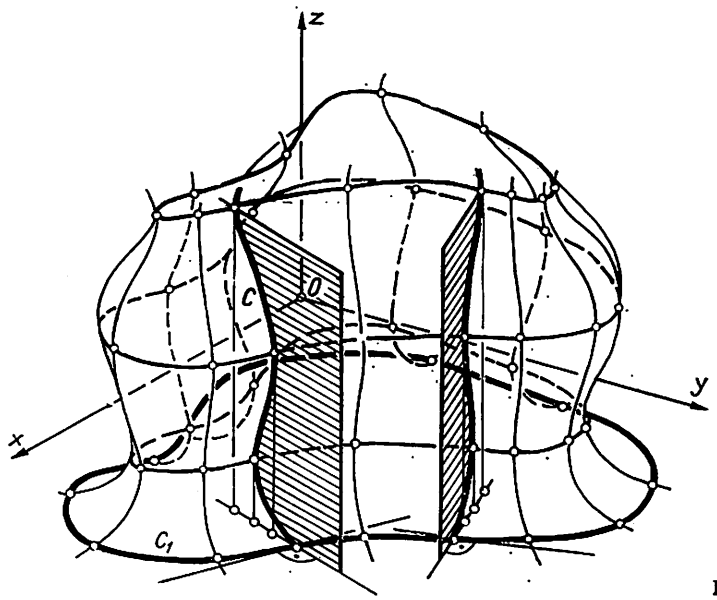


Fig. 6

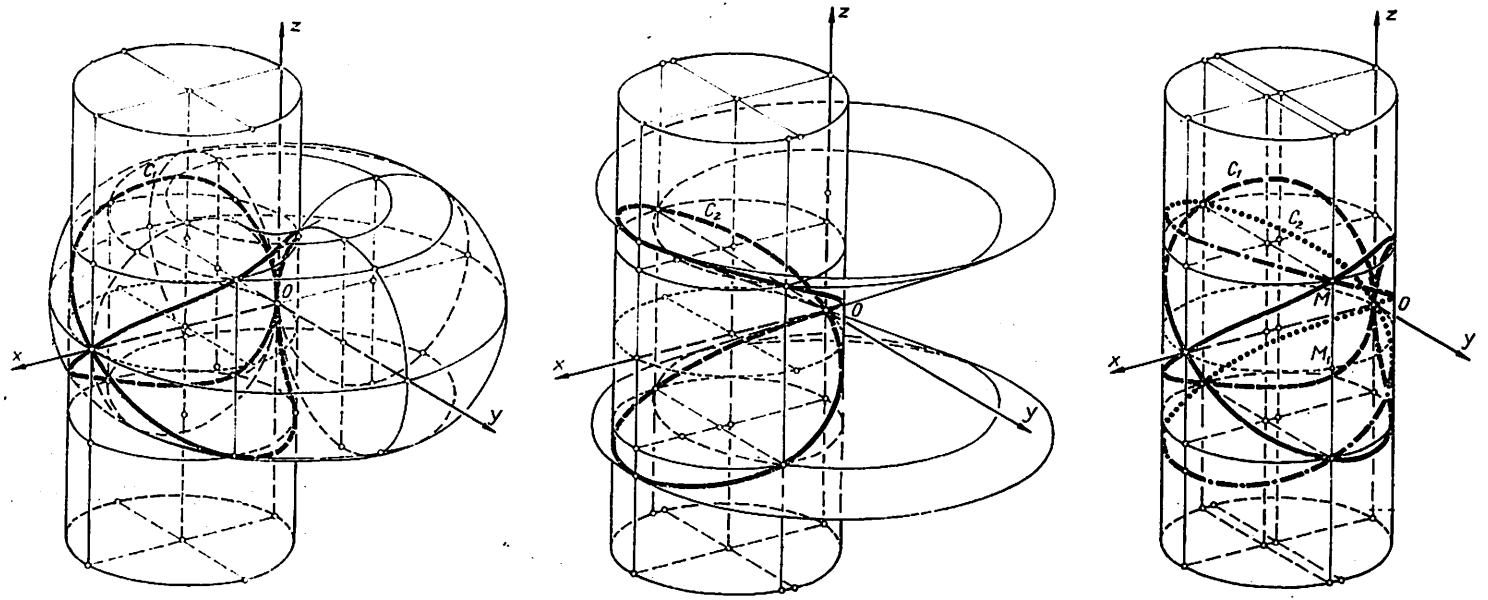


Fig. 7

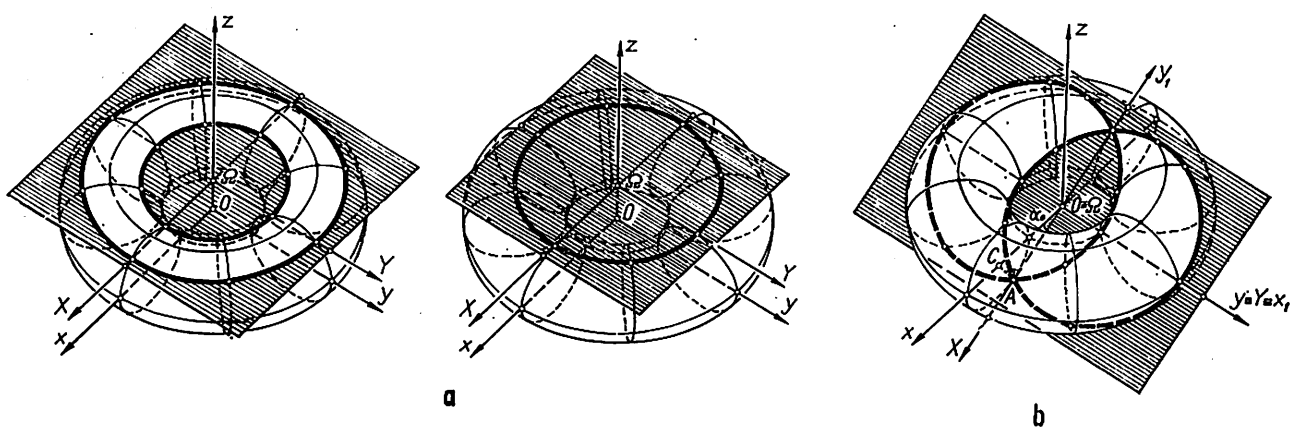


Fig. 8

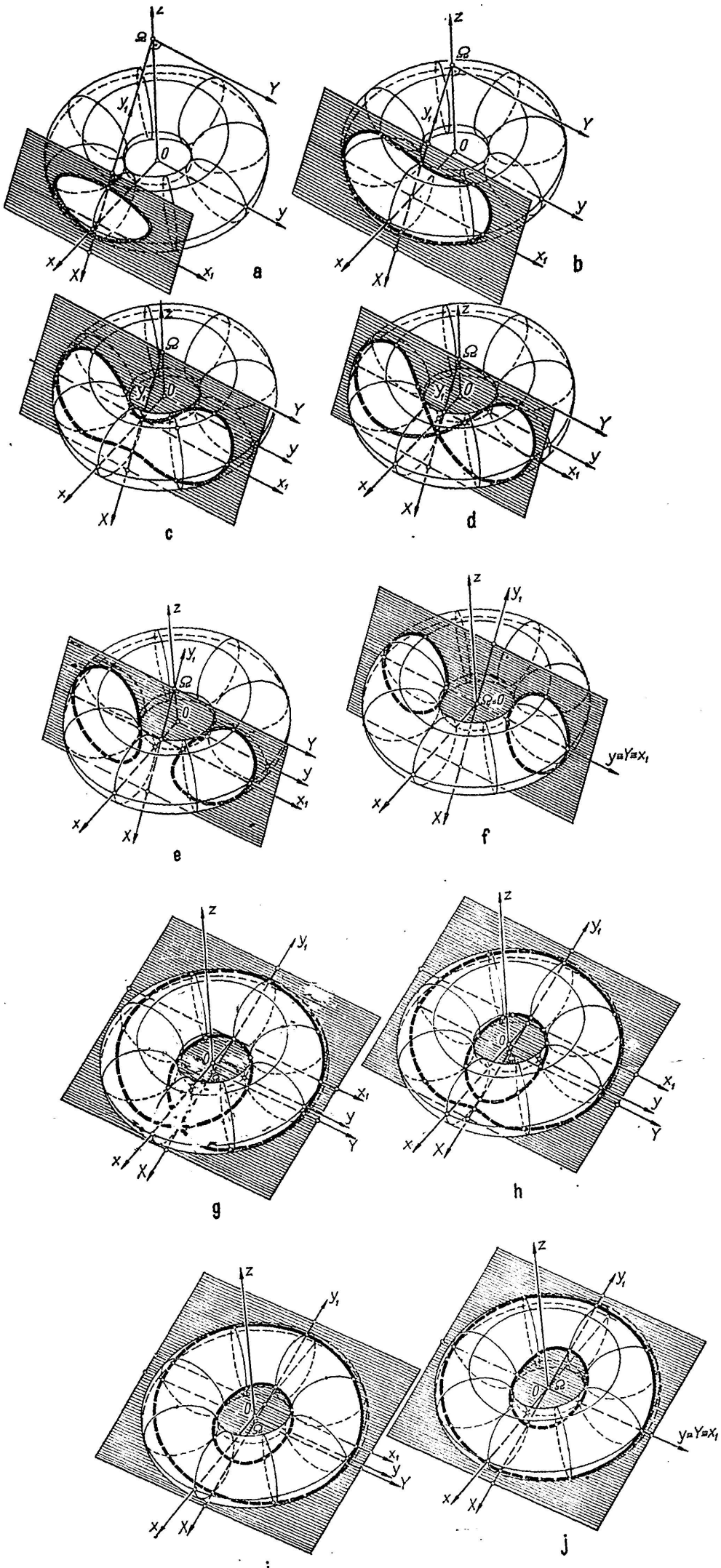


Fig. 9

$\sin\theta\sin\varphi = 1/2$ (conul). C_1 și C_2 au în comun 4 puncte M simetrice față de Oxz, valorile lui $\lambda = (\widehat{Om, Oxy}) = \pi/2 - \theta$ care le corespund fiind date de $\cos^2\lambda = 1/2$; de unde $(r\cos\lambda)^3 = 2a^3$. Deci unul oarecare din M se proiectează pe Oxy în M_1 astfel că $OM_1 = a\sqrt[3]{2}$ (fig. 7).

9 Secțiunea plană a unui tor e o spirică.

R. Fie planul $\pi : mx + z - z_0 = 0$ (neparalel cu axa de rotație), tăind pe Oz în $\Omega(0, 0, z_0)$ și pe Oxz după ΩX. Secțiunea, raportată la ΩX și $\Omega Y \parallel Oy$, e *spirica generală* (v. probl. I, 8)

$$(X^2 + Y^2 + 2z_0X\sin\alpha + z_0^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(X^2\cos^2\alpha + Y^2) = 0,\ Z = 0,$$

α fiind unghiul dintre π și Oxy; căci, avînd $m = \operatorname{tg}\alpha$, raportăm torul (8′) la sistemul ΩXYZ dat de $x = X\cos\alpha - Z\sin\alpha$, $y = Y$, $z = X\sin\alpha + Z\cos\alpha + z_0$. Forma spiricelor generale depinde de a, r și α. Fie cazul $a > r$; după α, avem: $\alpha = 0$, cînd spirica are o infinitate de axe de simetrie (fig. 8a); $\alpha = \alpha_0$ (α_0 e unghiul dintre planele bitangențial și ecuatorial, iar $\operatorname{tg}\alpha_0 = r/\sqrt{a^2 - r^2}$), cînd se obțin *cercurile Villarceaux* (fig. 8b; cercurile sînt concurente în punctele de tangență între π și S); $\alpha \neq 0$ și α_0, cînd spirica admite 1 sau 2 axe de simetrie după cum $\Omega \neq 0$ sau $\Omega = 0$ și are un punct dublu dacă π e simplu tangențial (fig. 9). Fie planul $\pi : y = y_0$ (paralel cu axa de rotație), tăind pe Oy în $\Omega(0, y_0, 0)$, pe Oxy după ΩX și pe Oyz după ΩY. Secțiunea e *spirica lui Perseus*

$$[(X - a)^2 + Y^2]\,[(X + a)^2 + Y^2] = h(X^2 + Y^2) + k,\ Z = 0$$

$$\text{cu } h = 2(r^2 - y_0^2),\ k = 2(r^2 + y_0^2)a^2 - h^2/4.$$

Fie $F(a, 0) \in \Omega XY$, proiecția centrului meridianului din Oxz, și $F'(-a, 0)$ simetricul său în raport cu Ω; regăsim definiția curbei: $FP^2 \cdot F'P^2 = h\Omega P^2 + k$ (fig. 10; $a > r$). Ω e punct dublu numai dacă aparține torului, cînd $y_0 + \varepsilon a = \varepsilon' r$ ($\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$); se obțin *lemniscatele Booth* (fig. 11). În celelalte cazuri, spiricele nu au puncte duble. Dacă $h = 0$, deci $y_0^2 = r^2$, $k = 4a^2r^2$, avem *ovalele Cassini* (fig. 12).

10 Să se determine elicea de pe o suprafață S dată. *Apl.* a) Elicea cilindro-conică. b) Elicea cilindro-sferică.

R. Elicea (II, 38″) e situată pe suprafața

$$S : F(x, y, z) = 0; \tag{11}$$

deci funcțiile $x(\sigma)$ și $y(\sigma)$ satisfac ecuațiile

$$F(x(\sigma),\ y(\sigma),\ a\sigma + b) = 0,\ (dx/d\sigma)^2 + (dy/d\sigma)^2 = 1. \tag{12}$$

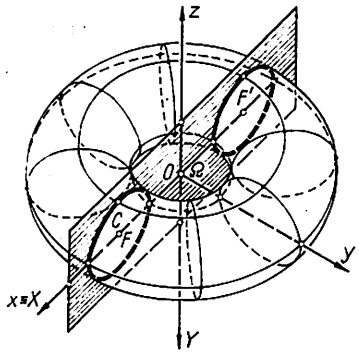
Apl. a) Fie conul de rotație $x^2 + y^2 - m^2z^2 = 0$. Ecuațiile (12), prin substituția $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, devin $\rho^2 - m^2(a\sigma + b)^2 = 0$, $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = d\sigma^2$; deci $d\rho = am\,d\sigma$, $d\theta = [\sqrt{1 - m^2a^2}/m(a\sigma + b)]\,d\sigma$ și integrînd $\theta = \sqrt{1 - m^2a^2}\left(\ln(a\sigma + b) - \ln\frac{A}{m}\right)/am$. Cu θ ca parametru și $k = am/\sqrt{1 - m^2a^2}$, avem $a\sigma + b = Ae^{k\theta}/m$ și $\rho = Ae^{k\theta}$. b) Fie sfera (7); găsim relația a $dv = \sqrt{1 - a^2\operatorname{tg}^2 u}\,du$ integrabilă ușor.

11 Se numește *suprafață de nivel* a unui cîmp scalar, definit de o funcție $u = F(x, y, z)$, locul punctelor pentru care funcția are aceeași valoare. Se cere: a) Ecuația familiei suprafețelor de nivel ale cîmpului. b) Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece o suprafață de nivel. *Apl.* Să se determine suprafața de nivel a cîmpului scalar definit de funcția $u = x^3 + y^3 + z^3$ care trece prin punctul $P_0(\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{9})$ și să se găsească punctele reale în care ea taie axele reperului.

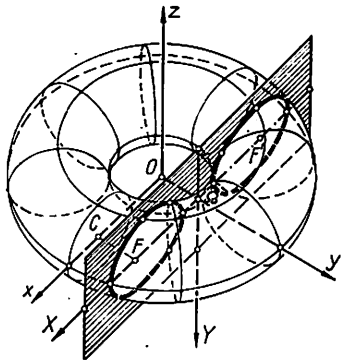
12 Pe o suprafață S, dată parametric prin

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \text{ adică } x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \tag{13}$$

putem duce, printr-un punct ordinar P_0, o infinitate de curbe care să aibă aceeași tangentă sau tangente diferite în P_0.

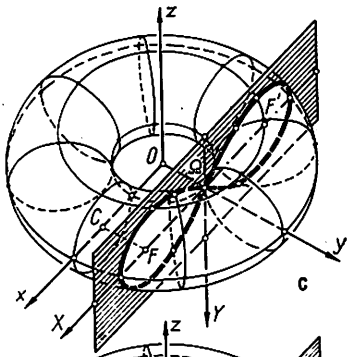


a

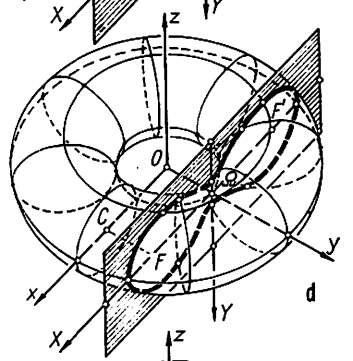


b

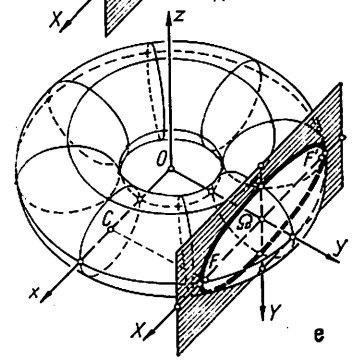
Fig. 10 a, b



c

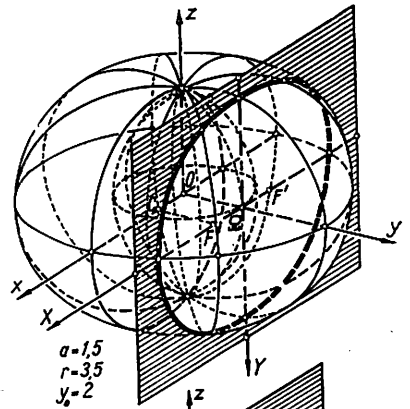


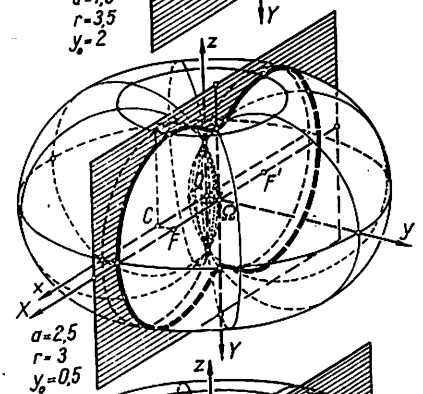
d



e

Fig. 10 c, d, e





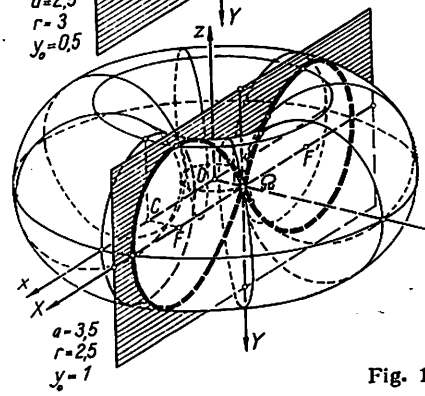


Fig. 11

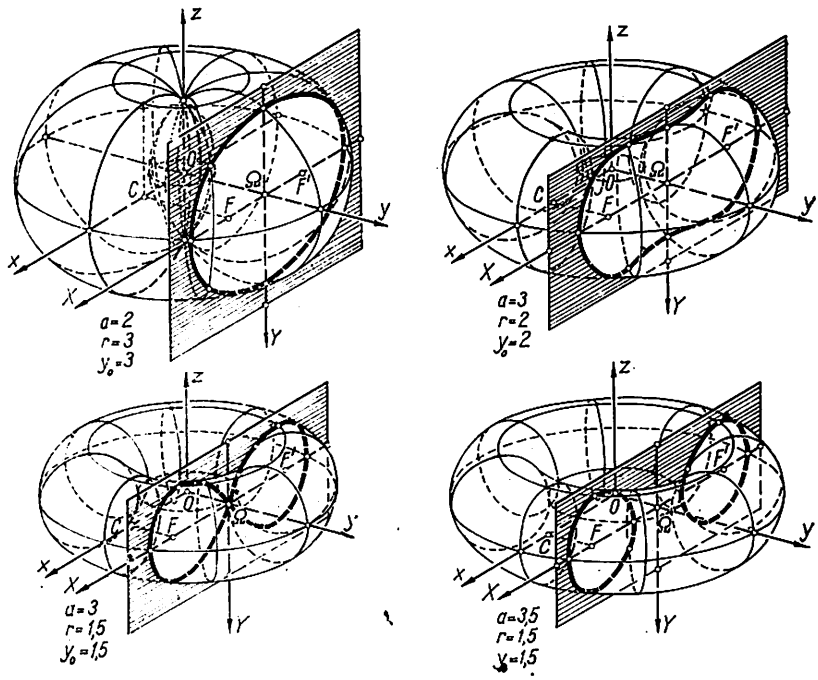


Fig. 12

13 Se numeşte *elicoid* (sin. : *suprafaţă elicoidală*) suprafaţa generată de o curbă supusă unei mişcări elicoidale; să i se afle ecuaţiile.

R. Dacă *Oz* e axa mişcării elicoidale (v. probl. II, 5), curba

(14) $$C : x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u)$$

generează *suprafaţa elicoidală* S de ecuaţii parametrice

(15) $$x = x(u)\cos v - y(u)\sin v,\ y = x(u)\sin v + y(u)\cos v,\ z = z(u) + kv,$$

k fiind *parametrul elicoidului*. Secţiunile lui S prin plane conţinînd axa mişcării sînt figuri egale; dacă se ia drept C secţiunea din Oxz (prin ecuaţii parametrice sau explicite), S are ecuaţiile (fig. 13)

(15′) $$x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u) + kv,$$

(15″) $$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u) + kv.$$

u = const. sînt elice circulare situate pe cilindri de rotaţie avînd Oz ca axă; v = const. sînt meridiane.

Cînd C e o dreaptă d, S se numeşte *elicoid riglat* (sin. : *elicoid strîmb*). După cum d e sau nu incidentă cu axa de rotaţie Oz, S se zice că e un *elicoid axial* (sin. : *elicoid închis*; fig. 14) sau *elicoid cu simbure* (sin. : *elicoid deschis*; fig. 15); *elicoidul* e *drept* (sin. : *elicoid cu plan director*) sau *oblic*, după cum d e sau nu e ortogonală pe Oz. *Elicoidul strîmb axial oblic* (sin. : *elicoidul şurub triunghiular*), cînd în poziţia iniţială (pentru $v = 0$) d e $C : x = u,\ y = 0,\ z = au$, are ecuaţiile

(16) $$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = au + kv$$ (v. fig. 14a).

Acest elicoid taie un plan perpendicular pe Oz după o spirală Arhimede. *Elicoidul strîmb axial drept* (sin. : *elicoidul drept cu plan director, suprafaţa şurub, elicoidul lui Kästner*) are ecuaţiile

(16′) $$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = kv;\ z = k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$ (v. fig. 14 b).

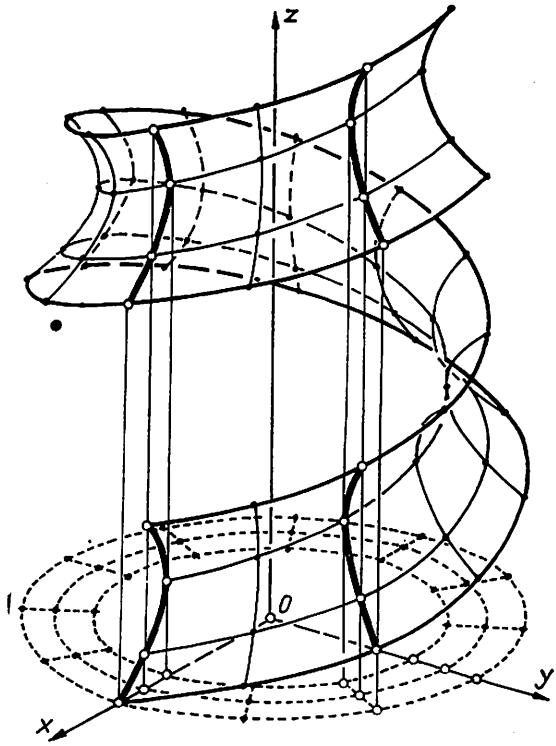


Fig. 13

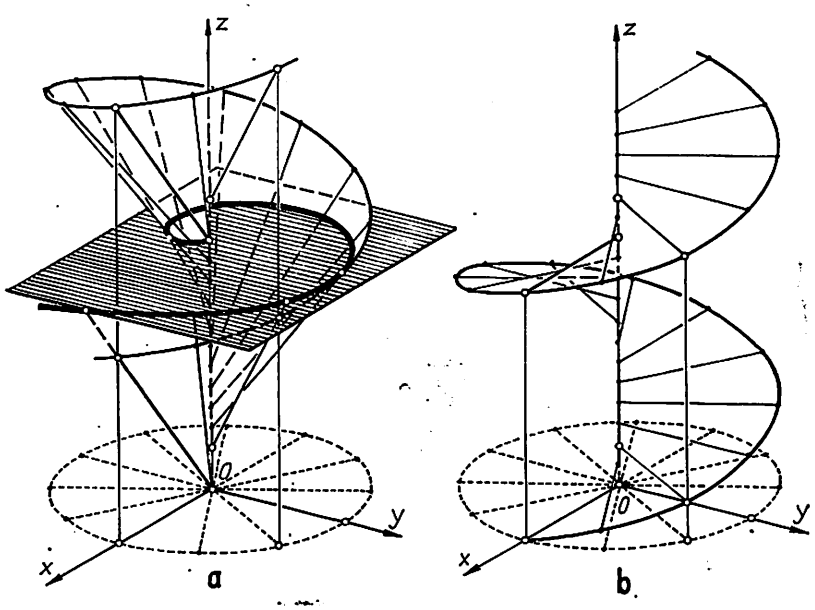


Fig. 14

În acest caz, elicele $u = \text{const.}$ sînt traiectorii ortogonale ale generatoarelor $v = \text{const.}$ Intersecția lui cu un cilindru de rotație (conținînd axa Oz) : $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ e o elice circulară. Pentru un *elicoid riglat cu simbure*, piciorul perpendicularei comune dintre axă și generatoare descrie *elicea colier*, situată pe *suprafața simbure a elicoidului* (un cilindru de rotație). Un astfel de elicoid, dacă e oblic, poate fi o suprafață desfășurabilă ; obținem *elicoidul desfășurabil* :

(17) $\qquad x = a(\cos u - v \sin u),\ y = a(\sin u + v \cos u),\ z = k(u + v)$ (v. fig. 15 c),

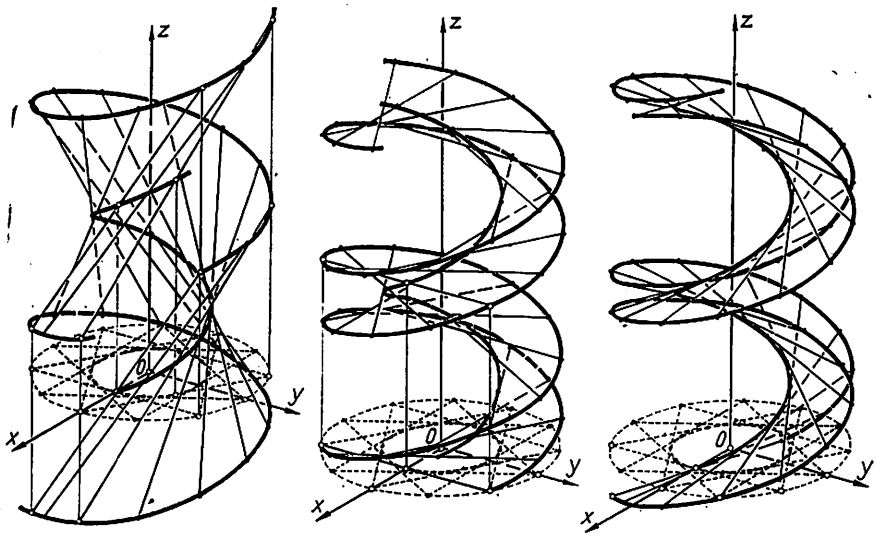


Fig. 15

fiind generat de tangentele elicei circulare

(18) $\qquad c : x = a \cos u,\ y = a \sin u,\ z = ku.$

Secțiunea acestei suprafețe prin Oxy e evolventa cercului de secțiune al cilindrului elicei. Prin transformări succesive de parametri $u = \text{ctg } u^*$, $v = v^*$ și $a/\sin v^* = U$, $v^* - u^* = \pi/2 - V$, adică

$$u = \sqrt{U^2 - a^2}/a,\quad v = V - \text{arc tg}(\sqrt{U^2 - a^2}/a) = V + \text{arc ctg}(\sqrt{U^2 - a^2}/a) - \pi/2,$$

ecuațiile (17) pot fi aduse la forma (15″).

Cînd C e un cerc, S se numește *elicoid ciclic* (fig. 16) ; în particular, obținem *colonna torsa* (sin. : *coloana barocă* ; fig. 17a) și *șurubul lui Saint-Gilles* (fig. 17b), după, cum cercul e situat într-un plan perpendicular, respectiv conține axa mișcării elicoidale.

14 Fie suprafața de rotație $S : f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$, avînd pe Oz ca axă de rotație, iar meridianul $f(z, y) = 0$, $x = 0$ fiind o curbă algebrică. Să se arate că proiecția pe Oxy a intersecției lui S cu elicoidul lui Kästner (16′) e o spirală algebrică, meridianul fiind curba generatoare a spiralei. *Apl.* a) Curba generatoare e : a_1) dreapta $az/k - y = 0$, $x = 0$ (incidentă cu Oz) ; a_2) hiperbola echilateră $yz = ka$, $x = 0$ (cu Oz ca asimptotă) ; a_3) parabola $(y - a)^2 = 2apz/k = 0$, $x = 0$ (cu Oz ca axă de simetrie. b) Se obține o spirală dacă curba generatoare e exponențiala $y = ae^z$, $x = 0$? c) Care e curba generatoare în cazul spiralei : c_1) Fermat ; c_2) Galilei ; c_3) lituus ; c_4) hiperbolică generală ; c_5) parabolică.

15 Se numește *conoid* (sin. : *conoid general*, *suprafață conoidă*) suprafața generată de mișcarea după o anumită lege a unei drepte generatoare g

care se sprijină pe 2 drepte strîmbe $d_i (i = 1, 2)$ date. Să se formeze ecuația generală a unui conoid. *Apl.* a) Elicoidul Kästner e un conoid drept. b) Să se găsească conoidul drept care admite ca sîmbure o sferă. c) Să se găsească conoidul drept astfel încît proiecțiile unui punct fix (oarecare) pe generatoare să fie o curbă plană (*conoidul Plücker*). d) Conoidul drept de axă *Oz* și curbă directoare cercul $x = a$, $y^2 + z^2 = r^2$ (*conocuneus* sau *conoidul Wallis*).

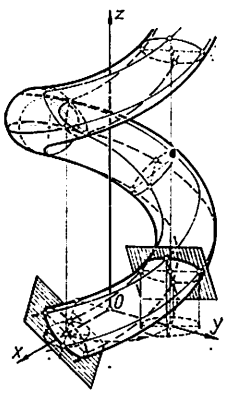


Fig. 16

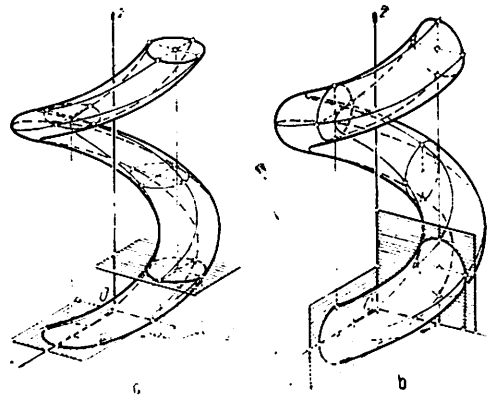


Fig. 17

R. Fie $d_i : \pi_i = 0$, $\sigma_i = 0$; g aparține rețelei $\pi_1 - \lambda\sigma_1 = 0$, $\pi_2 - \mu\sigma_2 = 0$. În general, mișcarea după o anumită lege a lui g (echivalentă cu condiția că g întîlnește o curbă C dată) se exprimă analitic printr-o relație între λ și μ. Deci conoidul are ecuația

$$S : F(\pi_1/\sigma_1,\ \pi_2/\sigma_2) = 0. \tag{19}$$

d_i și C poartă numele de *linii directoare* ale lui S; în general, C nu intersectează (real) pe d_i (fig. 18). Cînd g e tangentă unei suprafețe Σ date, se spune că avem un *conoid cu simbure*; în

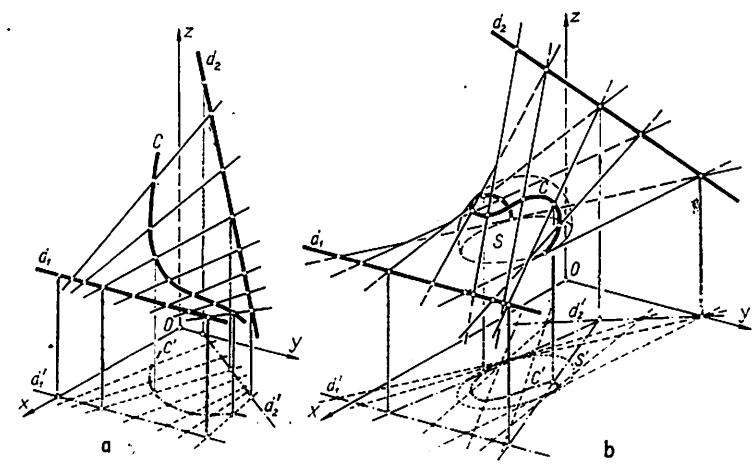


Fig. 18

acest caz, C e locul punctelor de tangență ale lui g cu Σ (fig. 18b). *Obs.* Dacă C e o dreaptă d_3, se pot prezenta următoarele cazuri: a) d_α ($\alpha = 1, 2, 3$) sînt strîmbe între ele; atunci ecuația (19) e liniară atît în π_1/σ_1, cît și în π_2/σ_2, S fiind o cuadrică nedegenerată riglată (hiperboloid cu o

pînză sau paraboloid hiperbolic, după cum d_α nu sînt sau sînt paralele cu un același plan; fig. 19). b) d_3 intersectează pe una din d_i; de exemplu, fie $d_3 \cap d_1 = A$. În acest caz, S e constituită din 2 plane (fig. 20): (d_1, d_3) și (A, d_2). c) d_3 intersectează pe d_i; fie $A_i = d_3 \cap d_i$; atunci S e formată din 2 plane (fig. 21): $(A_i, d_j) = (d_3, d_i)$ cu $i \neq j$.

Dacă unul din planele π_i, σ_i e planul de la infinit, S se numește *conoid cu plan director* (fig. 22) și *e generat de o dreaptă care se sprijină pe o curbă dată, pe o dreaptă fixă și e paralelă cu un plan*

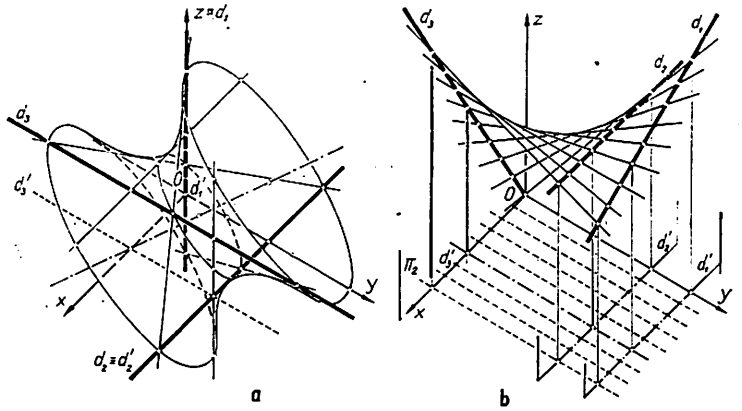


Fig. 19

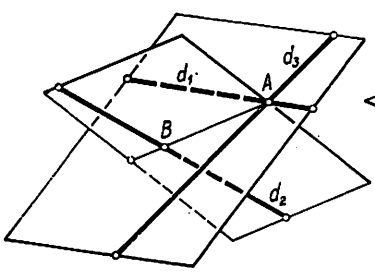


Fig. 20

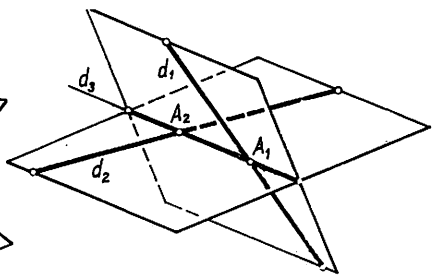


Fig. 21

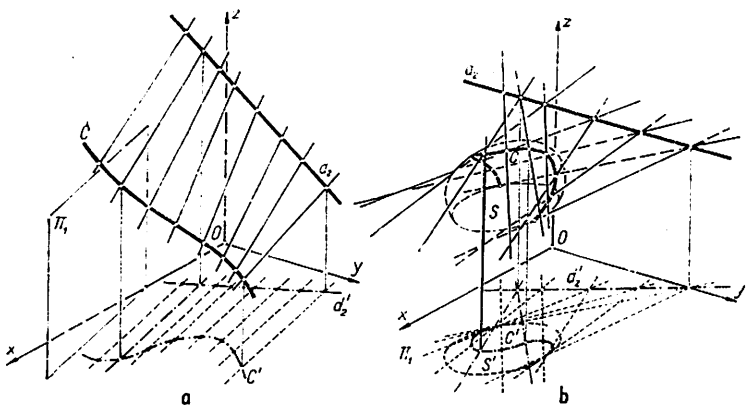


Fig. 22

(care determină dreapta de la infinit); cînd planul e perpendicular pe dreapta fixă, S se zice *conoid drept*, dreapta fixă fiind *axa* conoidului (fig. 23). Dacă $\sigma_1 = 0$ e planul de la infinit, deci planul director al lui S e $\pi_1 = 0$, ecuația conoidului cu plan director e de forma

$$F(\pi_1, \pi_2/\sigma_2) = 0. \tag{19'}$$

Obs. Dacă C e o dreaptă d_3 (S e generată de o dreaptă care se sprijină pe 2 drepte strîmbe și rămîne paralelă la un plan director), obținem un conoid cu 2 plane directoare (conoid cu plan director

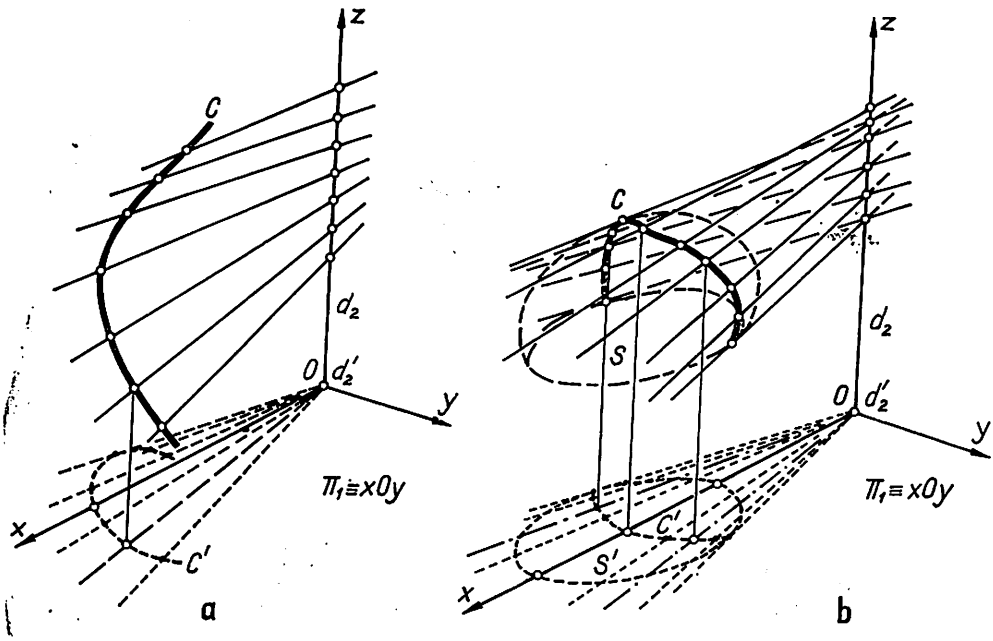


Fig. 23

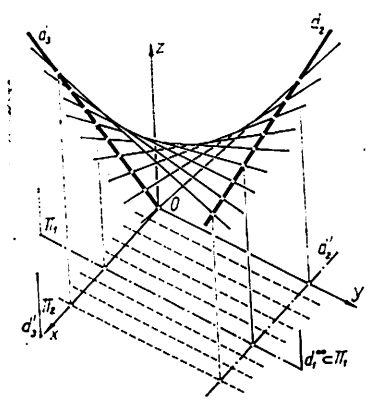


Fig. 24

în 2 moduri diferite); al doilea plan director e paralel cu d_i. Ecuația unui astfel de conoid e liniară în π_1 și π_2/σ_2; deci e o cuadrică (un paraboloid hiperbolic; fig. 24). Dacă axa conoidului drept e Oz și planul director e Oxy, ecuația lui e de forma

$$\begin{aligned} &F(z, y/x) = 0 \text{ sau } z = f(y/x), \\ &\text{deci } x = u,\ y = uv, \quad z = f(v). \end{aligned} \tag{19''}$$

Apl. a) Ecuația (16') e de forma (19''). b) $g: z = \lambda,\ y = \mu x$ e tangentă unei sfere (generale) dacă $(a_1 + \mu a_2)^2 - a_0(1 + \mu^2)(a_0\lambda^2 + 2a_3\lambda + a_4) = 0$; deci (fig. 25)

$$S: (a_1x + a_2y)^2 - a_0(x^2 + y^2)(a_0z^2 + 2a_3z + a_4) = 0 \tag{20}$$

c) $g: u = \text{const.}$ sau $y = vx,\ z = f(v)$. Proiecția punctului $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ pe g e curba $C: x = (\alpha + \beta v)/(1 + v^2)$, $y = v(\alpha + \beta v)/(1 + v^2)$, $z = f(v)$. C e în planul

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{21}$$

dacă $(A + Bv)(\alpha + \beta v)/(1 + v^2) + Cf(v) + D = 0$, adică $f(v) = (av^2 + bv + c)/(1 + v^2)$;

deci C e o elipsă. Rezultă astfel generarea: g sînt perpendiculare pe generatoarele unui cilindru de rotație K, se sprijină pe o generatoare d arbitrară a lui K și pe o secțiune plană oblică C a

lui K cu un plan π; altă generare: g sînt perpendicularele comune unei drepte d şi dreptele δ ale unui fascicul din planul π, centrul Ω (al fasciculului) $\neq d \cap \pi$. *Conoidul lui Plücker* e

(22) $x = u,\ y = uv,\ z = (av^2 + bv + c)/(1 + v^2)$, dacă $z = (ay^2 + bxy + cx^2)/(x^2 + y^2)$.

Ecuaţia explicită poate fi adusă la forma (fig. 26)

(22′) $z(x^2 + y^2) = kxy$ sau $z(x^2 + y^2)k = (x^2 - y^2)$ sau $z(x^2 + y^2) = ky^2$.

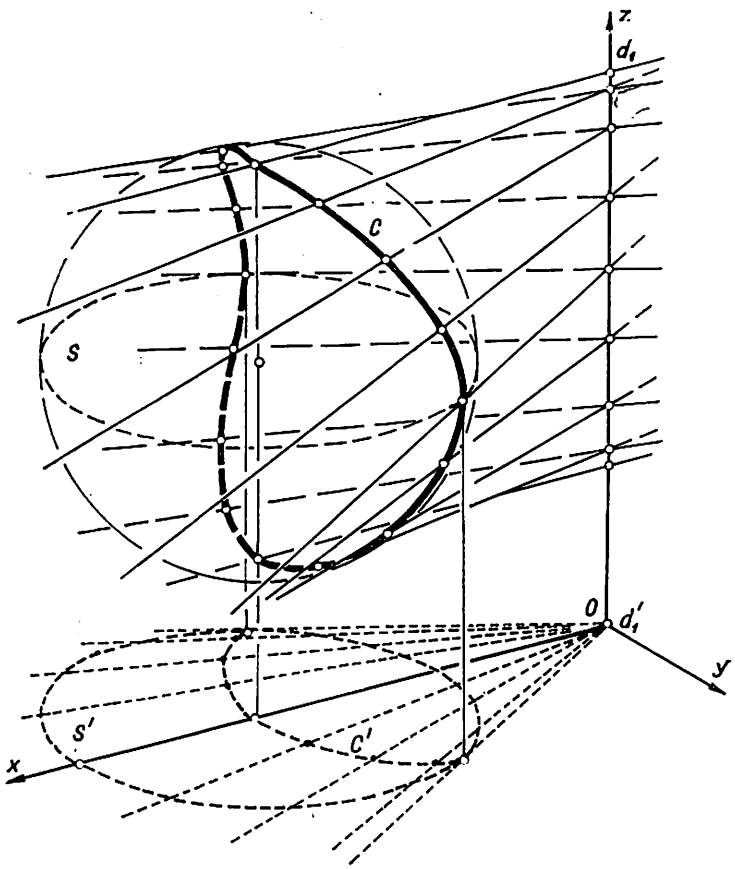


Fig. 25

În adevăr, translatînd O în $(0, 0, \lambda)$, ecuaţia devine $z(x^2 + y^2) = (a - \lambda)y^2 + bxy + (c - \lambda)x^2$; determinăm pe λ astfel ca $(a - \lambda)y^2 + bxy + (c - \lambda)x^2 = 0$ să reprezinte 2 drepte ortogonale Δ şi Δ' (cînd avem $a + c - 2\lambda = 0$) sau o dreaptă dublă Δ (cînd avem $b^2 - (a - \lambda)(c - \lambda) = 0$) şi luăm ca noi axe x şi y pe Δ şi Δ' sau bisectoarele lor sau dreapta dublă ca axă x. Pentru $(22_1')$ avem

(22″) $x = ku^2v/(u^2 + v^2),\ y = kuv^2/(u^2 + v^2),\ z = kuv/(u^2 + v^2)$.

d) $x^2(z^2 - r^2) + a^2y^2 = 0$ (fig. 27). *Obs.* Proiecţia ortogonală pe Oxy a intersecţiei conoidului Wallis cu planul bisector $x = z$ e lemniscata Gérono.

16 Fie cuartica S_4 : $(xy - z)(xz - y^2) + (y - x^2)^2 = 0$. Să se arate că suprafaţa conţine: a) o cubică strîmbă C_3 dublă; b) o pînză riglată Σ.

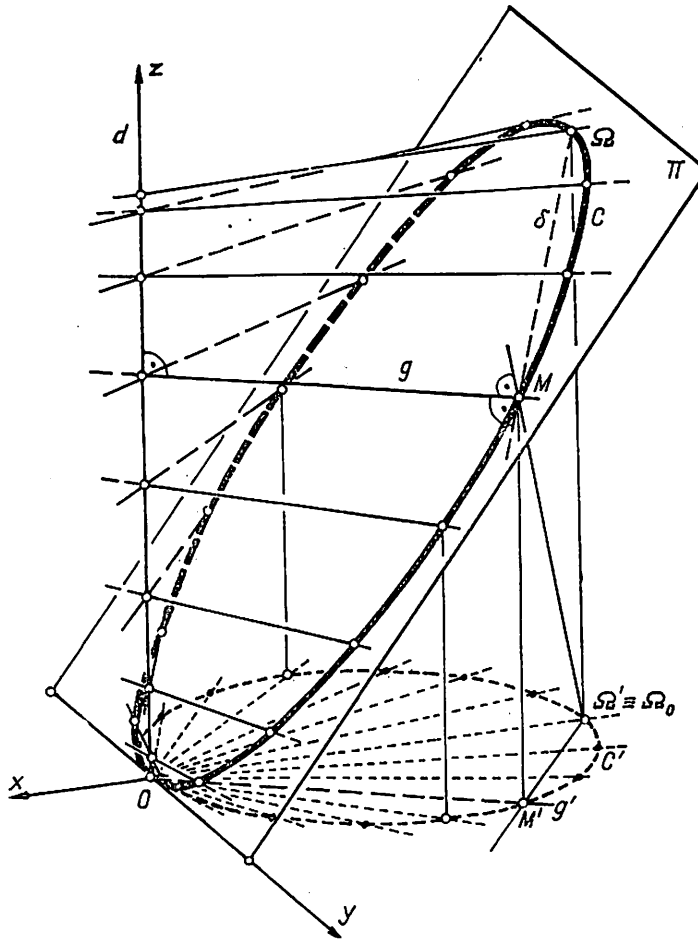


Fig. 26

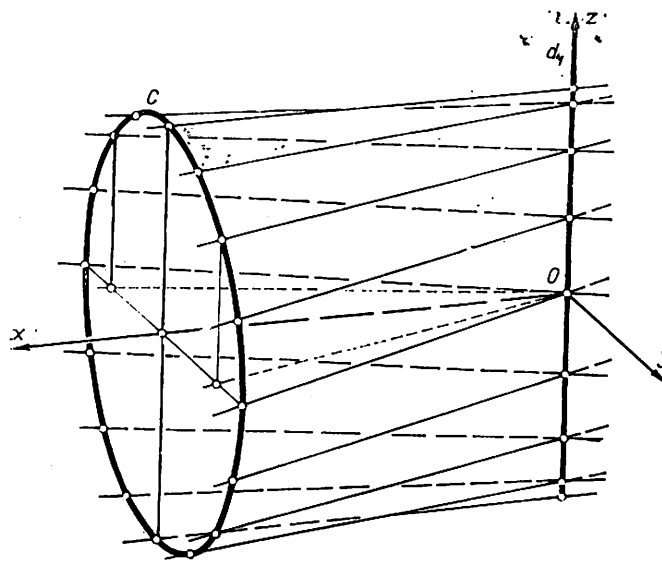


Fig. 27

2. PLAN TANGENT ŞI NORMALĂ

17 Să se determine punctele de pe suprafaţa $S: x = uv,\ y = u^2,\ z = 2u + v^2$ ale căror plane tangente trec prin dreapta $d: 2x - 5y = 0,\ 7y - z + 1 = 0$.

18 Fie suprafaţa $S: z^2 = a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + f(x^2 + y^2)$ cu $f \in C^1$. Normala în $P \in S$ taie planul Oxy în N; dacă P' e proiecţia lui P pe acelaşi plan, să se arate că aria triunghiului ONP' e constantă, oricare ar fi P pe suprafaţa S.

19 Fie suprafaţa S: a) $z = x^3 + y^3$ şi $P(\lambda, -\lambda, 0) \in S$; b) $z = \sin x - \cos y$ şi $P(\lambda, \pi/2 - \lambda, 0) \in S$. Să se arate că planele tangente în P, cînd λ variază, formează un fascicul.

20 Să se determine un punct P_0 de pe sfera $S(O; r)$, din primul octant, astfel încît planul tangent în acest punct să formeze cu planele coordonate un tetraedru de volum minim.

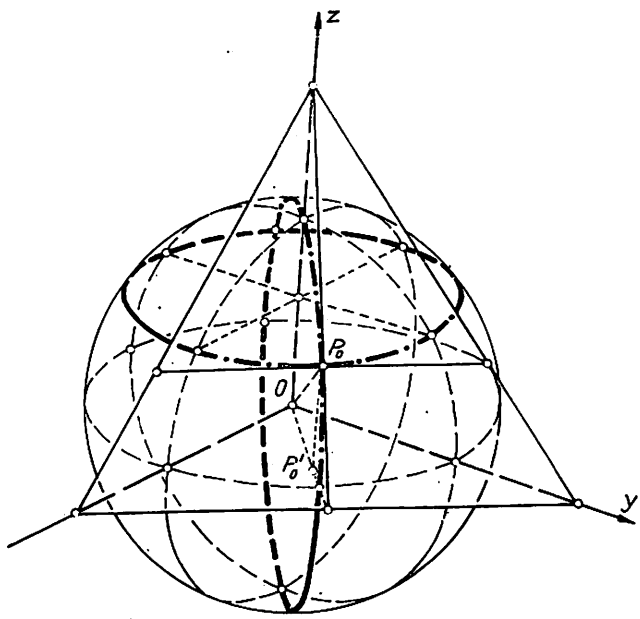


Fig. 28

R. $V = a^6/6xyz$ va fi minim cînd xyz va fi maxim; deci şi $x^2y^2z^2$ va fi maxim. Cum $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, rezultă $x = y = z$; $P_0(r/\sqrt{3},\ r/\sqrt{3},\ r/\sqrt{3})$, fig. 28.

21 Să se determine un punct al suprafeţei $S: z^3 - xz^2 - y + 1 = 0$ a cărui depărtare pînă la planul $\pi: x + y + 2z - 5 = 0$ să fie cea mai mică posibil.

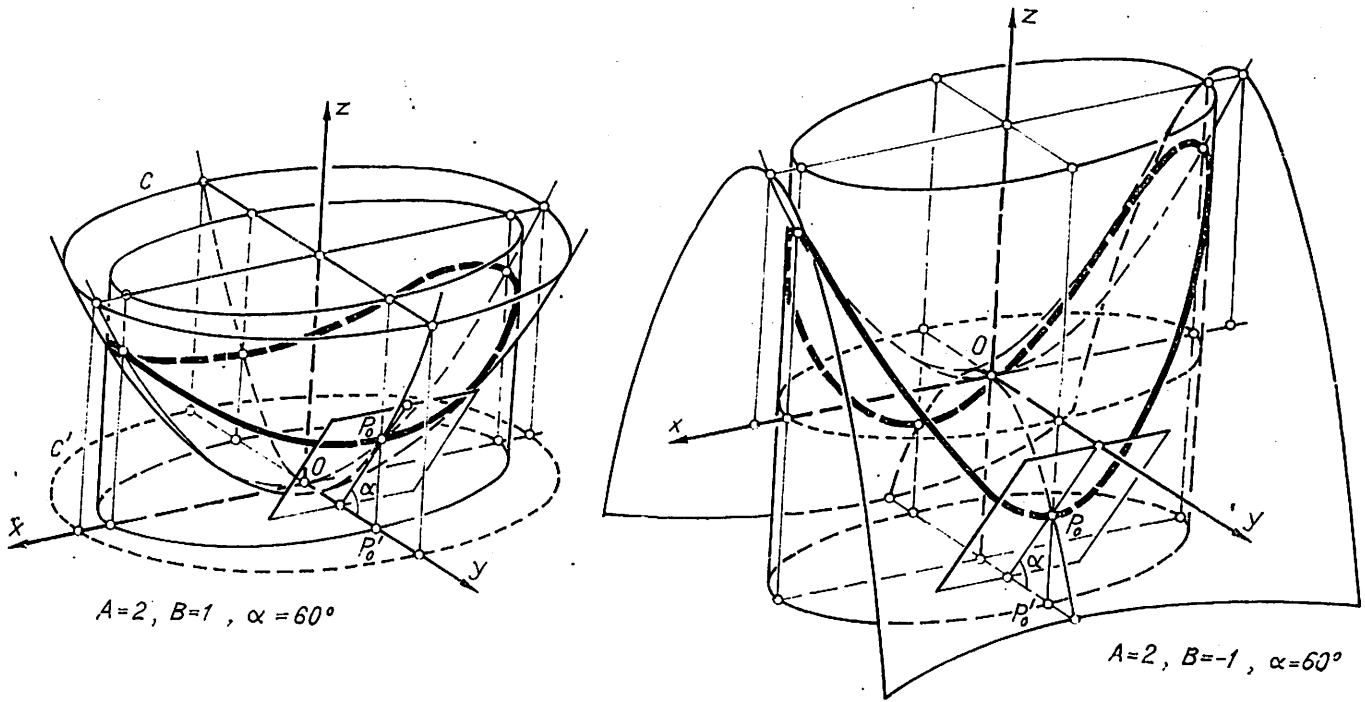


Fig. 29

22 Să se determine curba C situată pe paraboloidul

$$x^2/A + y^2/B = 2z$$

(23) sau $x = Au\cos v,\ y = Bu\sin v,\ z = \frac{u^2}{2}(A\cos^2 v + B\sin^2 v)$,

loc al punctelor de contact ale planelor tangente care fac cu planul Oxy un unghi dat α.

R. Unghiul a 2 plane e egal cu unghiul normalelor lor. Obținem C:

$$x^2/A + y^2/B = 2z,\ x^2/A^2 + y^2/B^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \quad \text{sau} \quad C: u = \pm\operatorname{tg}\alpha \text{ (fig. 29).}$$

23 Să se determine normala comună dintre: a) $S: x^2 + y^3 - xy^2 + 2z = 0$ și $\pi: x + z + 7 = 0$; b) $S: x + yz + z^3 - 3 = 0$ și $\pi: x + 2y + 11z - 13 = 0$.

24 Să se scrie ecuația planului tangent și ale normalei în punctul P_0 (1, 3, 4) al suprafeței $S: x = u,\ y = u^2 - 2v,\ z = u^3 - 3uv$. Să se determine punctele în care normala la S face un unghi de 45° cu axa Ox.

25 Să se arate că suma pătratelor segmentelor determinate pe axele de coordonate de planul tangent la suprafața $S: x = u^3\sin^3 v,\ y = u^3\cos^3 v,\ z = (a^2 - u^2)^{3/2}$ e constant.

26 Să se arate că planul tangent la suprafața $S: x = u\sin v,\ y = u\cos v,\ z = a\sin 2v$ o intersectează după o elipsă și o dreaptă.

27 Fie suprafața de rotație S de ecuații (6). Să se arate: a) Liniile coordonate de pe S sînt ortogonale. b) Planul tangent într-un punct P la S e perpendicular pe planul meridian ce trece prin P; să se determine cazurile cînd planul tangent: b_1) trece printr-un punct fix Ω din spațiu; b_2) rămîne paralel cu o direcție fixă. c) Normala în P la S intersectează axa de rotație într-un punct N; în ce caz N e un punct fix. *Apl.* Cînd S e torul (8): a) Să se arate că normala în P la S trece prin centrul cercului generator. b) Să se determine punctele de pe S ale căror normale: b_1) să fie perpendiculare pe planul (21); b_2) să treacă prin punctul dat $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

R. a) Vectorii tangentă, la paralelul $u = \text{const.}$: $\bar{l}_p(-\varphi\sin v,\ \varphi\cos v,\ 0)$ și la meridianul $v = \text{const.}$: $\bar{l}_m(\varphi'\cos v,\ \varphi'\sin v,\ \psi')$; $\bar{l}_p\cdot\bar{l}_m = 0$ (fig. 30). b) π_t: $\psi'(x\cos v + y\sin v) - \varphi' z + \psi\varphi' - \psi'\varphi = 0$, iar $\bar{N}_t(\psi'\cos v,\ \psi'\sin v,\ -\varphi')$; $\pi_m = Owz$ (trece prin P și Oz): $x\sin v - y\cos v = 0$, iar $\bar{N}_m(\sin v,\ -\cos v,\ 0)$; avem $\bar{N}_t\cdot\bar{N}_m = 0$. b_1) Fie $\Omega(a, b, c)\in R^3$. Din $\Omega\in\pi_t$, deducem $\psi'(a\cos v + b\sin v) - c\varphi' + \psi\varphi' - \psi'\varphi \equiv 0$, cînd $a\cos v + b\sin v = 0$ (pentru orice v), $-c\varphi' + \psi\varphi' - \psi'\varphi = 0$. Deci $a = b = 0$, adică Ω *e un punct fix de pe axa de rotație.* Scriind $(\psi/\varphi)' = c(1/\varphi)'$, obținem $\psi = k\varphi + c$, adică: S *e conul* $k^2(x^2 + y^2) - (z - c)^2 = 0$ *cu vîrful în* Ω (fig. 31). b_2) Fie $\bar{\Delta}(l, m, n)$ direcția fixă. Din $\bar{N}_t\cdot\bar{\Delta} = 0: l = m = 0,\ \varphi' = 0$; deci $\bar{\Delta} = \bar{k}$, iar $\varphi = r$ (const.) Rezultă: S *e cilindrul* $x^2 + y^2 = r^2$ cu generatoarele paralele cu Oz (fig. 32). c) Normala taie pe Oz în $N(0, 0, z)$ cu $z = (\varphi\varphi' + \psi\psi')/\psi'$. Dacă $z = c$ (const.), deci $N = \Omega$, atunci $\frac{d}{du}(\varphi^2 + \psi^2 - 2c\psi) = 0$; obținem $\psi = c \pm \sqrt{c^2 + k - \varphi^2}$. Rezultă: S *e sfera de centru* Ω *și rază* $r = \sqrt{c^2 + k}$ (fig. 33). *Apl.* a) $\bar{N} = r(a + r\cos u)(-\cos u\cos v\,\bar{i} - \cos u\sin v\,\bar{j} - \sin u\,\bar{k})$, în $P(u, v)$, trece prin centrul Ω ($a\cos v,\ a\sin v,\ 0$) al cercului generator din planul Owz (v. fig. 3). b_1) $P(u, v)$ cu $\operatorname{tg} u = \pm C/\sqrt{A^2 + B^2}$, $\operatorname{tg} V = B/A$ (fig. 34). b_2) $(a/\cos u + r) - x_0/\cos u\cos v = (a/\cos u + r) - y_0/\cos u\sin v = r - z_0/\sin u$; de unde rezultă: după cum $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ sau $= 0$, există un număr de puncte discrete, respectiv punctele curbei $u = \text{const.}$ cu $\operatorname{tg} u = -z_0/a$ (normalele fiind pe conul de vîrf P_0) (fig. 35).

28 Să se arate că proiecția pe planul Oxy a segmentului de normală la suprafața S : a) $z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} + b$; b) $x = a(v\cos u - f\cos u + f'\sin u)$, $y = a(v\sin u - f\sin u - f'\cos u)$, $z = a\,2v$ cu $f(u) \in C^2$, cuprins între piciorul normalei și planul Oxy, e constant.

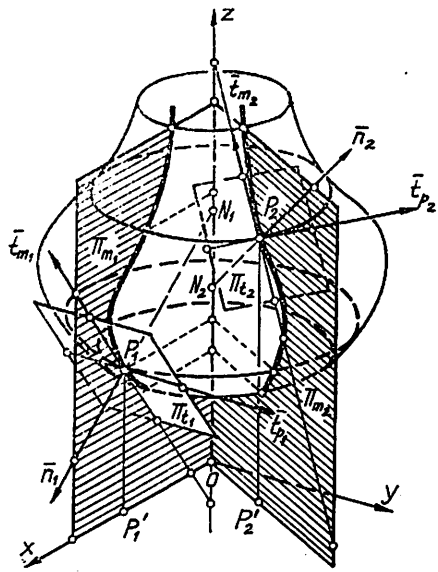


Fig. 30

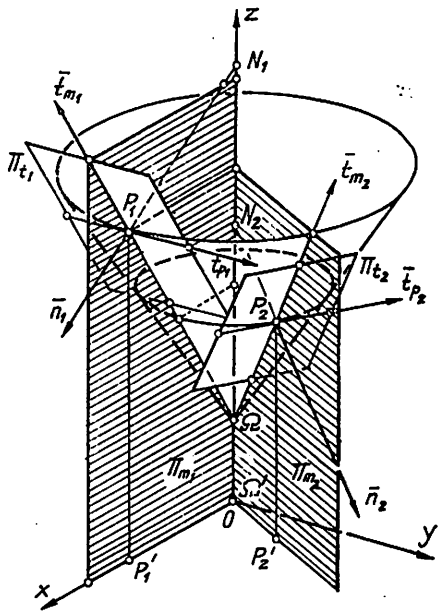


Fig. 31

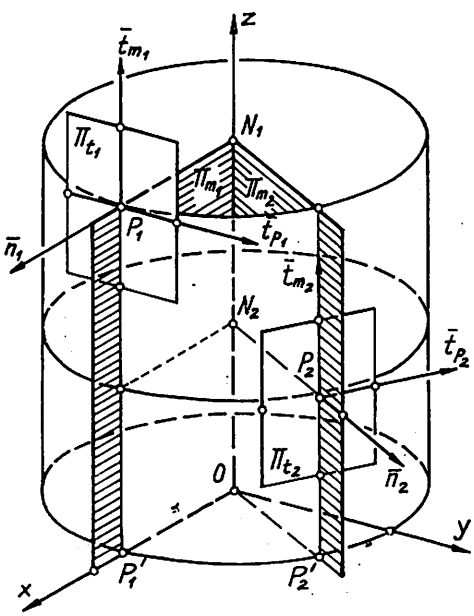


Fig. 32

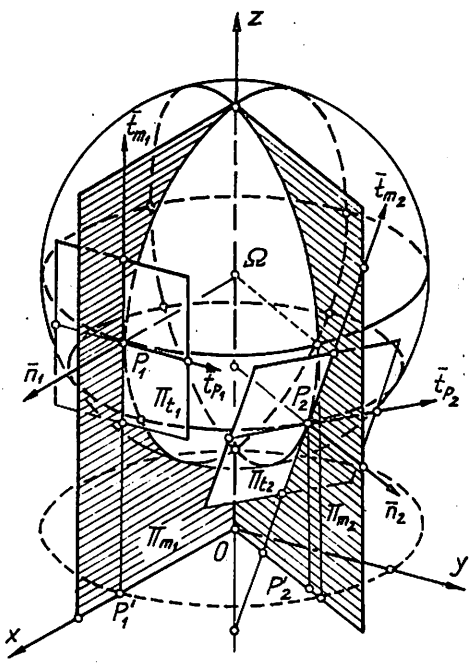


Fig. 33

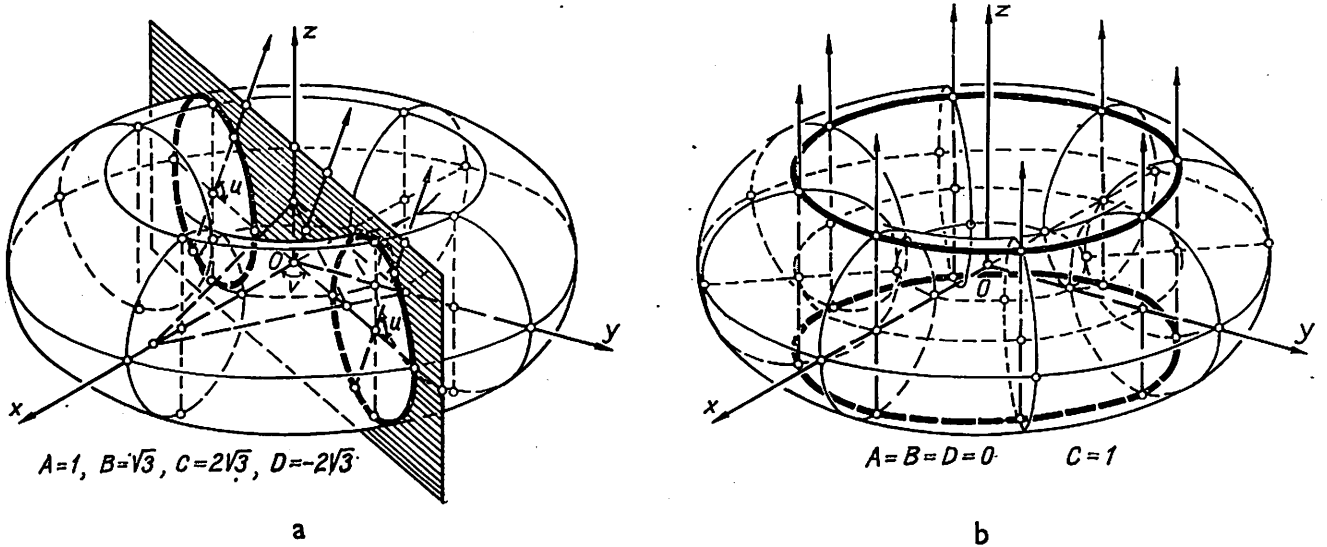


Fig. 34

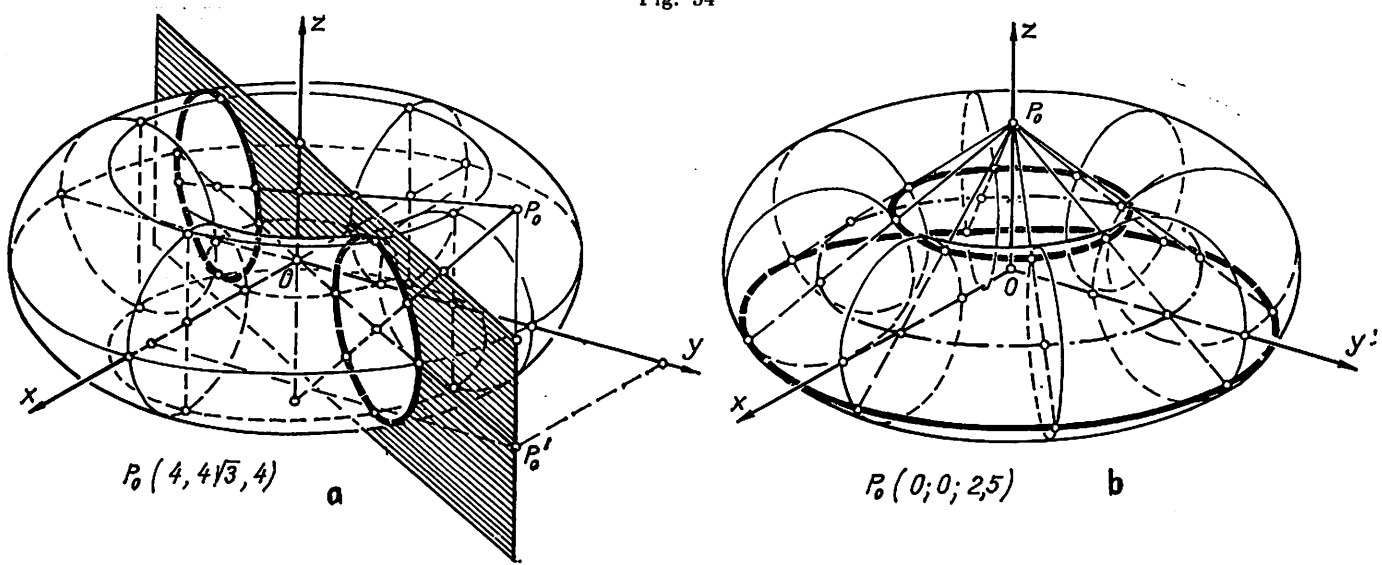


Fig. 35

29 Să se demonstreze că planele tangente la suprafaţa $S : z = xf(y/x)$ cu $f \in C^1$ trec printr-un punct fix.

30 Fie conoidul S de ecuaţie explicită (19''). Să se arate: a) Planul osculator π_0 al curbei $C : x^2 = f'(t)$, $y^2 = t^2 f'(t)$, $z = f(t)$, situată pe S, coincide cu planul tangent π_t al suprafeţei. b) Punctele de pe S ale căror normale formează un unghi constant cu axa Oz e un cilindru K cu generatoarele paralele cu Oz; K poate fi un cilindru de rotaţie?

R. a) π_t (în $P \in C$ la S) : $t\sqrt[3]{\varphi'}(x - \sqrt[3]{\varphi'}) + \sqrt[3]{\varphi'}(y - t\sqrt[3]{\varphi'}) + z - \varphi = 0$, $\pi_0 = (3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi''')\pi_t = 0$. b) În $P(x, y, z) \in S$, avem $\overline{N} = (y\varphi'/x^2)\bar{i} - (\varphi'/x)\bar{j} + \bar{k}$. Dacă $\theta = (\widehat{\overline{N}, \bar{k}})$, obţinem $K : (x^2 + y^2)\varphi'^2 = x^4 \operatorname{tg}^2 \theta$. K e de rotaţie dacă secţiunea plană prin Oxy e un cerc; ceea ce are loc dacă $\varphi'^2 = a^2 x^4 (x^2 + y^2)^m$, cînd avem $m = 0$ (nu convine, căci φ n-ar rezulta funcţie de y/x) sau $m = -2$. Obţinem o singură soluţie: $\varphi = a \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$, S fiind conoidul Kästner. *Obs.* K e de rotaţie $(x^2 + y^2)\varphi'^2 - x^4 \operatorname{tg}^2 \theta = \psi(x^2 + y^2 - a^2)$, cu condiţia iniţială $\psi(0) = 0$. Notînd $k = \operatorname{tg} \theta$, $y/x = u$, $x^2 + y^2 - a^2 = v$, ecuaţia diferenţială devine $\varphi_u'^2 = \psi(v)/(v + a^2) + k^2 (v + a^2)/(1 + u^2)^2$. Din $\dfrac{d}{dv}(\varphi_u'^2) = 0$, obţinem $\psi_v' - \psi/(v + a^2) + k^2(v + a^2)/(1 + u^2)^2$, admiţînd că $\psi(v) = -k^2 v(v + a^2)/(1 + u^2)^2$.

31 Fie suprafaţa $S : x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = u$. Se cere: a) Să se precizeze natura curbelor coordonate şi să se arate că sînt ortogonale. b) Să se afle punctele singulare ale suprafeţei.

32 Să se demonstreze că planul tangent într-un punct oarecare P al suprafeţei $S : x^n f(y/x) - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = 0$ determină pe Oz un segment OT care se află într-un raport constant cu raza vectoare OP.

33 Să se arate că dintr-un punct exterior unui con de gradul al doilea se pot duce, în general, patru normale la suprafaţă.

34 Se numeşte *suprafaţă Weddle* locul vîrfurilor celor ∞^1 conuri de ordinul al doilea care conţin 6 puncte date A_i $(i = 1, \ldots, 6)$ din spaţiu. Să se cerceteze dacă suprafaţa are puncte singulare şi să se determine cîte drepte se găsesc pe suprafaţă.

35 Să se arate că ecuaţia planului tangent la o suprafaţă e invariantă faţă de o schimbare a liniilor coordonate.

36 Fiind dată o curbă în spaţiu C prin ecuaţii implicite

$$C : F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \tag{24}$$

să se arate că ecuaţiile tangentei la C rămîn aceleaşi cînd schimbăm suprafeţele care o definesc.

37 Dacă normala în punctul curent al unei suprafeţe S trece printr-un punct fix, S e o sferă. *Apl.* S : $x = 2a(1 - u^2)v/(1 + u^2)(1 + v^2)$, $y = 4auv/(1 + u^2)(1 + v^2)$, $z = a(1 - v^2)/(1 + v^2)$ e o sferă.

38 Dacă normala în punctul curent al unei suprafeţe S păstrează direcţia fixă, S e un plan. *Apl.* S: a) $x = u^2 + v^2$, $y = uv$, $z = (u + v)^2$; b) $x = (u - v)^2$, $y = u^2 - 3v^2$, $z = (u - 2v)v/2$ e un plan.

39 Fie punctul $P_0(0, 0, 1)$ al suprafeţei $S : x = u + v^2$, $y = u^2 + 3v$, $z = uv + u + v + 1$. Să se afle: a) Ecuaţia planului tangent în P_0 la S.

b) Vectorul tangentă $d\bar{r}$ (du, dv) în P_0 la S care se află în planul $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

40 Planul tangent la o suprafață S, într-un punct P al ei, taie suprafața după o curbă C, care are în punctul de tangență P un punct dublu, $P \in S$ fiind un *punct eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic* după cum punctul dublu $P \in C$ e izolat, nodal sau cuspidal. *Apl.* a) O cuadrică reală, diferită de o

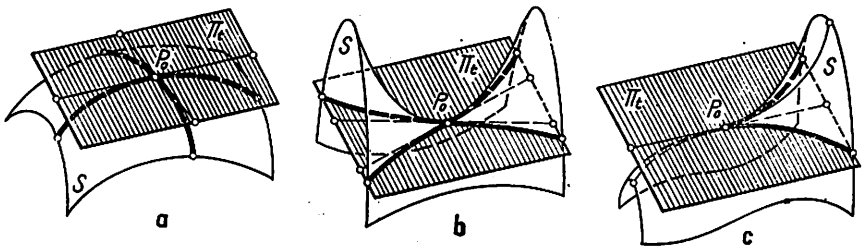


Fig. 36

pereche de plane, are puncte de aceeași natură. b) Ce fel de punct e originea O pentru suprafața $S : x^4 + 3x^2y + 2y^2 + z = 0$. c) Orice secțiune în S printr-un plan care trece printr-o tangentă a punctului dublu $P \in C$ e o curbă care are în P un punct staționar.

R. Cu $P = O$ și π_t (în P la S) $= Oxy$ (printr-o rototranslație), atunci $S : z + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots = 0$ (φ_t polinom omogen de grad t). Deci $C : \varphi_2(x, y, 0) + \varphi_3(x, y, 0) + \ldots = 0$, $z = 0$ e o curbă cu punct dublu în O (fig. 36). *Obs.* P poate fi punct multiplu de ordin m (pentru C). *Apl.* a) Ecuația unei cuadrice C tangentă în O la Oxy e de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0 \quad (a_{34} \neq 0), \tag{25}$$

cuadrica fiind nedegenerată sau degenerată după cum $A = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,a_{34}^2$ e $\neq 0$ sau $= 0$

Deci $C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$, $z = 0$ e constituită din 2 drepte (trecînd prin O), distincte sau confundate după cum $A \neq 0$ sau $A = 0$. Fie C_∞ conica de la infinit a cuadricei K nedegenerate, care e imaginară cînd K e un elipsoid sau un paraboloid eliptic și reală cînd K e un hiperboloid sau un paraboloid hiperbolic. π_t (în O la K) intersectează pe C_∞ în P'_∞ și P''_∞, deci OP'_∞ și OP''_∞ sînt, de aceeași natură cu C_∞. Deoarece $C = OP'_\infty . OP''_\infty$: *punctele unei cuadrice nedegenerate sînt de aceeași natură cu conica de la infinit a cuadricei.* b) π_t(în O)$= Oxy$; $C : x^4 + 3x^2y + y^2 = 0$, $z = 0$ are un punct cuspidal în O; deci $O \in S$ e un punct parabolic (fig. 37). c) O tangentă t (în O la C) e dată de $\varphi_2(x, y, 0) = 0$, $z = 0$. Intersecția lui t cu S e dată de $\varphi_2(x, y, 0) = 0$, $\varphi_3(x, y, 0) + \ldots = 0$, $z = 0$, care admite soluția $x = y = z = 0$, multiplă de ordin 3. Deci : *în P la S există 2 tangente care au (cel puțin) trei puncte confundate cu S în P: sînt tangentele în punctul dublu (multiplu) P la curba de intersecție cu planul tangent.*

41 Dacă într-un punct P al unei suprafețe S trece o dreaptă d care se găsește în întregime pe suprafață, atunci planul tangent în P la S conține această dreaptă.

42 Să se cerceteze dacă sfera și conoidul Plücker au puncte singulare.

43 Se numește *podara unei suprafețe S în raport cu un punct fix Ω*, numit *pol*, locul proiecțiilor ortogonale ale lui Ω pe planele tangente la S. Să se afle podara lui S în raport cu originea. *Apl.* Podara unei cuadrice cu polul în origine.

R. Fie S de ecuație (11) și $\Omega(x_0, y_0, z_0)$. Podara e dată de sistemul

$$\begin{gathered}(X - x)\,F_x + (Y - y)\,F_y + (Z - z)\,F_z = 0,\\ (X - x_0)/F_x = (Y - y_0)/F_y = (Z - z_0)/F_z,\ F(x, y, z) = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Cînd $\Omega = O$, obținem podara

(26') $X = F_x\Sigma\, xF_x/\Sigma F_x^2,\ Y = F_y\Sigma xF_x/\Sigma F_x^2,\ Z = F_z\Sigma xF_x/\Sigma F_x^2$ cu $F(x, y, z) = 0.$

În cazul cînd S e dată prin ecuațiile (13), podara se obține din

(26'') $A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,\ (X - x_0)/A = (Y - y_0)/B = (Z - z_0)/C$

cu $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = A\,\bar{i} + B\,\bar{j} + C\,\bar{k}$ și

(26''') $X = A\Sigma Ax/\Sigma A^2,\ Y = B\Sigma\, Ax/\Sigma A^2,\ Z = C\Sigma\, Ax/\Sigma A^2.$

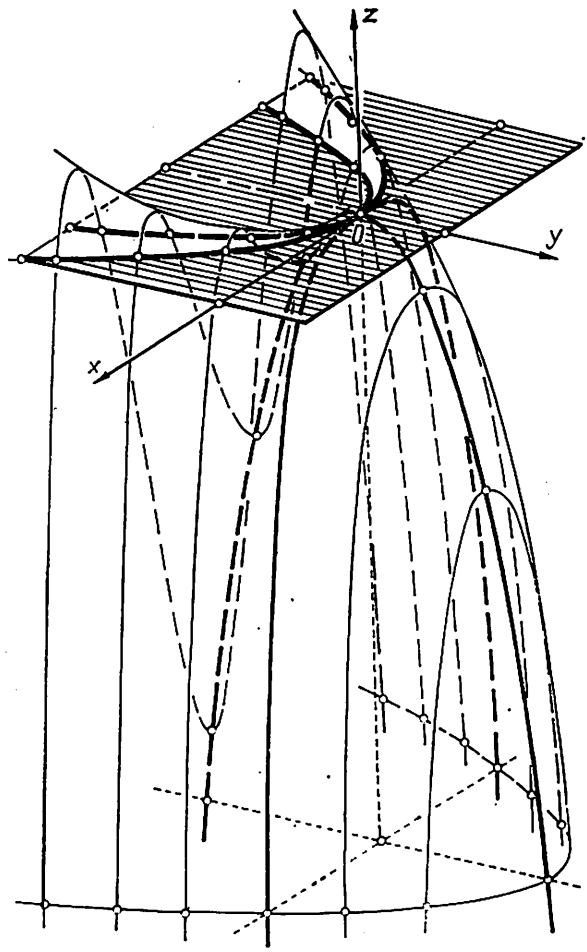


Fig. 37

Apl. Fie cuadrica

(27) $x^2/a + y^2/b + z^2/c - 1 = 0$ sau $x^2/a + y^2/b = 2z.$

Găsim $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 + by^2 + cz^2$, respectiv $2z(x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2$.

44 Se numește ***podoida*** unei suprafețe S în raport cu un punct fix Ω, numit ***pol***, locul simetricelor lui Ω în raport cu planele tangente la S; să se afle ecuațiile parametrice ale podoidei.

45 Să se afle locul punctelor de contact ale unei suprafeţe algebrice de grad n cu conul circumscris suprafeţei dintr-un punct fix.

R. Fie punctul fix $P'(x_i')$ şi un punct mobil $P(x_i)$. Dreapta

$$P'P : X_i = hx_i' + x_i \text{ sau (simplificat) } X = hP' + P \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{28}$$

intersectează suprafaţa algebrică (11) în n puncte (v. şi probl. 2), ale căror coordonată proiectivă h sînt rădăcinile ecuaţiei

$$F(X) = F(P) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{h}{\alpha!} F^{(\alpha)}(P; P') + h^n F(P'), \tag{28'}$$

unde $$F^{(\alpha)}(P; P') = \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} F_{x_i} x_i' \right)^{(\alpha)} \text{ iar } \frac{1}{\alpha!} F^{(\alpha)}(P; P') = \frac{1}{(n-\alpha)!} F^{(n-\alpha)}(P'; P).$$

Se numeşte *suprafaţă polară de ordin m*, asociată suprafeţei S şi punctului P', mulţimea punctelor P din spaţiul R^3 care satisfac ecuaţia

$$S_m : F^{(m)}(P; P') = 0, \text{ adică } F^{(n-m)}(P'; P) = 0, \tag{29}$$

care e o suprafaţă algebrică de grad $n - m$. Rezultă : *unei suprafeţe S şi unui punct fix P' îi se asociază $n - 1$ suprafeţe polare S_m ($m = 1, \ldots n - 1$), această asociere fiind invariantă faţă de grupul proiectiv din spaţiu*; adică, dacă S' şi S_m' sînt transformatele lui S şi S_m printr-o omografie, S_m' e suprafaţa polară de ordin m a lui S'. Cînd $m = n - 1$ şi $m = n - 2$, obţinem *planul polar*, respectiv, *cuadrica polară* a lui P' în raport cu S. Dacă $P \in S$, $P'P$ e tangentă dacă ecuaţia (28') admite rădăcina dublă $h_1 = h_2 = 0$. Deci : *curba de contact C a unei suprafeţe S cu conul circumscris din P' se găseşte pe suprafaţa polară S_1 de ordin 1*; căci

$$C : F^{(1)}(P; P') = 0, \; F(P) = 0, \text{ adică } F^{(n-1)}(P'; P) = 0, \; F(P) = 0.$$

Obs. Cuadrica polară a lui P' admite puncte singulare numai dacă P' aparţine suprafeţei algebrice de gradul 4 ($n - 2$), numită *hessiana lui S* :

$$H(X) = |F_{x_i x_j}| = 0. \; (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{30}$$

Locul punctelor singulare ale cuadricelor polare (adică al vîrfurilor conurilor polare), care corespund punctelor hessianei H, formează o suprafaţă algebrică numită *steineriana* lui S. Ecuaţia conului polar fiind $S_2 : \sum_{i,j} F_{x_i' x_j'} x_i x_j = 0$, ecuaţia steinerienei se obţine eliminînd pe x_i' din sistemul $\sum_i F_{x_i' x_j'} x_i = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), care dă vîrful conului. Mulţimea punctelor P', ale căror prime suprafeţe polare S_1 admit puncte duble, aparţine steinerienei.

46 Se numeşte *suprafaţă tetraedrală* o suprafaţă S pentru care planul tanget în P la S determină cu planele de coordonate un tetraedru al cărui volum e proporţional cu cel al tetraedrului format din origine şi din proiecţiile lui P pe axele de coordonate. Se cere : a) Ecuaţia

$$x^p y^q z^r - k = 0 \quad (p, q, r, k \text{ — constante}) \tag{31}$$

reprezintă o suprafaţă tetraedrală. b) Să se determine suprafaţa (31) de volum constant. În acest caz : b_1) Să se arate că curbele afine se găsesc pe o astfel de suprafaţă, tangenta într-un punct oarecare al uneia din curbe fiind conţinută de planul tangent în punctul corespunzător la S; b_2) Să se scrie ecuaţia planului tangent la S care să fie paralel cu planul (21); b_3) Să se determine locul punctelor de pe S astfel ca suma tăieturilor pe axele de coordonate ale planelor tangente să fie constantă; b_4) Să se găsească locul punctelor de pe S ale căror normale sînt paralele cu planul (21); b_5) Să se afle natura punctului $P_0(a, a, a) \in S$ şi ecuaţiile tangentelor în P_0 la S care

intersectează pe S în 3 puncte confundate; b_6) Să se arate că S intersectează ortogonal suprafața $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$ cu $f \in C^1$.

R. Planul tangent π_t în $P(x, y, z) \in (11)$ taie axele de coordonate în $P_1(xF_x + yF_y + zF_z/F_x, 0, 0), \ldots$; deci tetraedrul $OP_1P_2P_3$ are volumul

$$V = (xF_x + yF_y + zF_z)^3/6F_xF_yF_z. \tag{32}$$

a) Fie S de ecuație (31); $V = k^3(p + q + r)^3 xyz/6pqr$. b) Dacă $p = q = r$ și $k = a^3p$:

$$S: xyz = a^3 \text{ sau } x = u,\ y = v,\ z = a^3/uv \text{ (cu } V = 9a^3/2). \tag{31'}$$

b_1) Curbele afine (II, 54) se găsesc pe $S: xyz = ABC$. Tangenta la $C: X = At^a + aA\lambda t^{a-1}, \ldots$ e conținută de π_t (la S): $BCt^{b+c}(X - At^a) + \ldots = 0$; căci $BCt^{b+c}(aA\lambda^{a-1}) + \ldots = \lambda ABC(a + b + c)/t = 0$. b_2) Pentru ca $\pi_t \parallel$ plan (21), trebuie ca $yz/A = xz/B = xy/C = k$; de unde $x = a^3/kA, \ldots$ iar din verificarea ecuației (31'): $k = a^2/\sqrt[3]{ABC}$. Deci $\pi_t: AX + BY + CZ - 3a\sqrt[3]{ABC} = 0$. b_3) $\pi_t: X/x + Y/y + Z/z - 3 = 0$; locul $3x + 3y + 3z = k$, $xyz = a^3$. b_4) $A/x + B/y + C/z = 0$, $xyz = a^3$. b_5) $S \cap \pi_t$ (în P_0) $= C: xyz = a^3$, $x + y + z - 3a = 0$. Proiecția lui C pe Oxy: $xy(x + y - 3a) = a^3$, $z = 0$ are un punct dublu izolat în $P_0'(a, a, 0)$ cu tangentele $(x - a)^2 + (x - a)(y - a) + (y - a)^2 = 0$, $z = 0$. Deci $P_0 \in S$ e punct eliptic. Tangenta fiind un element proiectiv, tangentele în P_0 la C sînt date de intersecția lui π_t (în P_0 la S) cu cilindrul $(x - a)^2 + (x - a) + (y - a)(y - a)^2 = 0$. b_6) Parametrii directori ai normalelor sînt $p = -z/x$, $q = -z/y$, -1 și $p' = x(1 + f')/2z$, $q' = y(1 - f')/2z$, -1, iar $pp' + qq' + 1 = 0$.

47 Se numesc *suprafețe de curent* ale unui cîmp de vectori $\bar{V}(X, Y, Z)$ suprafețele S care au proprietatea că, în fiecare punct al lor, planul tangent la S conține vectorul de cîmp corespunzător. Se cer ecuațiile lor. *Apl.* Să se determine suprafața de curent a cîmpului de vectori $\bar{V}(-2x, y, z)$ care conține curba $C: y = a,\ xz = a^2$.

R. Fie suprafața S dată prin ecuația explicită

$$z = z(x, y). \tag{32}$$

Funcția $z(x, y)$ satisfăcînd ecuația cu derivate parțiale neomogenă

$$X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z, \tag{33}$$

suprafețele de curent sînt date de soluția generală

$$F(C_1, C_2) = 0, \tag{33'}$$

unde $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ și $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ sînt două integrale prime distincte ale sistemului caracteristic asociat

$$dx/X = dy/Y = dz/Z. \tag{33''}$$

Obs. Printr-o curbă C din spațiu trece o singură suprafață de curent, dacă C nu e curbă de curent (problema Cauchy): e dată de soluția particulară prin eliminarea lui x, y, z între ecuațiile lui C și integralele prime. *Apl.* Sistemul (33''): $-dx/2x = dy/y = dz/z$ admite integralele prime $xy^2 = C_1$, $z/y = C_2$. Soluția particulară fiind $C_1C_2 = a^3$, S are ecuația (31').

48 O *suprafață riglată* e generată de o dreaptă variabilă care se sprijină pe trei curbe (linii) directoare C_i $(i = 1, 2, 3)$. Ce cere: a) Să se arate că suprafața riglată S e suprafața generată de o riglată (o dreaptă variabilă care depinde de un parametru; v. probl. II, 154). b) Să se arate că planul tangent la S variază cînd punctul de tangență se deplasează de-a lungul unei generatoare g, formînd un fascicul; în cazul cînd planul tangent nu variază, acea generatoare se zice *staționară*. c) Paralelele cu generatoarele lui S duse prin originea axelor generează un con, numit *conul director* (sin.: *con asimptot*)

al lui S. d) Să se arate că planul tangent în punctul de la infinit al lui g, numit *planul asimptot* al lui g, e planul care trece prin $P \in g$ al lui S și e paralel cu planul tangent la conul director de-a lungul generatoarei acestuia paralelă cu g. e) Planul care trece prin g și e perpendicular pe planul asimptot al lui g se numește *plan central* al lui g, iar punctul său de tangență cu S — *punctul central* al lui g; să se găsească expresia vectorului de poziție al punctului central al lui g. f) Să se arate că locul punctelor centrale e o curbă pe S, numită *linie de strictiune*. g) Să se demonstreze că planul tangent în $P \in g$ face cu planul central al lui g un unghi θ, a cărei tangentă trigonometrică e proporțională cu abscisa punctului de contact (față de planul central); funcția de proporționalitate se numește *parametrul de distribuție* al lui g (*teorema Chasles*). *Apl.* a) Ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}_0(\xi) + \eta \bar{a}(\xi) \text{ cu } \xi = \xi(u, v),\ \eta = \eta(u, v)$$

reprezintă o suprafață riglată. Să se arate că suprafețele $S_1 : x = a(uv + 1)/(u + v),\ y = b(u - v)/(u + v),\ z = c(uv - 1)/(u + v)$ și $S_2 : x = a(1 + u^2 - v^2)/(u + v),\ y = b(1 - u^2 + v^2)/(u + v),\ z = 2(u - v)/(u + v)$ sînt dublu riglate; în care cazuri: a_1) S_1 și S_2 n-au generatoare staționare; a_2) să se afle conul asimptot; a_3) să se găsească linia de strictiune de-a lungul unei familii de generatoare; ce se întîmplă dacă suprafața e de rotație? a_4) să se determine parametrii de distribuție ai generatoarelor care trec printr-un punct dat; cînd punctul e într-un plan de coordonate, suma acestor parametri e nulă. b) Fie suprafața $S : x = u(1 + v),\ y = u^2 + (u + 1)v,\ z = u^3 + (u - 1)v$. Se cere: b_1) să se determine planul asimptot și punctul central al lui $g : u = 0$; b_2) să i se găsească linia de strictiune. c) Să se afle linia de strictiune a suprafeței S generată de: c_1) normalele principale sau c_2) binormalele unei curbe în spațiu C. d) Să se găsească generatoarele staționare (scrise cartezian) ale suprafeței S: $x^3z = y^2x + y^3(x - 1)$. e) Dacă S e cu plan director, proiecțiile generatoarelor pe acest plan au ca înfășurătoare proiecția liniei de strictiune f). Dacă S și S' au o generatoare g comună, atunci au — în general — 2 plane tangente comune de-a lungul lui g. Ce se întîmplă dacă au: f_1) 3 asemenea plane; f_2) un plan director comun sau același con director? g) Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca generatoarele a 2 suprafețe S și S_1, care au aceeași linie de strictiune și nu-s tangente de-a lungul ei, să se taie sub un unghi constant. h) Să se arate că $S : (x - y)^2(x + y) = 8z^2$ e riglată; să i se afle linia de strictiune.

R. Dacă g e tangentă unei suprafețe Σ date, se spune că *suprafața riglată* S e *cu simbure*; o curbă directoare e obținută ca locul punctelor de tangență ale lui g la Σ (fig. 38). Dacă S e generată de drepte paralele la o suprafață riglată Σ dată, se spune că *suprafața riglată* S e *cu suprafață directoare* Σ. Cînd una din liniile directoare e o dreaptă, fie $C_3 = d$, S se numește *cilindroid* (sin.: *cilindroid general, suprafață cilindroidă*; fig. 39); dacă d e în planul impropriu, *cilindroidul* e *cu plan director* (S e generată de o dreaptă d ce se sprijină pe 2 curbe directoare C_1 și C_2, fiind paralelă cu un plan; fig. 40). *Obs.* Cînd C_1 și C_2 sînt cercuri paralele și de raze egale, iar d e perpendiculară pe planele lor și trece prin mijlocul distanței dintre centrele cercurilor, cilindroidul se numește *pasaj strîmb* (sin.: *suprafața „biais passé"*; fig. 41). Dacă 2 din liniile directoare sînt *drepte* concurente, S e un *con* (sin.: *suprafață conică*; fig. 42) sau cilindru (sin.: suprafață cilindrică; fig. 43), după cum punctul de intersecție al dreptelor e la distanță finită sau la infinit*. Dacă 2 din liniile directoare sînt drepte strîmbe, S e un *conoid*; cînd una din dreptele directoare e în planul impropriu, atunci *conoidul* e *cu plan director* (v.probl. 15). *Obs.* Suprafețele riglate cu plan director se mai numesc *suprafețe Catalan*. a) Fie $C_i : F_i(x, y, z) = 0,\ G_i(x, y, z) = 0$

* Mai precis, S e degenerată într-un con sau cilindru și un număr de plane.

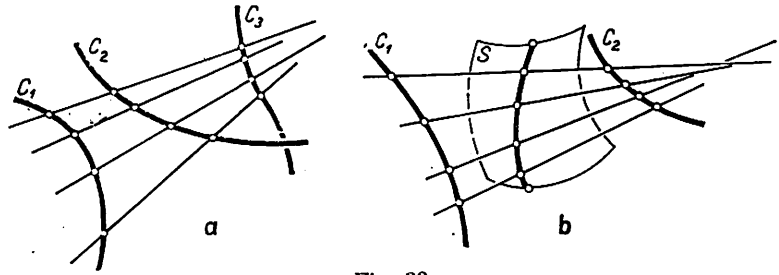


Fig. 38

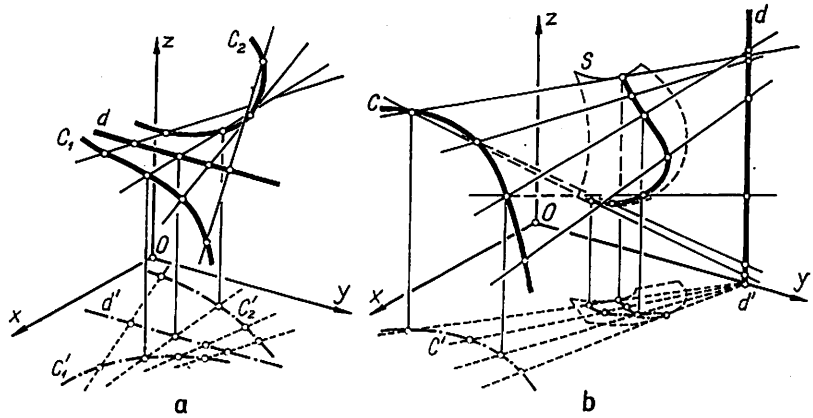


Fig. 39

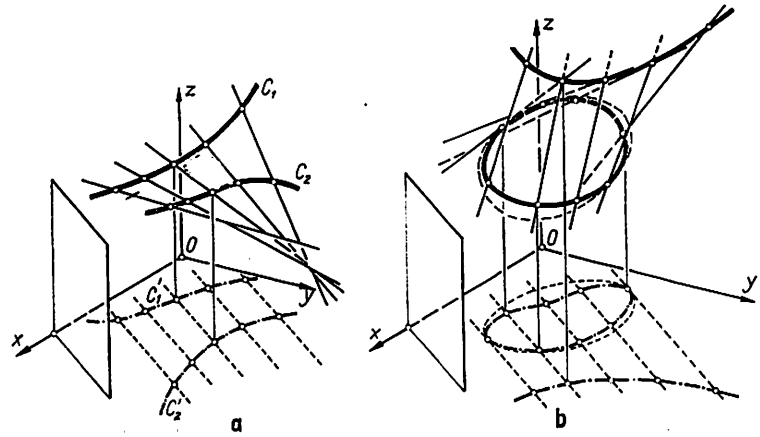


Fig. 40

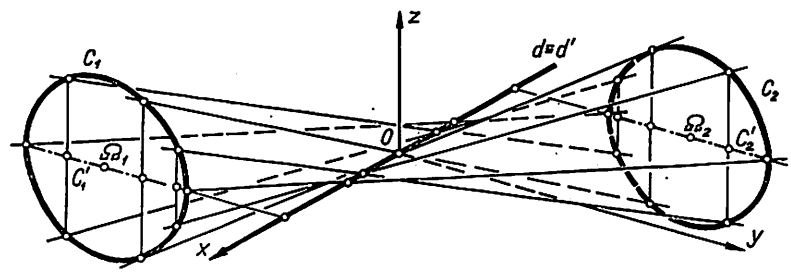


Fig. 41

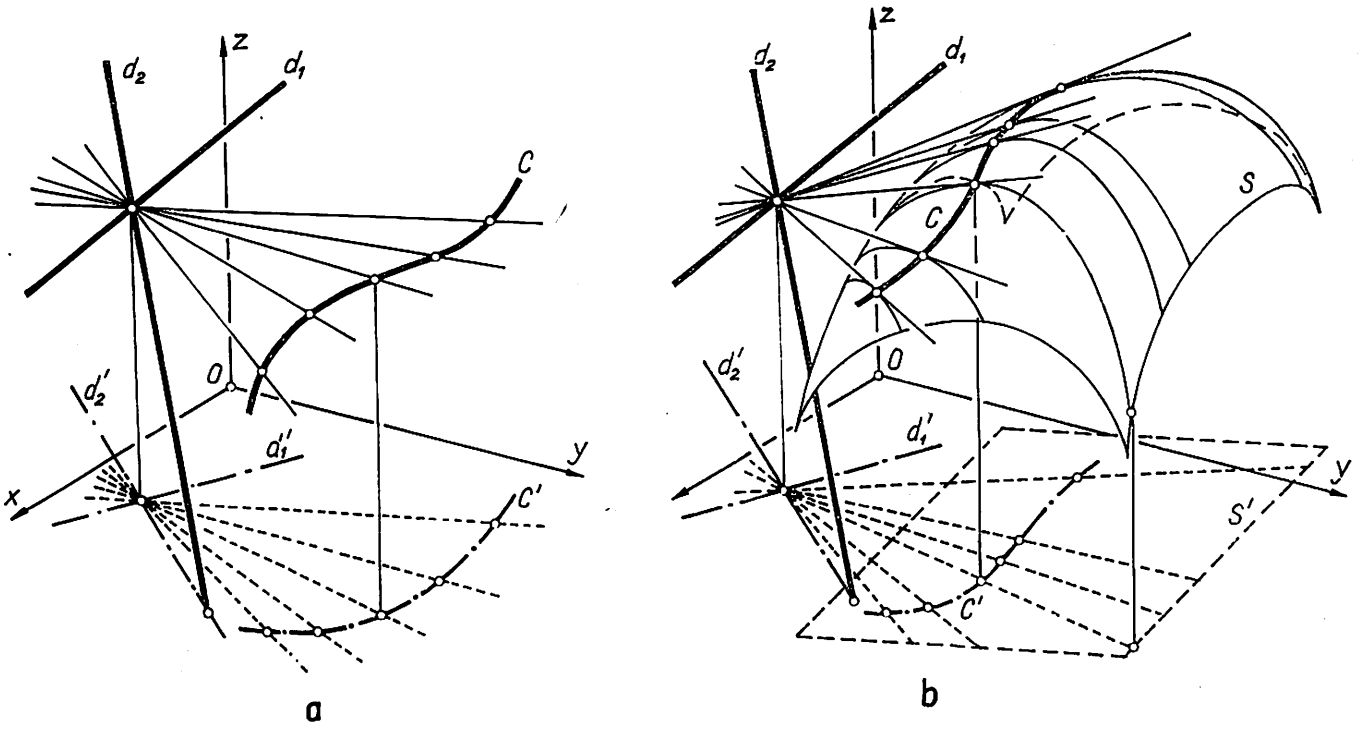


Fig. 42

și g de ecuații (1) cu p, q, a, b funcții de u, v. Însă g se sprijină pe C_i dacă sistemul $F_i(pz + a, qz + b, z) = 0$, $G_i(pz + a, qz + b, z) = 0$ e compatibil, condiția de compatibilitate fiind $\Phi(u, v) = 0$ sau $v = v(u)$, cînd g constituie o riglată (v. probl. II, 154). Deci, cum g trece orin P_0, care descrie *directoarea* (lui S) $C_0 : \bar{r} = \bar{r}_0(u)$ și are direcția dată de *vectorul director* $\bar{a}(u)$ depinzînd de parametrul u al lui C_0, obținem că S are ecuația

(34) $$S : \bar{r} = \bar{r}_0(u) + v\,\bar{a}(u);$$

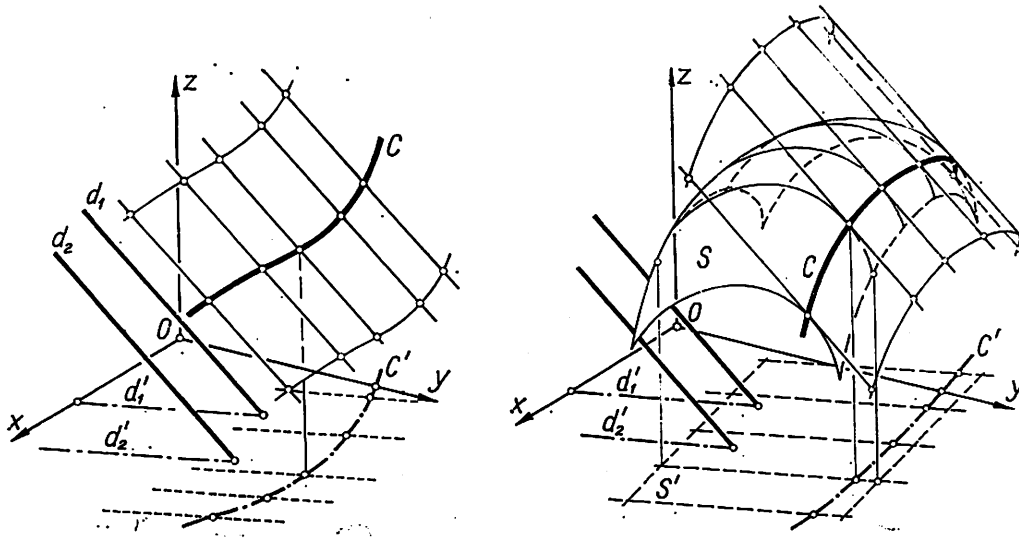


Fig. 43

curbele $g : u = \text{const.}$ sînt *generatoarele* (*rectilinii*) ale lui S. b) Căci planul tangent al suprafeței (34) e

(34') $$\pi_t : (\overline{R} - \bar{r}_0\ \bar{r}_0' + v\bar{a}'\ \bar{a}) = 0 \text{ sau } \pi_0 + v\pi_a : (\overline{R} - \bar{r}_0\ \bar{r}_0'\ \bar{a}) + v\,(\overline{R} - \bar{r}_0\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 0,$$

unde $\pi_0 : (\overline{R} - \bar{r}_0\,\bar{r}_0'\,\bar{a}) = 0$ e planul tangent în $P_0 \in C_0$, iar $\pi_a : (\overline{R} - \bar{r}_0\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 0$ e planul asimptot al lui g. Normala (în P la S) $\overline{N} = \bar{r}_0' \times \bar{a} + v(\bar{a}' \times \bar{a})$ păstrează o direcție fixă ($\overline{N}$ nu depinde de v), cînd P descrie pe g:

(34'') $$(\bar{r}_0'\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 0;$$

e condiție necesară ca g să fie staționară. Dacă (34'') e valabilă pentru orice g a lui S, obținem condiția necesară și suficientă ca S să fie o *suprafață desfășurabilă*; atunci S e generată de o *desfășurabilă* (v. probl. II, 154), reducîndu-se la un *con*: $\bar{r}_0' = 0$, un *cilindru*: $\bar{a}' = 0$ sau un *tors* (suprafața născută de tangentele la o curbă strîmbă): $\bar{a} = \lambda\bar{r}_0'$. c) Ecuația conului director:

(35) $$K : \bar{r} = v\bar{a}.$$

K se intersectează la infinit cu S după o curbă C_∞. În particular: dacă S e un con, K e egal cu S (confundîndu-se cu S dacă vîrful lui S e O); dacă S e un cilindru, K se reduce la o dreaptă dusă prin O paralelă cu generatoarele lui S. Dacă K se reduce la un plan (generatoarele rămîn paralele cu un plan), cînd

(34''') $$(\bar{a}\ \bar{a}'\ \bar{a}'') = 0,$$

S e cu plan director; (34''') e condiția necesară și suficientă ca S să fie o suprafață Catalan. Dacă în (34) avem $\bar{r}_0 = \bar{a}_0 + u\bar{a}_1$ și $\bar{a} = \bar{a}_2 + u\bar{a}_3$, S e o cuadrică sau un plan, după cum $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ (constanți) nu sînt sau sînt coplanari. În primul caz, S e *dublu riglată*, fiind un paraboloid hiperbolic, cu planele vectorilor $\bar{a}_1, \bar{a}_3$ și $\bar{a}_2, \bar{a}_3$ ca plane directoare (paralele cu planele asimptote la $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$); *paraboloidul* e *echilater* dacă planele directoare sînt perpendiculare.

Obs. Normalele lui S de-a lungul unei generatoare nestaționare formează un paraboloid echilater; căci normala în $P \in g$: $\overline{R} = \bar{r}_0 + v\bar{a} + \lambda[\bar{r}_0' \times \bar{a}' + v(\bar{a}' \times \bar{a})]$ cu $u = \text{const.}$ d) Fie $g^* \| g$ și π_t^* (în $P^* \in g^*$ la K): $(\overline{R} - v\bar{a}\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 0$, adică $(\overline{R}\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 0$; deci $\pi_t^* \| \pi_a$. e) Fie $P_c(v_c) \in g$ punctul central al lui g. Însă $\overline{N}_a = \bar{a}' \times \bar{a}$, $\overline{N}_c = (\bar{r}_0' + v_c\bar{a}') \times \bar{a}$ și $\overline{N}_a \cdot \overline{N}_c = 0$; de unde obținem

$$v_c = -(\bar{r}_0' \times \bar{a}) \cdot (\bar{a}' \times \bar{a})/(\bar{a}' \times \bar{a})^2. \tag{36}$$

Obs. P_c, dacă S e nedesfășurabilă, e limita picioruluí perpendicularei comune lui g și g_1 (vecine). Căci, deoarece $\bar{a}(v) \cdot \overline{PP_1} = 0$, $\bar{a}(v_1) \cdot \overline{PP_1} = 0$, avem $\overline{PP_1}/(v_1 - v) = [\bar{r}_0(v_1) - \bar{r}_0(v) + (u_1 - u)\bar{a}(v_1) + u(\bar{a}(v_1) - \bar{a}(v))]/(v_1 - v)$. Notînd $(u_1 - u)/(v_1 - v) \to \tilde{u}$, $u \to u_c$ cînd $v_1 \to v$ și înmulțind scalar egalitatea cu $\bar{a}(v)$ și $[\bar{a}(v_1) - \bar{a}(v)]/(v_1 - v)$, la limită obținem sistemul $\bar{a} \cdot \bar{r}_0' + \tilde{u} \cdot \bar{a}^2 + u_c\bar{a} \cdot \bar{a}' = 0$, $\bar{a}' \cdot \bar{r}_0' + \tilde{u}\bar{a} \cdot \bar{a}' + u_c\bar{a}'^2 = 0$ cu soluția (36). f) Locul lui $P_c\ (u, v_c)$ e *linia de strictiune*

$$\Gamma : \bar{r} = \bar{r}_0 + v_c\bar{a} \text{ sau } \bar{r} = \bar{r}_0^* + v^*\bar{a}(\bar{r}_0^* = \bar{r}_0 + v_c\bar{a},\ v^* = v - v_c) \tag{36'}$$

alegînd pe Γ drept C_0 a lui S; cînd $\Gamma \equiv C_0$, considerînd $\bar{a}^2 = 1$, rezultă $\bar{r}_0' \cdot \bar{a}' = 0$, g) Dacă $\Gamma \equiv C_0$ (deci $\bar{r}_0 = \bar{r}_c$, $v_c = 0$), din (36) rezultă $\overline{N}_c = \bar{r}_0' \times \bar{a}' \perp \bar{a}' \times \bar{a}$, încît $|(\bar{r}_0' \times \bar{a}) \times (\bar{a}' \times \bar{a})| = |\bar{r}_0' \times \bar{a}||\bar{a}' \times \bar{a}| = |(\bar{r}_0'\ \bar{a}'\ \bar{a})\bar{a}|$. Fie $\theta = (\overline{N}_c, \overline{N})$ și $t = v|\bar{a}|$ abscisa lui P pe g față de P_c; *legea lui Chasles:*

$$\operatorname{tg}\theta = t/p \text{ cu } p = |\bar{a}||\bar{r}_0' \times \bar{a}'|/|\bar{a} \times \bar{a}'| = \bar{a}^2|(\bar{r}_0'\ \bar{a}'\ \bar{a})|/(\bar{a}' \times \bar{a})^2. \tag{37}$$

Deci: *cînd P descrie pe g, planul tangent în P la S se rotește în jurul lui g cu $180°$.* *Obs.* g_1) Ultima expresie a *parametrului de distribuție* p e valabilă și în cazul general (cînd Γ nu e C_0), fiind invariant față de reprezentarea analitică a lui g; căci $\overline{N}_c \times \overline{N} = (v_c - v) \cdot (\bar{r}_0' \times \bar{a}) \times (\bar{a}' \times \bar{a})$, $\overline{N}_c \cdot \overline{N} = (\bar{r}_0' \times \bar{a}) \times (\bar{a}' \times \bar{a})/(\bar{a}' \times \bar{a}))^2$, încît obținem (37) cu $t = (v_c - v)|\bar{a}| = P_cP$. g_2) Avem $p = \lim_{v_1 \to v} \overline{PP_1}/\varepsilon$ cu $\varepsilon = \widehat{(g, g_1)}$.

Apl. a) g: $\xi(u, v) = \text{const.}$ sînt drepte. Pentru S_1: $\xi = u$, $\eta = 1/(u + v)$ sau $\xi = v$, $\eta = 1/(u + v)$; S_1 e un *hiperboloid cu o pînză*, admițînd *reprezentarea canonică*

$$x = a(\xi + \eta(1 - \xi^2)),\ y = \varepsilon b(-1 + 2\eta\xi),\ z = c(\xi - \eta(1 + \xi^2)) \tag{38}$$

cu $\varepsilon = \pm 1$ după cum $\xi = u$ sau $\xi = v$. Pentru S_2: $\xi = 1/(u + v)$, $\eta = u - v$ sau $\xi = u - v$, $\eta = 1/(u + v)$, generatoarele fiind $u + v = \text{const.}$ și $u - v = \text{const.}$; S_2 e un *paraboloid hiperbolic* și admite *reprezentarea canonică*

$$x = a(u + v),\ y = b(u - v),\ z = 2uv \text{ cu } u = \text{const. și } v = \text{const. generatoare.} \tag{39}$$

a_1) Pentru S_1: $(\bar{r}_0'\ \bar{a}'\ \bar{a}) = -4\varepsilon abc$, iar pentru S_2: $(\bar{r}_0'\ \bar{a}'\ \bar{a}) = 4ab$. a_2) $K_1 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$; K_2: $bx + ay = 0$. a_3) Pentru S_1: $\eta_c = \xi(b^2c^2(\xi^2 - 1) + 2a^2c^2 + a^2b^2(\xi^2 + 1))/\lambda$ și Γ_1: $x = 2a^3(b^2 + c^2)\xi(\xi^2 + 1)/\lambda$, $y = -\varepsilon b^3(a^2 + c^2)(1 - \xi^4)/\lambda$, $z = 2c^3(a^2 - b^2)\xi(1 - \xi^2)/\lambda$ cu $\lambda = b^2c^2(\xi^2 - 1)^2 + 4a^2c^2\xi^2 + a^2b^2(\xi^2 + 1)^2$; cele 2 linii de strictiune sînt simetrice față de Oxz și au 2 puncte comune pentru $\xi = +1$. Cînd S_1 e de rotație ($a = b$), cele două curbe Γ_1 se confundă cu cercul colier al lui S_1. Pentru S_2: $v_c = u(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ și $\Gamma_1(u)$: $x = 2a^3u/(a^2 + b^2)$, $y = 2b^3u/(a^2 + b^2)$, $z = 2(a^2 - b^2)u^2/(a^2 + b^2)$ de-a lungul lui $u = \text{const}$; Γ_1 e plană și, cînd $a = b$, e g: $x - y = 0$, $z = 0$. $\Gamma_1(v)$ e simetrica lui $\Gamma_1(u)$ față de Oxz. a_4) Pentru S_1: $p = -\varepsilon abc(a^2(\xi^2 - 1)^2 + 4b^2\xi^2 + c^2(\xi^2 + 1)^2)/\lambda$; $p_u + p_v$ se divide cu $(u^2 - v^2)(1 - u^2v^2)$. Pentru S_2: $p_u = ab(a^2 + b^2 + 4u^2)/(a^2 + b^2)$, $p_v = ab(a^2 + b^2 + 4v^2)/(a^2 + b^2)$; $p_u + p_v = 4ab(u^2 - v^2)/(a^2 + b^2)$ și e nulă numai pentru punctele a 2 din planele coordonate. b) S are 2 puncte singulare: $P_i(u_i, v_i)$ date de $3u^2 + 2u - 2 = 0$, $3v + 7u - 1 = 0$, obținem din condiția rang $\left\| \begin{matrix} \bar{r}_u \\ \bar{r}_v \end{matrix} \right\| = 1$. b_1) π_a: $-2x + y + z = u^3 + u^2 - 2u$, S fiind cu plan director; deci pentru g_0: $u = 0$ obținem π_a: $-2x + y + z = 0$. Cum $v_c = -(9u^3 + 4u + 2)/6$, rezultă că g_0 are $P_c(0, -1/3, 1/3)$. b_2) $x = -u(9u^3 + 4u - 4)/6$, $y = -(9u^4 + 9u^3 - 2u^2 + 6u + 2)/6$, $z = -(9u^4 - 15u^3 + 4u^2 - 2u - 2)/6$. c) Fie C: $\bar{r} = \bar{r}(s)$. c_1) S: $\overline{R} = \bar{r} + v\bar{n}$; cum $v_c = p\tau^2/(\rho^2 + \tau^2)$, obținem Γ: $\overline{R} = \bar{r} + v_c\bar{n}$, iar $p = \rho^2\tau/(\rho^2 + \tau^2)$ și Γ nu poate fi curba însăși. c_2) S: $\overline{R} = \bar{r} + v\bar{b}$; deci $v_c = 0$, $p = \tau$ și Γ e curba însăși. d) $x = 1 + uv$, $y = u + u^2v$, $z = u^2 + u^4v$. Condiția (34″) dă $u = 2/3$, adică $(x - 1)/27 = (y - 2/3)/18 = (z - 4/9)/8$. e) Fie g și g' două generatoare vecine. Proiecția lor pe

planul director se taie pe P^* (proiecția comună a picioarelor P și P' ale perpendicularei comune a lui g și g'). Deci P^* e punctul caracteristic al proiecției lui g și, în același timp, punctul curent al proiecției liniei de strictiune. *Obs.* Analitic, se ia planul director ca Oxy. f) Fie P_c și P_c' relative la g, iar $P \in g$ cu $\pi_t = \pi_t'$; notînd $P_cP_c' = a$ și $\widehat{\pi_c, \pi_c'} = \alpha$, iar $P_cP = x$, $\widehat{\pi_t, \pi_c} = \theta$, atunci $\operatorname{tg}\theta = x/p$ și $t(\theta - \alpha) = (x - a)/p$. Eliminînd pe θ, rezultă $x^2 \operatorname{tg}\alpha - (a \operatorname{tg}\alpha + p' - p)x + p(p' \operatorname{tg}\alpha - a) = 0$. f_1) Ecuația în x devine o identitate, S și S' fiind tangente de-a lungul lui g; se spune că S și S' *se racordează de-a lungul lui* g. În acest caz, S și S' au aceleași P_c, π_c și p. f_2) π_c se confundă, deci $\alpha = 0$, S și S' avînd un singur π_t comun. Dacă S și S' au și același p, ele n-au nici un π_t comun. Ca să se racordeze trebuie ca și P_c să se confunde. g) Cu $\Gamma = C_0(\bar{r}_c = \bar{r}_o, v_c = 0)$ și $\bar{a}^2 = 1$, atunci $\bar{a} \cdot \bar{a}' = 0$, $\bar{r}_c' \cdot \bar{a}' = 0$, încît $p\bar{a}' = \bar{r}_c' \times \bar{a}$. La fel, pentru $\bar{a}_1^2 = 1$, obținem $p_1\bar{a}_1' = \bar{r}_c' + \bar{a}_1$. Cum $(\bar{r}_c' \; \bar{a} \; \bar{a}_1) \neq 0$, iar $\dfrac{d}{du}(\bar{a} \cdot \bar{a}_1) = (1/p - 1/p_1)(\bar{r}_c' \; \bar{a} \; \bar{a}_1)$ rezultă că S și S_1 trebuie să aibă același p. h) Dreptele (1) se găsesc pe S dacă $q = -p$, $a = b = 1/p^2$; luînd $p = 1/u$, avem $S : x = u^2 + v$, $y = u^2 - v$, $z = uv$. Găsim $\Gamma = C_0$: $x - y = 0$, $z = 0$ ($v_c = 0$) și $p = 2u(u^2 + 2)$. *Obs.* Curbele $v = \text{const.}$ $(x - y = 2a$, $x = z^2/a^2 + a)$ și $u = v(x + y - 2z = 0$, $2z = (x - y)^2)$ sînt curbe plane.

49 Se numește *suprafață rațională* o suprafață care admite o reprezentare biunivocă și birațională pe un plan. Se cere: a) Să se demonstreze că suprafețe care sînt intersectate de un fascicul de plane după curbe raționale ireductibile sînt suprafețe raționale (*teorema Noether*). b) Cuadricele sînt suprafețe raționale; să se dea o reprezentare plană a unei cuadrice (nedegenerate). c) Să se arate că o suprafață cubică S_3 e o suprafață rațională; să se determine suprafețele cubice riglate. d) Să se găsească suprafețe cuartice S_4 riglate care să fie raționale. e) Să se studieze suprafața cuartică ce conține 3 drepte concurente duble nesituate într-un plan, numită *suprafața romană a lui Steiner.*

R. Suprafața S e rațională dacă aplicația

$$r : R^2(u, v) \to S \subset R^3(x, y, z) \text{ cu } x = f_1/f_4,\ y = f_2/f_4,\ z = f_3/f_4, \tag{40}$$

unde f_i sînt polinoame în u, v ($i = 1, 2, 3, 4$), e o bijecție. a) Fie S de ecuație ireductibilă (11) și fasciculul de plane $z = v$. Curbele $F(x, y, v) = 0$, $z = v$ fiind raționale și ireductibile, putem reprezenta pe x, y prin funcții raționale de u. Rezultă că S admite parametrizarea

$$S : x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = v. \tag{40'}$$

Se arată că x, y sînt raționale și în v. b) Cuadricele S_2 sînt intersectate de orice plan după o conică, iar o conică e o curbă rațională. Fie $O \in S_2$, iar $\pi \not\ni O$; orice dreaptă $d \in O$ reîntîlnește pe S_2 în P și înțeapă pe π în M. Singurele excepții în plan sînt punctele A, B care corespund la generatoarele a, b (ale lui S_2) ce trec prin O; se păstrează însă biunivocitatea introducînd considerații de continuitate: cînd P descrie pe a, planul tangent π_t în P la S taie pe π după fasciculul Ap. O altă excepție o constituie O, căci — dacă P e în $O - OP$ e nedeterminată; atunci tangentei t în O la S_2 îi corespunde T de pe dreapta AB. Deci: *secțiunile plane ale unei cuadrice, în proiecția cuadricei dintr-un punct al ei pe un plan, se intersectează după o familie liniară de* ∞^3 *conice care trec prin 2 puncte A și B. Obs.* b_1) *Proiecția stereografică* e proiecția unei sfere dintr-un punct O' al ei pe planul tangent în punctul diametral opus O; dacă $OO' = Oz$, atunci $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$ și $P(X = -2R\alpha\gamma,\ Y = -2R\beta\gamma,\ Z = 2R(1 - \gamma^2)) \in S_2$, iar $M(x = -2R\alpha/\gamma,\ y = -2R\beta/\gamma,\ z = 0) \in \pi$, unde α, β, γ sînt cosinusurile directoare ale dreptei prin $O' : x = \rho\alpha$, $y = \rho\beta$, $z = 2R + \rho\gamma$. b_2) Dacă S_2 e un con și $O \neq V$ (vîrf con), secțiunile plane sînt conice trecînd prin intersecția generatoarei prin O cu π și avînd ca tangentă intersecția lui π_t în O la S_2 cu π. c) În $\pi(x_1, x_2, x_3)$, fie o familie de ∞^3 cubice C_3 de ecuație

$$\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3\varphi_3(x_1, x_2, x_3) + \lambda_4\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{41}$$

conicele de bază $\varphi_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ trecînd prin punctele $A_\alpha (\alpha = 1, \ldots, 6)$. Deci, X_i fiind coordonatele omogene ale lui S_3, obținem

$$S_3 : X_i = \varphi(x_1, x_2, x_3). \tag{41'}$$

Căci, unei cubice din familia (41) îi corespunde un plan (de proiecție), iar la 2 — o dreaptă în spațiu d; însă 2 cubice din familie se taie în 3 puncte variabile (6 fiind A_α), încît d intersectează

pe S_3 în 3 puncte variabile. Dacă $A\alpha$ sînt pe o conică C, cubicele degenerate ale familiei (41) sînt formate din C și o dreaptă a lui π; 2 asemenea cubice se intersectează într-un punct variabil (intersecția dreptelor din cubice). Deci d intersectează pe S_3 într-un punct variabil, încît C corespunde unui punct dublu al lui S_3. Alegîndu-l ca origine O, putem scrie

$$S_3 : \varphi_3(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0. \tag{41''}$$

Dacă S_3 e riglată, ea admite o familie de generatoare (cu 2 oarecare dintre ele strîmbe) care se sprijină pe 2 drepte directoare, așternute pe S_3, o directoare fiind dublă iar cealaltă simplă. Căci, luînd 4 generatoare, 3 dintre ele pot fi considerate ca generatoarele unei cuadrice K, a patra înțepînd pe K în A și B. Prin A și B trec 2 generatoare a și b ale lui K din cealaltă familie (decît cea care conține cele 3 considerate). Deci a și b, intersectînd toate cele 4 generatoare, aparține în întregime lui S_3. Nu mai există o a treia dreaptă directoare; altfel S_3 ar fi o cuadrică. Deoarece planul trecînd prin a și generatoarea g taie pe S_3 după aceste drepte și o alta d, dacă $d = a$, atunci a e directoarea dublă; dacă nu, ea trebuind să treacă prin intersecția lui g și b și aceasta pentru orice g, atunci $d = b$, adică b e directoarea dublă. Rezultă că, orice plan taie pe S_3 după o curbă rațională, avînd în punctul de intersecție al directoarei duble cu planul un punct dublu; deci S_3 e o suprafață rațională. Luînd ca Oz directoarea dublă:

$$S_3 : \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0 \text{ cu } \alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_0, \ldots, \gamma = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_0. \tag{42}$$

Conul tangent în $(0, 0, k) \in Oz$ degenerează în perechea de plane

$$(\alpha_3 k + \alpha_0) x^2 + (\beta_3 k + \beta_0) xy + (\gamma_3 k + \gamma_0) y^2 = 0, \tag{42'}$$

constituind o involuție cu plane duble corespunzînd lui k dat de

$$(\beta_3 k + \beta_0)^2 - 4(\alpha_3 k + \alpha_0)(\gamma_3 k + \gamma_0) = 0. \tag{42''}$$

Dacă involuția nu e degenerată (planele duble sînt distincte), putem lua planele duble ca Oxz și Oyz, iar punctele duble (de întoarcere) ca O și $P_\infty \in Oz$ ($\alpha_0 = \beta_2 = \beta_0 = \gamma_3 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$) Alegînd directoarea simplă ca dreapta improprie a lui Oxy ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_2 + \beta_1 = 0$, $\beta_2 + \gamma_1 = 0$) și unitatea de măsură pe Oz ($\alpha_3 = \gamma_1 = 1$), rezultă: *prin transformări proiective, suprafețele S_3 riglate cu directoare distincte sînt echivalente și*

$$S_3 : x^2 z + y^2 = 0. \tag{43}$$

Dacă involuția e degenerată, luînd punctul dublu (de întoarcere) ca O, iar Oxz ca plan corespunzător ($\alpha_3 = \beta_0 = \alpha_0 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$) și ca Oyz planul corespunzător lui $P_\alpha \in Oz$ ($\gamma_3 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$), avem *suprafața Cayley*:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y) x^2 + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) xy + (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_0) y^2 = 0;\ x^3 + xyz + y^2 = 0, \tag{44}$$

prin alegerea planului de la infinit ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), a lui Oxy ($\alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = 0$) și a etaloanelor pe axe ($\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_0 = 1$). d) Cînd secțiunile plane ale lui S_4 sînt cuartice raționale, acestea au sau un punct triplu sau 3 puncte duble. Deci: *pe S_4 se găsește sau o dreaptă triplă d sau o cubică dublă C_3.* În primul caz, S_4 e riglată; căci un plan trecînd prin d mai taie pe S_4 după încă o dreaptă. Fie $Oz = d$; atunci S_4 e dată de o formă cubică în x, y cu coeficienți funcții liniare de x, y, z, t. În al doilea caz. S_4 e riglată dacă: d_1) C_3 e ireductibilă; căci prin $P \in S_4$ se duce o coardă a lui C_3 ce are în total 5 puncte comune cu S_4 (punctele cu C_3 fiind duble). Atunci, fie $C_3 : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$; cuadricele care conțin pe C_3 formează o rețea $\lambda(x^2 - y) + \mu(xy - z) + \nu(y^2 - xz) = \sigma$. Deci S_4 e dată de o formă pătratică în binoamele $x^2 - y,\ xy - z,\ y^2 - xz$. d_2) $C_3 = d.C_2$; căci, din $O \in S_4$, d se proiectează după un plan iar C_2 după un con pătratic, avînd în comun 2 generatoare. Una din ele are un punct A comun cu d și unul B cu C_2, deci are cu S_4 5 puncte comune (A, b — puncte duble pentru S_4 și O). d_3) $C_3 = d_1.d_2.d_3$ cu d_i ($i = 1, 2, 3$) aparținînd unui plan sau strîmbe între ele; căci dreptele duse prin $P \in S_4$ și care întîlnesc 2 din aceste drepte aparțin lui S_4. *Obs.* Există și S_4 riglate neraționale. De exemplu, S_4 care are 2 directoare duble d_i ($i = 1, 2$) strîmbe (prin $P \in S_4$ se poate duce o dreaptă g, care taie pe d_i; avînd 5 puncte comune cu S_4, g e o generatoare a lui S_4). Luînd pe d_i ca Oz și dreapta improprie a lui Oxy, S_4 are ecuația

$$\alpha(z, t) x^2 + \beta(z, t) xy + \gamma(z, t) y^2 = 0 \text{ [sau] } x = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})\, u/2\alpha,\ y = u,\ z = v,\ t = 1, \tag{45'}$$

unde α, β, γ sînt polinoame de gradul 2, omogene în z, t. Conurile tangente în $P \in d_i$ sînt constituite din perechi de plane, care coincid în cîte 4 puncte pe fiecare d_i. Reprezentarea (45') poate și rațională în cazuri particulare. Astfel, dacă $\beta^2 - 4\alpha\gamma = A(v - a)^2(v - b)(v - c)$, cînd putem

lua $t^2 = (v - c)/(v - b)$, S_4 e formată din 2 pînze raționale. d) Luînd dreptele duble ca axe coordonate, O fiind punct triplu, S are ecuația

(46) $\quad ax^2y^2 + by^2z^2 + cx^2z^2 + dxyz = 0$ (a, b, c — const., d — polinom de grad 1);

prin alegerea planului de la infinit, putem avea d = const., încît

(46′) $\quad S : x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \pm 2xyz = 0.$

Conul asimptotic circumscris lui S din O e imaginar sau real. În coordonate proiective omogene, *suprafața lui Steiner* e dată de ecuația

(46″) $\quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \pm \sqrt{x_4} = 0,$

admițînd 4 plane duble : fețele reperului proiectiv $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ; reperul proiectiv e numit și *tetraedrul fundamental* (*dublu*) asociat lui S. Fiecare din aceste plane e tangent lui (46″) după o conică tangentă la muchiile tetraedrului fundamental. Secțiunea lui S prin π_t (oarecare) e o cuartică singulară formată din 2 conice ; afară de punctul de contact, conicele mai au în comun punctele de intersecție ale lui π_t cu cele 3 drepte duble. π_t la S taie axele de coordonate după segmente a căror sumă e constantă. Pe fiecare dreaptă dublă există 2 puncte, diferite de punctul triplu, care sînt uniplanare ; celelalte puncte sînt biplanare. Ecuația (46′) se obține luînd reperul proiectiv care are unul din vîrfuri în punctul triplu, cele 3 drepte duble ca muchii și ca față opusă punctului triplu planul determinat de cele 3 puncte conjugate armonic cu punctul triplu în raport cu cele 2 puncte uniplanare ale fiecărei drepte duble ; tetraedrul astfel format se numește *tetraedrul singular* asociat lui S_4. Cele 6 puncte uniplanare sînt comune lui S și muchiilor tetraedrului dublu. 2 muchii opuse ale unuia din cele 2 tetraedre sînt incidente cu 2 muchii opuse ale celuilalt, cele 2 vîrfuri ale unei muchii și punctele de incidență cu muchiile celuilalt tetraedru formează un sistem armonic. *Obs.* α) Dacă $\varphi_i = 0$ sînt conice ($i = 1, 2, 3, 4$), iar familia de conice (41) nu are nici un punct fix, ecuațiile (41′) definesc o suprafață Steiner. În adevăr, S_4 nu e riglată ; căci dreptele lui S_4 ar avea ca imagini curbe care ar tăia o singură dată conicele (41), ceea ce e imposibil, deoarece aceste conice (neavînd puncte fixe) taie orice curbă într-un număr par de puncte. Secțiunile plane ale lui S_4 sînt cuartice raționale ; căci, considerînd planul $X_4 = 0$, iar ecuația $\varphi_4 = 0$ fiind satisfăcută prin funcții raționale de grad 2 în t, X_1, X_2, X_3 sînt polinoame de grad 4 în t. Reciproca e adevărată ; căci, făcînd reprezentarea lui S_4 pe un plan prin proiecția din punctul triplu și printr-o transformare bipătrată, obținem o familie liniară de ∞^3 conice fără puncte fixe. β) Familia liniară de ∞^3 conice fără puncte fixe face parte din familia de ∞^5 conice din planul π ; se zice că prima familie nu e completă, în timp ce a doua familie e completă. Dacă $\varphi_i = 0$ ($i = 1, \ldots, 6$) sînt conicele de bază ale familiei de ∞^5 conice : $\lambda_i \varphi_i = 0$, ecuațiile $X_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ definesc o suprafață cuartică S în spațiul R^5 cu 5 dimensiuni, ale căror coordonate omogene sînt X_i, numită *suprafața lui Veronese* (sin. : *suprafața spațiului conicelor*). Se poate lua totdeauna $X_1 = x_1x_3$, $X_2 = x_2x_3$, $X_3 = x_1x_2$, $X_4 = x_1^2$, $X_5 = x_2^2$, $X_6 = x_3^2$; încît, în coordonate neomogene x, y în planul π și X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 în spațiul R^5, S are ecuațiile

(46‴) $\quad X_1 = x,\ X_2 = y,\ X_3 = xy,\ X_4 = x^2,\ X_5 = y^2.$

Suprafața Steiner poate fi considerată ca o proiecție a suprafeței Veronese, proiecția făcîndu-se din spațiul R^5 în spațiul R^3. Ambele suprafețe au proprietatea caracteristică : conțin ∞^2 conice care au ca imagini dreptele din planul π.

50 Se numește *suprafață circulară* o suprafață algebrică S_n de grad n care trece prin ombilicală ; se spune că S_n e o *suprafață m-circulară* ($2m \leqslant n$) dacă S_n admite ombilicala drept curbă multiplă de ordinul m. Se cere : a) Să se determine ecuația generală a unei astfel de suprafețe. b) Să se afle transformata prin inversiune a unei suprafețe circulare. *Apl.* Să se studieze *ciclidele* (suprafețele cubice circulare și suprafețele cuartice bicirculare).

R. a) Cu $\Phi_k(x, y, z)$ polinom omogen de grad k (în x, y, z), fie

(47) $\quad S_n : F(x, y, z) = \Phi_n + \Phi_{n-1} + \ldots + \Phi_1 + \Phi_0 = 0.$

Dacă S_n e o suprafață circulară ($F = 0$, $x_4 = 0$ conține ombilicala), atunci

(47′) $\quad \Phi_n = (x^2 + y^2 + z^2)\,\Psi_{n-2}.$

Dacă S_n e o suprafață m-circulară, atunci

(47″) $\Phi_n = (x^2+y^2+z^2)^m\,\Psi_{n-2m},\ \Phi_{n-1} = (x^2+y^2+z^2)^{m-1}\,\Psi_{n-2m+1},\ldots,\ \Phi_{n-m+1} = (x^2+y^2+z^2)\,\Psi_{n-m-1}.$

Obs. Se zice că S_n e o *suprafață circulară de speță m* ($2m \leqslant n$) cînd

(47‴) $$\Phi_n = (x^2+y^2+z^2)^m\,\Psi_{n-2m}.$$

Dacă $2m = n$, cînd putem considera $\Phi_0 = 1$, S_n se mai numește și *suprafață de putere constantă*; căci o dreaptă oarecare d prin $P_0 \in R^3$ taie pe S_n în $P_i (i=1,\ldots,n)$ astfel încît produsul $p = \prod_{i=1}^{n} P_0P_i = \mathrm{F}(P_0) = \text{const.}$, numit *puterea lui* P_0 *față de* S_n, e independent de direcția lui d. *Consecințe*: a_1) O cuadrică circulară e o sferă, fiind o suprafață de putere constantă. a_2) O m—circulară S_{2m} e de putere constantă. b) Prin o inversiune (de pol O și modul $k : \bar{r} = k^2\bar{r}'/\bar{r}'^2$), rezultă : b_1) O circulară S_n se transformă într-o $(n-1)$—circulară $S'_{2(n-1)}$ de putere constantă, admițînd pe O ca punct multiplu de ordin $n-2$; dacă $n=2$ sau dacă O e punct multiplu de ordin $n-2$ pentru S_n, atunci S'_n are aceleași proprietăți (circulară, grad, punct multiplu) ca și S_n. *Obs.* Dacă $O \in S_n$ ($\Phi_0 = 0$), transformata e o $(n-2)$ — circulară $S'_{n(n-2)}$ și admite pe O ca punct multiplu de ordin $n-2$. b_2) O m—circulară S_n ($2m \leqslant n$) se transformă într-o $(n-m)$—circulară $S'_{2(n-m)}$ de putere constantă, admițînd pe O ca punct multiplu de ordin $n-2m$; dacă $n=2m$ sau dacă O e punct multiplu de ordin $n-2m$ pentru S_n, transformata S'_n are aceleași proprietăți (m-circulară, grad, punct multiplu) ca și S_n. *Obs.* Dacă $n=2m$ iar $O \in S_n$, transformata e o $(m-1)$ — circulară S'_{n-1}; dacă $O \in S_n$ e punct multiplu de ordin $n-2m-p$, atunci transformata e o $(m-p)$—circulară S'_{n-3p}. *Apl. Ciclida* are ecuația

(47ᴵᵛ) $$a_0(x^2+y^2+z^2)^2 + 2a_1(x,y,z)(x^2+y^2+z^2) + a_2(x,y,z) = 0,$$

unde a_i sînt polinoame în x, y, z de gradul $i = 0, 1, 2$; o ciclidă e o cuartică (de ex., torul) sau o cubică după cum $a_0 \neq 0$ sau $a_0 = 0$. O ciclidă de grad 4 e de putere constantă și are ecuația

(47ᵛ) $$(x^2+y^2+z^2)^2 + 4(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}) = 0.$$

Secțiunile plane ale unei ciclide sînt fie cuartice bicirculare, fie cubice circulare, iar curba de intersecție cu o sferă e o ciclică sferică. Transformata prin inversiune e tot o ciclidă, care e grad 3 dacă polul inversiunii aparține ciclidei inițiale. Dacă o ciclidă are un punct dublu la distanță finită, ea e inversa unei cuadrice K; totodată ea e și podara unei cuadrice K', care e polara reciprocă a lui K în raport cu sfera de inversiune. În coordonate pentasferice, o ciclidă e reprezentată de o ecuație de grad 2, de formă canonică

(47 ᵛᴵ) $$\sum_{i=1}^{5} a_i y_i^2 = 0,$$

afară de cazul în care ciclida e inversa unei cuadrice.

51 Fie, în coordonate proiective omogene, *suprafața tetraedrală simetrică de exponent m* (m — număr rațional, a_i — număr real sau complex)

(48) $$S : (x_1/a_1)^m + (x_2/a_2)^m + (x_3/a_3)^m + (x_4/a_4)^m = 0.$$

Se cere : a) Să se arate că *prima suprafață asociată*, formată din planele polare tetraedrale ale punctelor lui S, și *a doua suprafață asociată*, constituită din polii tetraedrali ai planelor tangente la S, sînt tot suprafețe tetraedrale simetrice. b) Numind *tetraedru fundamental asociat lui S (tetr. f)*. tetraedrul format din vîrfurile A_i ale reperului proiectiv, să se studieze cazul cînd planul $A_1A_2A_3 : x_4 = a$ e planul impropriu al spațiului și a_4 e soluția ecuației $a_i^m + 1 = (\textit{suprafețele lui Lamé})$; să se afle podara suprafeței Lamé.

R. Printr-o transformare proiectivă (T), o suprafață (48) se transformă tot într-o suprafață (48) de același exponent m care admite ca tetr. f. transformatul prin (T) al celui al primei

suprafețe. Secțiunile plane ale unei suprafețe (48) sînt curbe triunghiulare simetrice (v. probl. I, 72). Cazuri particulare: planele care nu conțin vîrfuri ale tetr.f. ($m = 1$); cuadricele care admit tetr. f. ca tetraedru autopolar ($m=2$); suprafața romană a lui Steiner ($m=1/2$) și corelativa ei ($m=-1$). a) Unui plan din spațiu π': $\xi_i' x_i = 0$, care nu conține nici unul din vîrfurile tetr.f., i se asociază punctul P' ($\rho x_i' = 1/\xi_i'$), numit *pol tetraedral* al lui π'; P' e punctul comun al celor 6 plane determinate de muchiile A_iA_j ale tetr.f. și de punctele T_{kl}' care sînt conjugatele armonice ale lui T_{kl} în care π' intersectează muchiile opuse A_kA_l, indicii i, j, k, l luînd valori diferite din sistemul (1, 2, 3, 4). Reciproc, lui $P'(x_i')$, care nu aparține nici uneia din fețele tetr.f,. i se asociază un plan π': $x_1\ x_2'x_3'x_4' + x_2x_3'x_4'x_1' + x_3x_4'x_1'x_2' + x_4x_1'x_2'x_3' = 0$, numit *plan polar tetraedral*, care admite ca pol tetraedral pe P': coordonatele tangențiale ale lui π': $\lambda\xi_i' = 1/x_i'$. Prima suprafață asociată lui (48) e suprafața tangențială

$$S_1 : (a_1\xi_1)^{-m} + (a_2\xi_2)^{-m} + (a_3\xi_3)^{-m} + (a_4\xi_4)^{-m} = 0,$$

a cărei ecuație punctuală e o suprafață (48) de exponent $m_1 = m/(m+1)$. A doua suprafață asociată lui (48) e tot o suprafață tetraedrală de exponent $m_2 = m/(1-m)$; căci planul tangent în P' la S e π_t:
$(x_1'/a_1)^{-m1}\, x_1/a_1 \ldots + (x_4'/a_4)^{m-1}\, x_4/a_4 = 0$. Între exponenții acestor suprafețe există relația $1/m_1 + 1/m_2 = 2/m$. *Obs.* Cuadrica de ecuație

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 + \lambda_4x_4^2 = 0 \tag{48'}$$

admite tetr.f. autopolar. Planele polare ale punctelor suprafeței (48) în raport cu o cuadrică (48) formează o suprafață tetraedrală simetrică de exponent $m' = m/(m-1)$, numit *exponent tangențial* al lui (48). Suprafața polară de ordin p a lui P în raport cu (48) e o suprafață de aceeași natură avînd exponentul $m - p$. b) *Suprafața Lamé*:

$$(x/a)^m + (y/b)^m + (z/c)^m = 1 - 0,\ (m = p/q) \tag{48''}$$

e o suprafață algebrică de grad pq^2 ($m>0$) sau $3pq^2$ ($m<0$). E echivalentă afin (prin cetro-afinitatea $x = aX/r$, $y = bY/r$, $z = cZ/r$) cu

$$X^m + Y^m + Z^m = r^m. \tag{48'''}$$

Prin (T), (48''') se transformă în (48), tetr.f. transformat obținîndu-se din cel determinat de O și de punctele la infinit ale axelor. Polara reciprocă a lui (48'') în raport cu cuadrica (48') e o suprafață Lamé de exponent $m' = m/(m-1)$. Podara lui (48'') e suprafața

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{m'} = ax)^{m'} + (by)^{m'} + (cz)^{m'} \text{ cu } m' - m/(m-1).$$

3. ÎNFĂȘURĂTOAREA UNEI FAMILII DE SUPRAFEȚE

52 Se spune că 2 suprafețe S_i ($i = 1, 2$) *se racordează (sînt în contact) în punctul comun* P_0 dacă ele sînt tangente în acest punct. Fie S_i: $\bar r = \bar r_i(u, v)$ și $P_0(u_0, v_0)$ un *punct* al lor *de racordare*; cele 2 suprafețe S_i au un *contact de ordinul* n în P_0 dacă

$$\left(\frac{\partial^{h+k}\bar r_1}{\partial u^h\,\partial v^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{h+k}\bar r_2}{\partial u^h\,\partial v^k}\right)_0 \qquad (0 \leqslant h+k \leqslant n). \tag{49}$$

și cel puțin una din derivatele parțiale de ordin $n+1$ au valori diferite în P_0. Să se afle condițiile de contact de ordin n cînd S_1 are ecuația (11), iar S_2 are ecuația (13). *Apl.* a) Să se determine contactul suprafețelor S_1: $z = xy$ și S_2: $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 - v^2 + 2u\,(u^2 + 3v^2)$ în origine. b) Se cere cuadrica cu centrul în O care să aibă cu S: $x = (1-u)/(1-v^2)$, $y = (1-v)/(1-u^2)$, $z = 1 + u + v + uv$ un contact de ordin 3 în P_0 (1,1, 1).

R. Fie $\Phi(u, v) = F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$; atunci, condițiile sînt

$$\left(\frac{\partial^{h+k}\Phi}{\partial u^h\,\partial v^k}\right)_0 = 0 \quad (0 \leqslant h + k \leqslant n), \tag{49'}$$

Considerînd dezvoltarea $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}_1(u - u_0) + \bar{a}_2(v - v_0) + \bar{a}_3(u - u_0)^2 + 2\bar{a}_4(u - u_0)(v - v_0) + \bar{a}_5(v - v_0)^2 + \ldots$, va trebui să găsim

$$\Phi = A_1(u - u_0)^n + A_2(u - u_0)^{n-1}(v - v_0) + \ldots + A_{n+1}(v - v_0)^n, \sum_{i=1}^{n+1} A_i^2 \neq 0. \tag{49''}$$

Obs. Se poate pune problema de a determina dintr-o familie dată (depinzînd de $k = (n + 1)(n + 2)/2$ parametri) o *suprafață osculatoare* unei suprafețe date. Apare o dificultate, deoarece familiile de suprafețe simple cunoscute depind de un anumit număr de parametri ce nu coincide cu k (numărul condițiilor vectoriale de contact); de aceea impunem și alte condiții geometrice pentru a micșora numărul parametrilor de care depinde. De exemplu: planele depinzînd de 3 parametri, există un plan în contact de ordin 1 cu S (planul tangent); sferele depinzînd de 4 parametri (respectiv cuadricele de 9 parametri), nu putem avea o sferă osculatoare cu contact de ordin 2 (respectiv, cuadrică osculatoare în contact de ordin 3), căci contactul de ordin 2 dă 6 condiții (respectiv, contactul de ordin 3 dă 10 condiții). *Apl.* a) Contact de ordin 2; căci $\Phi = 2u(u^2 + 3v^2)$. b) $P_0(u_0 = v_0 = 0)$, $S: x = 1 - u + v^2 + (3)$, $y = 1 - v + u^2 + (3)$, $z = 1 + u + v + uv$; $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz + 9 = 0$.

53 O suprafață S e intersectată de sferele racordate în P_0 lui S după o curbă C avînd în P_0 un punct dublu. Să se determine sfera pentru care P_0 e un punct cuspidal.

54 Să se cerceteze contactul unei curbe cu o suprafață. *Apl.* a) Să se afle contactul în O dintre: $a_1)$ $C: x = t^3$, $y = t^2 + 2t$, $z = t^2$ și $S: x^2 + z^2 - xy - xz = 0$; $a_2)$ $C: yz = x$, $xz = y + 1$ și $S: xy = z$. b) O curbă C are cu un paraboloid de rotație S în P_0 un contact de ordin n. Dacă $P_1 \in C$ e apropiat de P_0 iar $P' \in S$ e pe dreapta P_1V, V fiind vîrful lui S, atunci segmentul P_1P' e proporțional cu puterea $n + 1$ a coardei $P_0P_1 = \triangle s$.

R. Fie C de ecuații (14) și S de ecuație (11) în contact în $P_0(t_0)$, punct ordinar atît pentru C cît și pentru S (fig. 44). Avem $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ în P_0; fie $F_z \neq 0$ în P_0. Tangenta în P_0 la C nu e paralelă cu Oz, deci $f'^2(t_0) + g'^2(t_0) \neq 0$, iar o paralelă la Oz prin $P(f(t), g(t), h(t)) \in C$ taie pe S în $P'(f(t), g(t), \zeta(t)) \in S$; P' descrie pe S o curbă Γ. C și Γ sînt în contact de ordin n în P_0; deci

$$h_0^{(\alpha)} = \zeta_0^{(\alpha)}, \quad h_0^{(n+1)} \neq \zeta_0^{(n+1)} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n). \tag{50}$$

Însă avem ($i = 2, 3, \ldots, n + 1$)

$$F(f, g, \zeta) = 0, F_x f' + F_y g' + F_z \zeta' = 0, F_x^i f'^i + \ldots + F_x f^{(i)} + F_y g^{(i)} + F_z \zeta^{(i)} = 0 \tag{50'}$$

Cu (50) în (50') și $\Phi(t) = F(f, g, h)$, avem condițiile necesare și suficiente de contact:

$$\Phi^{(\alpha)}(t_0) = 0, \ \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n). \tag{50''}$$

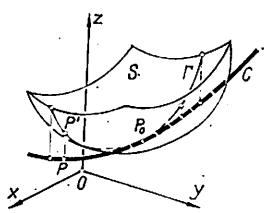


Fig. 44

Obs. a) Condițiile (50'') nu depind de Γ, ci de S, C și P_0; deci putem lua drept Γ intersecția lui S cu un cilindru ale cărei generatoare se sprijină pe C și sînt paralele cu o direcție $\triangle$ (neparalelă cu π_t în P_0 la S). b) Condițiile (50'') exprimă: $b_1)$ S și C au $n + 1$ puncte comune confundate în P_0; $b_2)$ distanța PP' e proporțională cu puterea $n + 1$ a coardei P_0P. *Apl.* a) contact de ordin 3, respectiv 2. b) $S: x^2 + y^2 = 2az$; deci $V = O$, $\overline{OP_0} = \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0$, $\overline{OP_1} = \bar{r}(t_0 + \triangle t)$ și $\overline{OP'} = k\bar{r}(t_0 + \triangle t)$, cu $k = 2az(t_0 + \triangle t)/\lambda$, $\lambda = x^2(t_0 + \triangle t) + y^2(t_0 + \triangle t)$; $P_0P' = (1 - k)|\bar{r}(t_0 + \triangle t)|$.

$$\lim_{\triangle t \to 0} P_1P'/(\triangle s)^{n+1} \neq 0.$$

55 Să se afle suprafaţa osculatoare S la curba C în punctul P_0. *Apl.* Să se afle : a) Planul osculator în P_0 la C. b) În $P_0(0, 0, 1)$, cuadrica osculatoare cu centrul în origine la curba $C : xy - y + 1 = 0,\ z = e^x$.

R. S e (în general, există) suprafaţa din familia $F(x, y, z, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = 0$ cu $n + 1$ parametri care are cu C, de ecuaţii (14), în P_0 (t_0) un contact de ordin n. λ_i ($i = 1, \ldots, n + 1$) sînt date de (50″) cu $\Phi(t) = F(f(t), g(t), h(t), \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$. *Obs.* a) E posibil să existe puncte ale lui C în care contactul e (cel puţin) de ordin $n + 1$; atunci $\alpha = 0, 1, \ldots, n + k$. S e o *suprafaţă supraosculatoare* (de ordin k). b) S e limita unei suprafeţe a familiei care trece prin $n + 1$ puncte ale lui C, apropiate de P_0, cînd ele tind către P_0. *Apl.* a) Fie familia de plane $\bar{R} \,.\, \bar{a} = p$ (cu 3 parametri). Contactul fiind de ordin 2, condiţiile (50″) sînt $\bar{r}.\bar{a} = p$, $\bar{r}'.\bar{a} = 0$, $\bar{r}''.\bar{a} = 0$. Dacă tangenta în P la C e nestaţionară : $\bar{r}' \times \bar{r}'' \neq 0$, obţinem $\bar{a} = \bar{r}' \times \bar{r}''$ şi $p = \bar{r}.(\bar{r}' \times \bar{r}'')$, adică $S : (\bar{R} - \bar{r}\ \bar{r}'\ \bar{r}'') = 0$. Dacă tangenta e staţionară de ordin k : $\bar{r}' \times \bar{r}'' = 0$, $\bar{r}^{(k+2)} = \lambda \bar{r}'$, $\bar{r}' \times \bar{r}^{(k+3)} \neq 0$, avem $\bar{r}^{(k+2)}.\bar{a} = 0$; deci $\bar{a} = \bar{r}' \times \bar{r}^{(k+3)}$ iar S (supraosculator) : $(\bar{R} - \bar{r}\ \bar{r}'\ \bar{r}^{(k+3)}) = 0$. b) Dezvoltînd pe y şi z în serie şi luînd $n = 5$ în (50″), obţinem

$$631\,x^2 - 19\,y^2 + 2247\,z^2 + 2696\,xy - 4704\,xz - 1224\,yz - 1004 = 0.$$

56 Să se afle *curba osculatoare* C la suprafaţa S în punctul P_0. *Apl.* Să se determine dreptele osculatoare în P_0 la suprafaţa S.

57 Să se afle înfăşurătoarea S a unei familii de suprafeţe de ecuaţie

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u, v, \alpha). \tag{51}$$

Apl. Să se cerceteze dacă familia de suprafaţe : a) $F(x, y, z) = \alpha$; b) $\bar{r} = \bar{r}(u, v) + \alpha$; c) $\bar{r} = \alpha\,\bar{r}(u, v)$ admite înfăşurătoare.

R. Curba caracteristică C_α a lui S_α e dată de ecuaţia $v = v(u, \alpha)$; deci

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u, v(u, \alpha), \alpha), \tag{51'}$$

fiind generată de C_α. S_α şi S avînd acelaşi plan tangent π_t în $P \in C_\alpha$, vectorii $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ (tangenţi la $v = \text{const.}$ şi $u = \text{const.}$ în P la S_α) şi $\bar{r}_u + \bar{r}_v v_u$, $\bar{r}_v v_\alpha + \bar{r}_\alpha$ (tangenţi la $\alpha = \text{const.}$ şi $u = \text{const.}$ în P la S) sînt coplanari ; deci obţinem $v(u, \alpha)$ din condiţia

$$(\bar{r}_u\ \bar{r}_v\ \bar{r}_\alpha) = 0. \tag{51''}$$

Apl. a) Sistemul $F = F_\alpha = 0$ conduce la o imposibilitate. b) + c) Nu ; căci (51′) e independentă de α.

58 Fie *ecuaţia Pfaff* (ecuaţia cu diferenţiale totale)

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0 \text{ cu } A, B, C \text{ funcţii de } x, y, z.$$

Să se arate : a) Dacă *ecuaţia Pfaff e complet integrabilă*, ea reprezintă o familie de suprafeţe

$$F(x, y, z) = a \quad (a - \text{const.}),$$

suprafeţele integrale ale ecuaţiei. Se spune că *o ecuaţie Pfaff complet integrabilă defineşte o suprafaţă olonomă în spaţiul euclidian* R^3. b) Dacă *ecuaţia Pfaff nu e complet integrabilă*, există o infinitate de congruenţe de curbe integrale ale ecuaţiei, prin fiecare punct $P(x, y, z)$ al unei regiuni a spaţiului R^3 trecînd cîte o curbă din fiecare congruenţă. Se spune că *o ecuaţie Pfaff necomplet integrabilă defineşte o suprafaţă neolonomă* (sin. : *varietate Pfaff, complex de curbe*) în *spaţiul euclidian* R^3 ; această suprafaţă e un caz particular al *spaţiilor neolonome*, introduse în 1926 de *G. Vrănceanu* ([46], II, p. 197). c) Planul

$$\pi : A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

e tangent suprafeţei integrale sau tuturor curbelor integrale care trec prin $P(x, y, z)$, definind o *familie olonomă sau neolonomă de plane*. *Apl.* Dacă

A, B, C sînt funcţii liniare de x, y, z, atunci ecuaţia *Pfaff* defineşte o *cuadrică* (sin.: *suprafaţă pătratică*) *olonomă* sau *neolonomă*; să se determine aceste suprafeţe.

R. a) Condiţia de integrabilitate a ecuaţiei Pfaff e

$$A\,(B_z - C_y) + B\,(C_x - A_z) + C\,(A_y - B_x) = 0.$$

Cînd această condiţie e identic satisfăcută, ecuaţia Pfaff e complet integrabilă şi admite o ∞^1 de suprafeţe integrale, printr-un punct din R^3 trecînd cîte o singură suprafaţă integrală. b) Cînd condiţia de integrabilitate nu e satisfăcută, luînd (arbitrar) o altă ecuaţie Pfaff

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0,$$

astfel ca $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & B & C \\ \lambda & \mu & \nu \end{Vmatrix} = 2$, sistemul constituit din cele 2 ecuaţii Pfaff e echivalent cu sistemul diferenţial

$$dx/a = dy/b = dz/c \text{ cu } a = B\nu - C\mu,\ b = C\lambda - A\nu,\ c = A\mu - B\lambda.$$

Conform teoremei de existenţă şi unicitate, integrala generală e

$$F(x, y, z) = K_1,\ G(x, y, z) = K_2 \text{ cu } \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{Vmatrix} = 2,$$

adică o congruenţă de curbe. Or λ, μ, ν sînt funcţii arbitrare. *Obs.* O ecuaţie Pfaff necomplet integrabilă poate admite un număr — în general, finit — de suprafeţe integrale sau niciuna. c) Planul tangent π_t la suprafaţa integrală ce trece prin P e

$$\pi_t : F_x\,(X - x) + F_y\,(Y - y) + F_z\,(Z - z) = 0.$$

Familia de plane π coincide cu planele tangente π_t cînd

$$F_x = \rho A,\ F_y = \rho B,\ F_z = \rho C\ (\rho - \text{funcţie de } x, y, z),$$

ceea ce are loc dacă condiţia de integrabilitate e satisfăcută. În acest caz, parametri directori dx, dy, dz ai tangentelor la suprafaţă în P satisfac ecuaţia $dF = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0$; deci curbele tangente în P la π_t (care trece prin P) sînt curbe situate pe suprafeţele $F(x, y, z) = a$. Cînd condiţia de integrabilitate nu e satisfăcută, cum diferenţialele dx, dy, dz pot fi considerate drept parametri directori ai tangentei uneia din curbele integrale trecînd prin P, iar A, B, C ai unei drepte d prin P, ecuaţia Pfaff afirmă: *dreapta d e normala comună a tuturor curbelor integrale ce trec prin P*, adică: *planul π e planul tangent în P la suprafaţa neolonomă definită de ecuaţia Plaff dată*. Un exemplu de familie neolonomă de plane e dat de planele unei corelaţii nule:

$$yX - xY + k\,(Z - z) = 0,\ k - \text{constanta polarităţii}.$$

Alt exemplu: planele unui complex liniar nespecial; căci curbele tangente complexului satisfac ecuaţia

$$y\,dx - x\,dy + k\,dz = 0.$$

Un punct ale cărui coordonate anulează coeficienţii A, B, C ai ecuaţiei Pfaff e un *punct singular* al suprafeţei neolonome. *Apl.* Proprietăţile se păstrează printr-o afinitate (în particular, printr-o rototranslaţie). Dacă planele $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ se întîlnesc în Ω la distanţă finită, Ω e un punct singular al suprafeţei neolonome. Prin el trec o infinitate de generatoare, situate pe un con pătratic, numit *conul singular* al suprafeţei. *Obs.* Prin $P \neq \Omega$, trec 2 generatoare ale suprafeţei. Cu $O = \Omega$ şi axele coordonate paralele cu axele conului, suprafaţa e

$$\alpha x\,dx + \beta y\,dy + \gamma z\,dz + n\,(z\,dy - y\,dz) + p\,(x\,dz - z\,dx) + m\,(y\,dx - x\,dy) = 0$$

şi reprezintă o *cuadrică neolonomă cu centru*. Intersectînd-o cu un plan $z = ax + by + c$, se arată că există 2 drepte în plan care sînt generatoarele suprafeţei; generatoarele sînt imaginare, reale distincte sau confundate, după cum expresia $\alpha\beta + \beta\gamma a^2 + \alpha\gamma b^2 \gtreqless 0$. Dacă conul singular e imaginar, această expresie e pozitivă; rezultă: cuadrica neolonomă are toate punctele eliptice; cînd conul singular e real, cuadrica neolonomă are puncte hiperbolice, eliptice şi parabolice. *Obs.* Condiţia de integrabilitate e satisfăcută dacă $n\alpha = p\beta = m\gamma = 0$. Pentru $n = p = m = 0$, suprafaţa e olonomă

și reprezintă ∞^1 de cuadrice cu centru în O, prin $P \in R^3$ trecînd una din ele. Dacă $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ecuația definește curbele tangente la un complex liniar special, avînd ca axă dreapta dusă prin O și de parametri directori n, p, m; suprafața e olonomă și e formată din ∞^1 plane care trec prin axa complexului. În cazul $\gamma = n = p = 0$, obținem

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = Ce^{\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon y}{x}} \left(\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \text{ sau } \alpha x^2 + \beta y^2 = C\left(\frac{\varepsilon y - x}{\varepsilon y + x}\right)^{\frac{m}{\sqrt{-\alpha\beta}}} \left(\varepsilon = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\right),$$

după cum α, β sînt sau nu de același semn. Dacă planele $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ se taie în Ω_∞ la infinit, luînd Ω_∞ $(0, 0, 1, 0)$, cu $C = 0$ planul de la infinit și $Oz = A \cap B$, ecuația suprafeței neolonome se poate scrie

$$dz = (\alpha x - ky)\, dx + (kx - \beta y)\, dy$$

și definește *paraboloidul neolonom* cu centrul în Ω_∞. *Obs.* Condiția de integrabilitate e $k = 0$, cînd suprafața e olonomă și reprezintă ∞^1 paraboloizi cu centrul Ω_∞; dacă $\alpha = \beta = k = 0$, obținem o familie de plane $z = c$. Dacă planele $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ aparțin unui fascicul cu axa la distanță finită, ecuația canonică a suprafeței neolonome e

$$(\alpha x - ky)\, dx + (kx + \beta y)\, dy + (ax + by)\, dz = 0$$

și definește *cilindrul neolonom* de axă Oz, punctele acestei axe fiind puncte singulare ale suprafeței. *Obs.* Dacă $a = b = k = 0$, suprafața e olonomă și e formată din ∞^1 cilindri cu axa Oz. În mod analog, se poate considera cazul cînd axa fasciculului e la infinit. Dacă planele $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ se reduc la un singur plan $A = 0$, ecuația Pfaff e complet integrabilă și dă o familie de plane (la care se asociază planul $A = 0$).

59 Să se afle înfășurătoarea familiei de sfere: a) $x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 - 1 = 0$; b) $(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 - a\alpha^2 = 0$.

60 Să se afle înfășurătoarea sferelor: a) de rază a și cu centrele pe un cerc dat; b) care trec printr-un punct fix situat pe axa parabolei $y^2 = 2px$, $z = 0$ și al căror centru descriu o sferă dată.

61 Pe coardele perpendiculare pe una din axele unei conice, ca diametri, se construiesc sfere. Să se afle înfășurătoarea lor.

R. Fie conicele

$$x^2/A + y^2/B - 1 = 0,\ z = 0;\ y^2 = 2px,\ z = 0. \tag{52}$$

Obținem $x^2/(A + B) + (y^2 + z^2)/B - 1 = 0, (x^2 + z^2)/A + y^2/(A + B) = 0,\ y^2 + z^2 = 2px + p^2$.

62 Se numește *caustică* a unei suprafețe S (cînd se zice că S e *suprafață dirimantă*) înfășurătoarea Σ a dreptelor care se obțin prin reflexie sau refracție față de S din dreptele unui sistem format din drepte paralele, concurente sau tangentele la o suprafață; Σ se numește *catacaustică* sau *diacaustică* după cum e obținută prin reflexie sau refracție. Să se afle: a) Catacaustica unui fascicul incident de raze paralele cu axa suprafeței dirimante S de rotație. b) Diacaustica unui dioptru plan.

63 Fie (dacă există) înfășurătoarea

$$C : \mathrm{F} = \mathrm{F}_\alpha = \mathrm{F}_{\alpha\alpha} = 0 \tag{53}$$

a caracteristicelor $C_\alpha : \mathrm{F} = \mathrm{F}_\alpha = 0$, situată pe înfășurătoarea S (dacă există) a suprafețelor familiei $S_\alpha : \mathrm{F}(x, y, z, \alpha) = 0$. Să se arate: a) Secțiunea Γ a lui S, cu un plan care trece prin P (ordinar) $\in C$ și nu conține tangenta în P la C, e o curbă pentru care P e punct de întoarcere de prima speță. b) P e punct singular al lui S.

R. Existența înfășurătoarelor caracteristicelor e asigurată dacă

(53′) $$\frac{D(F, F_\alpha, F_{\alpha\alpha})}{D(x, y, z)} \neq 0,\ F_{\alpha\alpha\alpha} \neq 0 \text{ (pentru o soluție a lui (53)).}$$

Alegem: $P = O$ pentru $\alpha = 0$ (punct caracteristic al lui C_0, după care se taie $S_0 : F(x, y, z), 0) = 0$ și $\Sigma_0 : F_\alpha(x, y, z, 0) = 0$), planele tangente în P la S_0 și Σ_0 ca Oxz și Oyz, iar planul (prin P) de secțiune a lui S ca Oxy. Deci

$$f(x, y, z, 0) = ay + \ldots,\ F_\alpha(x, y, z, 0) = bx + \ldots,\ F_{\alpha\alpha}(x, y, z, 0) = lx + my + nz + \ldots$$

Notînd $F_{\alpha\alpha\alpha}(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ iar $f(0, 0, 0) \neq 0$ după (53′), avem

$$F = ay + \ldots + \alpha(bx + \ldots) + \frac{\alpha^2}{2!}(lx + my + nz + \ldots) + \frac{\alpha^3}{3!} f(x, y, z) + \ldots = 0,$$

(53″)

$$F_\alpha = bx + \ldots + \alpha(lx + my + nz + \ldots) + \frac{\alpha^2}{2!} f(x, y, z) = 0.$$

Cum $D(F, F_\alpha)/D(x, y) \mid_P = -ab \neq 0$, putem rezolva ecuațiile (53″) în x și y, obținînd ecuațiile parametrice ale lui S; de unde, prin intersecție cu Oxy, găsim

(53‴) $$\Gamma : x = x(\alpha),\ y = y(\alpha),\ z = 0.$$

Desigur, ecuațiile lui Γ se pot obține făcînd $z = 0$ în (53″) și rezolvînd în raport cu x și y sistemul obținut:

$$ay + \ldots + \alpha(bx + \ldots) + \frac{\alpha^2}{2!}(lx + my + \ldots.) + \frac{\alpha^3}{3!} f(x, y, 0) + \ldots = 0$$

(53^{IV})

$$bx + \ldots + \alpha(lx + my + \ldots) + \frac{\alpha^2}{2!} f(x, y, 0) + \ldots = 0.$$

Cu (53‴) în (53^{IV}), prin derivare în raport cu α și făcînd $x = y = \alpha = 0$, rezultă $x'(0) = y'(0) = 0$, adică P e un punct singular al lui $S \cap Oxy = \Gamma$. Printr-o nouă derivare, deducem $x''(0) = -\frac{1}{b} f(0, 0, 0) \neq 0$, $y''(0) = 0$. Derivînd încă o dată, găsim $y'''(0) = \frac{2}{a} f(0, 0, 0) \neq 0$. Cu $x''(0) = 2h$, $y'''(0) = 6k$, avem

(53^{V}) $$\Gamma : x = h\alpha^2 + \ldots,\ y = k\alpha^3 + \ldots,\ z = 0\ (hk \neq 0).$$

Deci: O e punct de întoarcere de prima speță al curbei Γ, tangenta în O la Γ fiind Ox. b) Deoarece $D(F, F_\alpha)/D(x, y) \mid_P \neq 0$, din (53) obținem

$$x = x(z, \alpha),\ y = y(z, \alpha),\ z = z,$$

care verifică identic sistemul (53); derivînd în raport cu α, avem

$$F_x x_\alpha + F_y y_\alpha = 0,\ F_{\alpha_x} x_\alpha + F_{\alpha y} y_\alpha + F_\alpha = 0,$$

care, ținînd seama de ultima ecuație (53), admite soluția $x_\alpha = y_\alpha = 0$, adică matricea $\begin{Vmatrix} x_z & y_z & 1 \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 \end{Vmatrix}$ e de rang 1. Deci P e punct singular al lui S.

64 Să se arate că orice suprafață a familiei $F(x, y, z, \alpha) = 0$ are, în general, un contact de ordin 2 cu muchia de întoarcere a înfășurătoarei.

65 Să se găsească înfășurătoarea unei familii de suprafețe cu doi parametri. *Apl.* Să se cerceteze dacă admite înfășurătoare familia de suprafețe $F + \alpha G + \beta H = 0$, unde F, G, H sînt funcții de x, y, z.

R. Fie familia cu doi parametri

(54) $$S_{\alpha\beta} : F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Caz I: α *şi* β *sînt 2 parametri independenţi*; atunci, avem înfăşurătoarea

(54′) $$S : G(x, y, z) = 0.$$

Fie $P\,[x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)]$ un punct caracteristic, în care $S_{\alpha\beta}$ şi S sînt tangente: $F_x/G_x = G_y/G_y = F_z/G_z$; însă $P \in S_\beta$ şi $P \in S$, încît $F_x x_\alpha + F_y y_\alpha + F_z z_\alpha + F_\alpha = 0, \ldots, G_x x_\beta + G_y y_\beta + G_z z_\beta = 0.$

Deci: *coordonatele punctului curent (regulat) al lui S verifică ecuaţiile*

(54″) $$F = 0,\ F_\alpha = 0,\ F_\beta = 0.$$

Obs. a) Coordonatele punctelor singulare ale lui $S_{\alpha\beta}$ verifică ecuaţiile (54″). b) S e înfăşurătoarea lui $S_{\alpha\beta}$ dacă coordonatele lui P, comun lui $S_{\alpha\beta}$, Σ_α şi Σ_β definite de ecuaţiile (54″), verifică condiţiile

(54‴) $$D(F, F_\alpha, F_\beta)/D(x, y, z) \neq 0,\ D(F_\alpha, F_\beta)/D(\alpha, \beta) \neq 0.$$

c) Punctul caracteristic al lui $S_{\alpha\beta}$ e limita punctului comun acesteia şi lui $S_{\alpha+h\beta}$ şi $S_{\alpha\beta+k}$, cînd h şi k tind către zero. d) Dacă $S_{\alpha\beta} : \bar{r} = \bar{r}(u, v, \alpha, \beta)$, atunci $S : u = u(\alpha, \beta),\ v = v(\alpha, \beta)$ astfel încît $\bar{r}_u,\ \bar{r}_v$ şi $\bar{r}_u u_\alpha + \bar{r}_v v_\alpha + \bar{r}_\alpha,\ \bar{r}_u u_\beta + \bar{r}_v v_\beta + \bar{r}_\beta$ sînt coplanari; obţinem condiţiile

(54IV) $$(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_\alpha) = 0,\ (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_\beta) = 0 \text{ sau } (\bar{r}_u \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta) = 0,\ (\bar{r}_v \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta) = 0,$$

care sînt echivalente, permiţînd determinarea funcţiilor $u(\alpha, \beta)$ şi $v(\alpha, \beta)$.
Caz II: α *şi* β *sînt legaţi printr-o relaţie de forma*

(55) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0;$$

atunci, înfăşurătoarea S (dacă există) se obţine eliminînd pe α şi β între ecuaţiile (54), (55) şi condiţia.

(55′) $$D(F, \varphi)/D(\alpha, \beta) = 0.$$

Obs. Dacă $S_{\alpha\beta} : \bar{r} = \bar{r}(u, v, \alpha, \beta)$, considerînd $\beta = \beta(\alpha)$, atunci S e definită prin $(\bar{r}_u \bar{r}_v \varphi_\beta \bar{r}_\alpha - \varphi_\alpha \bar{r}_\beta) = 0$

66 Se numeşte *suprafaţă canal* (sin.: *suprafaţă tubulară*) înfăşurătoarea S a unei familii de sfere cu raza constantă şi ale căror centre Ω descriu o *curbă deferentă* Γ dată (fig. 45). Se cere: a) Să se determine condiţia de existenţă a înfăşurătoarei C a curbelor caracteristice C_α situate pe o suprafaţă canal S. b) Să se arate că torul se reprezintă şi ca o suprafaţă canal.

R. a) Fie $\Gamma : \bar{r} = \bar{r}(s)$; cu $\alpha = s$, $C_\alpha : (\bar{R} - \bar{r})^2 = r^2,\ (\bar{R} - \bar{r}).\bar{l} = 0$ e un cerc mare al sferei, ce se găseşte în planul normal în Ω la Γ. După (53), pentru determinarea lui C, considerăm şi planul $(\bar{R} - \bar{r}).\bar{n} = \rho$, care e paralel cu cel rectificant şi trece prin centrul de curbură Ω_c al lui Γ (în Ω); deci $C : \bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{n} + \mu\bar{b}$ cu $\lambda = \rho,\ \mu = \pm\sqrt{r^2 - \rho^2}$ şi există dacă $\rho \leqslant r$. *Obs.* Cînd Γ e o elice circulară, suprafaţa canal se numeşte *serpentin* (fig. 46). b) Cercul Γ: $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$; sferele $S_{\alpha\beta} : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2$ cu $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ iar S e torul (8′). *Obs.* Luînd $\alpha = a\cos t$, $\beta = a\sin t$, sfera $x = a\cos t + r\cos u\cos v,\ y = a\sin t + r\cos u\sin v,\ z = r\sin u$; cercul caract eristic: $t = v$ (fig. 47).

67 Să se afle înfăşurătoarea unei familii de suprafeţe

(56) $$F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \text{ cu } \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Apl. Să se găsească înfăşurătoarea planelor care formează împreună cu feţele triedrului de referinţă un tetraedru de volum constant.

68 Se numeşte *suprafaţă analagmatică* o suprafaţă S care se transformă în ea însăşi printr-o inversiune convenabil aleasă. Se cere: a) Să se arate că S sînt înfăşurătoare de familii de sfere ortogonale unei sfere fixe (sfera

directoare) S_0 şi care au centrele pe o suprafaţă dată (suprafaţă deferentă) Σ. b) În ce se transformă o astfel de suprafaţă printr-o inversiune arbitrară. *Apl.* Să se arate că ciclidele (47^{IV}) sînt suprafeţe analagmatice.

R. a) Fie Σ de ecuaţie (11) şi $S_0 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; sferele ortogonale lui S_0 aparţin complexului $x^2 + y^2 + z^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + a^2 = 0$ cu condiţia că centrele $\Omega(\alpha, \beta, \gamma) \in \Sigma$. Printr-o inversiune faţă de S_0 obţinem acelaşi complex, iar $\Omega \in \Sigma$. *Obs.* O sferă a complexului e tangentă

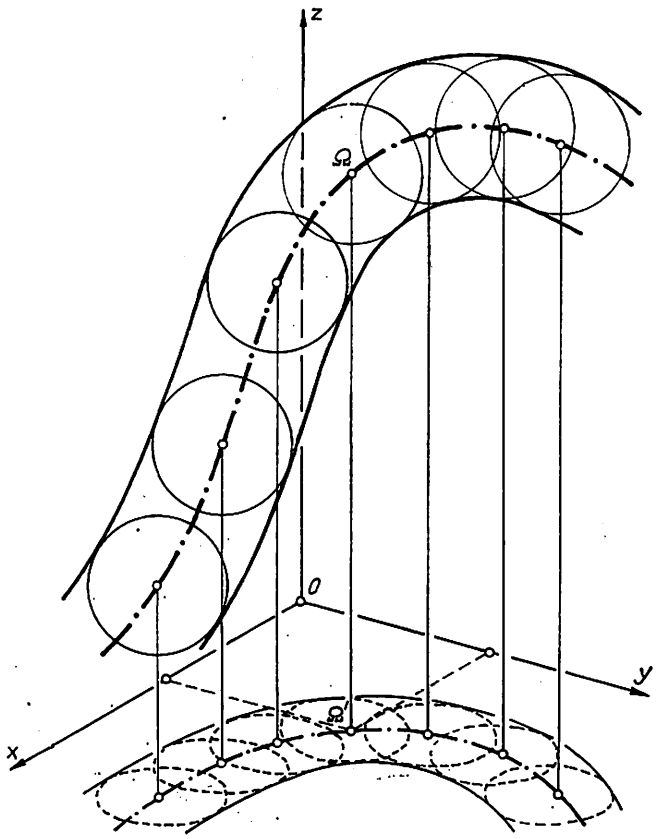


Fig. 45

înfăşurătoarei S în 2 puncte coliniare cu centrul lui S_0 şi simetrice în raport cu planul tangent la Σ în centrul sferei considerate. Această proprietate e folosită la construţia punctelor de contact cu S ale unei sfere din complex. b) Tot într-o suprafaţă analagmatică, a cărei sferă directoare e inversa lui S_0 iniţială. *Obs.* Deferentele suprafeţelor corespondente sînt echivalente proiectiv faţă de o transformare omologică, cu centrul în polul inversiunii iar planul de omologie fiind planul radical al sferelor directoare. Dacă inversiunea transformă pe S_0 într-un plan π, transformata analagmaticei e simetrica ei în raport cu π. *Apl.* Orice ciclidă e analagmatică în 5 moduri diferite, Σ fiind cuadrice (cu sau fără centru, după cum ciclida e de ordinul 4 sau 3).

69 Să se afle înfăşurătoarea S şi muchia de întoarcere C a familiei de plane : a) $hx \sin t - hy \cos t + az = aht$; b) $hx \operatorname{sh} t - hy \operatorname{ch} t + az = aht$.

70 Pe axele de coordonate se consideră 3 puncte fixe M_i astfel încît $OM_1 \neq OM_2 \neq OM_3$ şi 3 puncte variabile P_i astfel încît $M_1P_1 = M_2P_2 = M_3P_3$; să se afle muchia de întoarcere a planelor $P_1P_2P_3$.

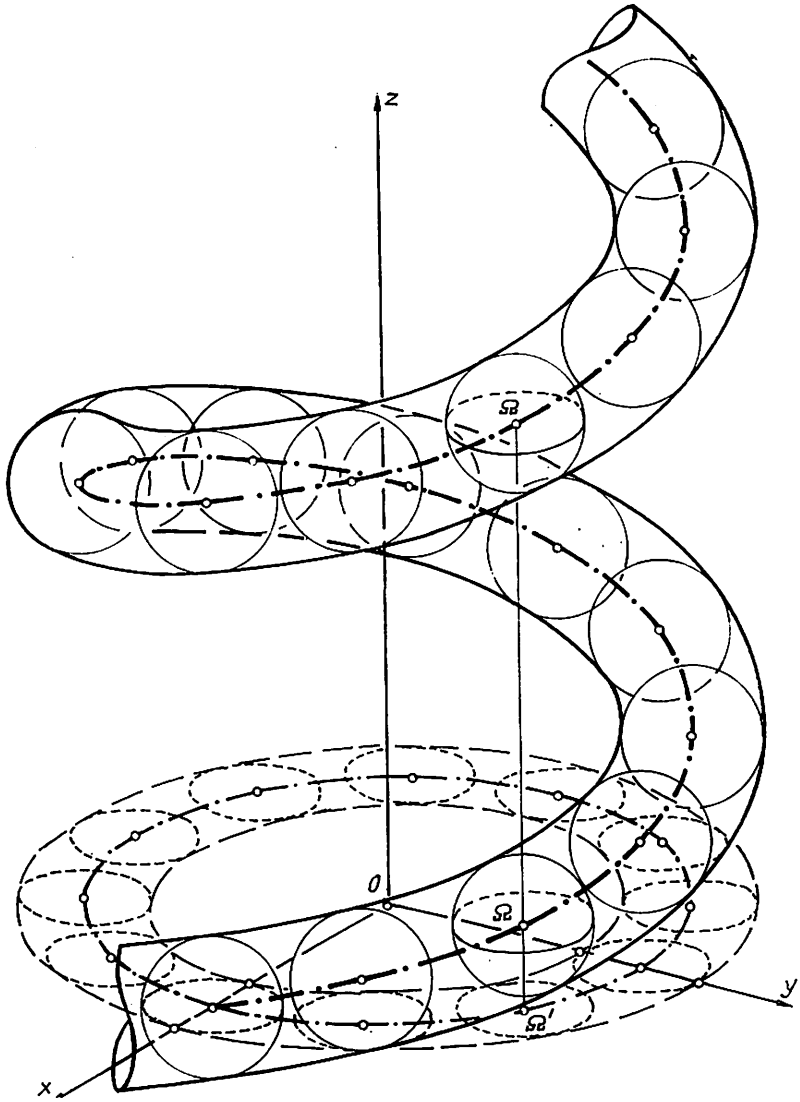


Fig. 46

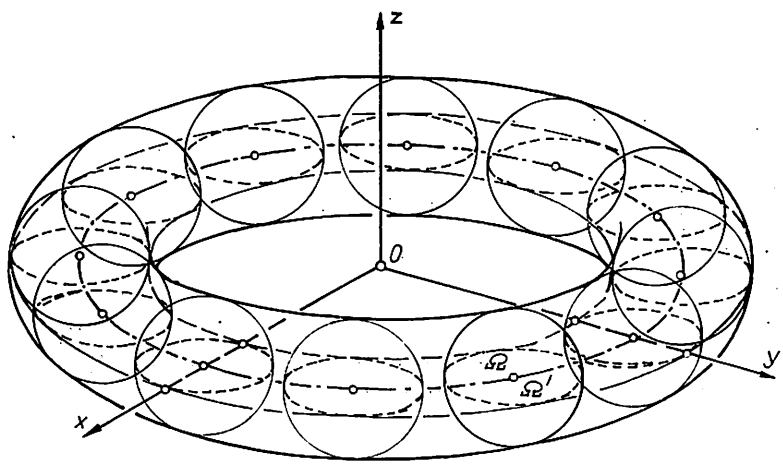


Fig. 47

71 Să se afle înfășurătoarea planelor tangente cercului $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$ și parabolei $y^2=2px$, $x=0$.

72 Se dau 2 parabole tangente axei Oz, $p_1:(z-a)^2=2px$, $y=0$ și $p_2:(z+a)^2=2py$, $x=0$. Din $P\in Oz$ se duc tangente (diferite de Oz) la cele 2 parabole, care taie în M pe p_1 și în N pe p_2. Să se arate că dreapta MN generează o suprafață desfășurabilă; se cere curba de întoarcere.

73 Să se determine muchia de întoarcere a suprafeței desfășurabile tangentă la paraboloidul $az=xy$ în lungul intersecției paraboloidului cu cilindrul $x^2=by$.

R. De-a lungul curbei de intersecție avînd $y=x^2/b$, π_t în $P(x,y,z)$ la paraboloid e $x^2X+bxY-abZ-x^3=0$. Notînd $X=v$, $x=u$, obținem suprafața desfășurabilă $S: X=v$, $Y=(3u^2-2uv)/b$, $Z=(2u^3-vu^2)/ab$. Însă, de-a lungul curbei de întoarcere Γ, avem $\bar N=\bar r_u\times\bar r_v=0$, adică $\bar r_v=\lambda\bar r_u$; deci, din $1/0=-u/(3u-v)=-u/2(3u-v)$, obținem $\Gamma: 3u-v=0$ sau $x=3t$, $y=-3t^2/b$, $z=-t^3/ab$.

74 Fie a) $C: x=u^{-1}$, $y=-3u^{-2}$, $z=u^{-3}$ și $S: x^2+y^2+z^2=1$; b) $C: x=u^{-1}$, $y=u^{-2}$, $z=u^3$ și $S: 15x^2-6y^2+z^2=10$. Să se afle înfășurătoarea Σ a planelor polare π_p ale lui C în raport cu S și curba de întoarcere Γ a lui Σ.

75 Dacă planului osculator π_0 în punctul curent P al unei curbe C îi corespunde un plan π paralel cu π_p după o lege oarecare, atunci muchia de întoarcere a înfășurătoarei planelor π e o transformată Combuscure a curbei C.

76 Fiind dată o curbă strîmbă C, fețele triedrului $S-F$ formează familii de plane cu un parametru. Care sînt înfășurătorile acestor plane?

R. Fie $C:\bar r=\bar r(s)$. Atunci: a) *Înfășurătoarea planelor osculatoare π_0 ale lui C e un* tors *general de tangentele lui C*; muchia de întoarcere e curba C însăși. *Obs.* Planul tangent în lungul unei generatoare a suprafeței desfășurabile

(57) $$S:\bar r=\bar r_0(u)+v\,\bar r'(u)$$

coincide cu planul osculator la curba directoare $C_0:\bar r=\bar r_0(u)$, în punctul de contact al generatoarei; căci $\pi_t=(\bar r-\bar r_0\,\bar r'_0\,\bar r''_0)=\pi_0$. b) *Înfășurătoarea planelor rectificante π_r ale lui C, numită* **desfășurabila rectificantă**, *e reprezentată de ecuația*

(57′) $$S:\overline{\bar R}=\bar r+v(\rho\bar l-\tau\bar b),$$

iar muchia de întoarcere a acestei suprafețe are ecuația

(57″) $$\Gamma:\overline{\bar R}=\bar r-\varphi\bar l/\varphi'+\bar b/\varphi'\quad(\varphi=\rho/\tau).$$

Obs. b_1) Ecuația (57′) reprezintă, pentru s dat, dreapta caracteristică a lui π_r, numită *dreapta rectificantă*; ea face cu tangenta un unghi θ dat de $\operatorname{tg}\theta=-\tau/\rho$. b_2) Desfășurata rectificantă a unei elice e un cilindru; căci $\varphi'=0$ iar punctul caracteristic (57″) e la infinit pe dreapta rectificantă. b_3) Desfășurata rectificantă e un con dacă punctul caracteristic (57″) e fix; deci $\varphi=as+b$. c) *Înfășurătoarea planelor normale π_n ale lui C e* **suprafața polară** (sin.: **desfășurabila polară**) *asociată lui C* (v. probl. II, 136 și 154); dreapta caracteristică e axa polară (care intersectează pe π_0 în centrul de curbură) iar muchia de întoarcere e locul centrelor sferelor osculatoare ale lui C.

77 Se numește *desfășurabilă asimptotică* a unei suprafețe riglate (nedesfășurabilă) înfășurătoarea planelor asimptotice ale generatoarelor suprafeței; cînd această înfășurătoare e un con (planul asimptotic trece printr-un punct fix), atunci avem o *suprafață riglată cu centru*, centrul fiind vîrful conului. Să se arate că existența unei desfășurabile asimptotice nu e asigurată pentru orice suprafață riglată. *Apl.* Cazul $S: x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+\cos v$.

78 Să se afle muchia de întoarcere a înfășurătoarei planelor osculatoare ale unei curbe izotrope.

79 Să se determine înfășurătoarea familiei de plane (21) cu A, B, C, D funcții de parametrii α și β. *Apl.* Fiind date o suprafață S și un punct fix Ω, construind în fiecare punct P al lui S planul care conține acest punct și e perpendicular pe ΩP, se obține o familie de plane cu 2 parametri, care — în general — admite o înfășurătoare Σ, numită *suprafața antipodară* asociată lui S și polului Ω.

4. PRIMA FORMĂ FUNDAMENTALĂ A UNEI SUPRAFEȚE

80 Să se determine prima formă fundamentală a unui elicoid.

81 Fiind dat paraboloidul eliptic $S: x^2 + y^2 = 2z$, se cere: a) Să se afle prima formă fundamentală luînd ca parametri u, v pe suprafață coordonatele polare ρ, θ în planul xy. b) Să se găsească o rețea izotermă pe S.

82 Să se aducă la forme canonice metrica unei suprafețe riglate.

R. Fie suprafața riglată (34); cu $\bar{a}^2 = 1$, încît $\bar{a}.\bar{a}' = 0$, obținem

(59) $ds^2 = (L + 2Mv + Nv^2)\,du^2 + 2P\,du\,dv + dv^2$, $L = \bar{r}_0'^2$, $M = \bar{r}_0'.\bar{a}'$, $N = \bar{a}'^2$, $P = \bar{r}_0'.\bar{a}$.

Putem încă presupune că tangenta la curba directoare $C_0: \bar{r} = \bar{r}_0(u)$ e perpendiculară pe generatoare; deci $P = 0$. Dacă $L = 0$, deci S *e un con*, avem și $M = 0$; deoarece $P = 0$ și luînd $dU = \sqrt{N}\,du$, putem avea $N = 1$, adică

(59′) $$ds^2 = v^2\,du^2 + dv^2.$$

E metrica planului xy raportat la coordonatele polare $v = \rho$, $u = \theta$. Dacă $L \neq 0$, putem admite că arcul pe C_0 e parametrul u, adică $L = 0$; deci

(59″) $$ds^2 = (1 + 2Mv + Nv^2)\,du^2 + dv^2.$$

Obs. a) Cînd $N = 0$, deci S *e un cilindru*, avem și $M = 0$; obținem metrica planului xy raportat la coordonatele carteziene ortogonale ($u = x$, $v = y$). b) Forma (59) mai poate fi scrisă

$$ds^2 = (L + 2Mv + Nv^2 - P^2)\,du^2 + (P\,du + dv)^2;$$

putem lua $U = u$, $V = \int P du + dv$, obținînd $F = 0$ (U = const. și V = const. sînt ortogonale).

Dacă $\bar{a} = \bar{r}_0'$, deci S *e un tors* generat de tangentele la curba $C_0: v = 0$, avem $L = 1$, $M = 0$, $N = 1/\rho^2$, $P = 1$, unde ρ e raza de curbură a lui C_0 (funcție numai de u). Luînd $U = u$, $V = u + v$, obținem

(59‴) $$ds^2 = (u - v)^2\,du^2/\rho^2 + dv^2 \text{ cu } \rho = \rho(u);$$

deci $S: \bar{r} = \bar{r}_0 + (v - u)\,\bar{r}_0'$, $C: v = u$ cu $\bar{r}_0'^2 = 1$ ($L = u^2/\rho^2$, $M = -u/\rho^2$, $N = 1/\rho^2$, $P = 0$).

83 Dacă prin transformarea $U = U(u, v)$, $V = V(u, v)$ suprafața $S(u, v)$ e reprezentată conform pe planul $\pi(U, V)$, se spune că planul π e *harta* lui S; cînd S e o sferă, acest procedeu e numit *proiecția lui Mercator*, obținîndu-se *harta lui Mercator*. Fiind dată o suprafață de rotație S, se cere: a) Să se determine harta lui S, scriindu-se sub forma izotermă metrica suprafeței. b) Să se arate că metrica lui S poate fi adusă totdeauna la forma

(60) $$ds^2 = du^2 + h^2(u)\,dv^2.$$

Apl. a) Să se studieze *curba lui Sumner*, care e curba plană ce corespunde unui cerc al sferei prin proiecția lui Mercator. b) Să se calculeze prima formă fundamentală pentru cazuri particulare.

R. a) Fie suprafața de rotație (6) sau (6′); atunci

(60 a) $$ds^2 = (\rho'^2 + \psi'^2)\,du^2 + \varphi^2 dv^2 \text{ sau } ds^2 = (1 + f'^2)\,du^2 + u^2 dv^2.$$

Harta lui S se obține deci prin transformarea

(60 b) $$U = \int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi}\,du,\ V = v, \text{ respectiv } U = \int \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{u}\,du,\ V = v.$$

Meridianele $v = \text{const.}$ și paralelele $u = \text{const.}$ de pe S devin dreptele $V = \text{const.}$ și $U = \text{const.}$ pe harta π (paralele cu axele carteziene ortogonale din plan). b) Obținem forma (60), luînd

$$U = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,du,\ V = v \text{ sau } U = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + f'^2}\,du,\ V = v.$$

Obs. Parametrul U e arcul, pe orice meridian, măsurat de la paralelul $u = u_0$; ca și $\varphi(u)$ în sistemul inițial de coordonate, $h(U) = \varphi[u(U)]$ e raza paralelului corespunzător valorii U a noului parametru. *Apl.* a) Pentru sfera (7), sau (7′), obținem metrica

(60′) $$ds^2 = r^2(du^2 + \cos^2 u\,dv^2) \text{ sau } ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2);$$

deci: proiecția lui Mercator e dată de transformarea

(60′ a) $$U = \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + u/2),\ V = v, \text{ respectiv } U = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ V = v.$$

Fie cercul $C: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $Ax + By + Cz + D = 0$ de pe sfera (7′); atunci $\theta = 2 \operatorname{arc\,tg} e^U$ iar $\sin\theta = 1/\operatorname{ch} U$, $\cos\theta = \operatorname{th} U$, încît $C: r(A\cos V + B\sin V) + Cr \operatorname{sh} U + D \operatorname{ch} U = 0$. În cazul special $A = C = 1$, $B = 0$, $D = -r$, obținem $C: \cos V = e^{-U}$, care are ecuația intrinsecă $\rho = \operatorname{ch} s$. b) Pentru *torul* (8), rezultă

(60″) $$ds^2 = r^2\,du^2 + (a + r\cos u)^2\,dv^2.$$

Considerînd *catenoidul* (9), luînd o reprezentare sau alta, găsim

(60‴) $$ds^2 = u^2\,du^2/(u^2 - a^2) + u^2\,dv^2 \text{ sau } ds^2 = \operatorname{ch}^2\frac{u}{a}(du^2 + a^2\,dv^2).$$

Fie *pseudosfera* (10); metrica ei are expresia

(60^{IV}) $$ds^2 = a^2(\operatorname{ctg}^2 u\,du^2 + \sin^2 u\,dv^2);$$

ea degenerează (se reduce la un singur pătrat) pentru $u = \pi/2$ și $u = \pi$, adică forma pătratică (60^{IV}) definește distanțele pe pînza superioară a pseudosferei ($\pi/2 < u < \pi$, $0 \leqslant v < 2\pi$). Însă metrica (60^{IV}) definește distanțele și pentru puncte P cu $u < 0$ sau $u > 2\pi$, considerînd identice 2 puncte $P_0(u_0, v_0)$ și $P_1(u_0, v_1)$ cu $v_1 - v_0 = 2n\pi$. Totuși e convenabil a considera aceste puncte distincte, ceea ce revine a presupune suprapuse în P_0 o infinitate de alte puncte P_n cu $v_n = v_0 + 2n\pi$. Varietatea $V_2(u, v)$ astfel obținută, considerînd pseudosfera înfășurată de una din pînze de o infinitate de ori, se numește *suprafața universală de acoperire a pseudosferei* și are metrica (60^{IV}) cu $\pi/2 < u < \pi$, $-\infty < v < +\infty$. Luînd $\sin u = e^{-\beta/a}$, $v = \alpha/a$, cînd $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < +\infty$:

(60^{IV} a) $$ds^2 = e^{-2\beta/a} d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Interpretînd pe α, β drept coordonatele carteziene ortogonale într-un plan, rezultă că la orice punct al lui $V_2(u, v)$ corespunde un punct în semiplanul $\beta > 0$; însă metrica (60^{IV} a) e regulată (pozitiv definită) și pentru punctele $\beta \leqslant 0$. Se spune că spațiul $V_2(\alpha, \beta)$ care are metrica (60^{IV} a), numit *planul lui Lobacevski-Bolyai*, e o formă spațială completă; între $V_2(u, v)$ și $V_2(\alpha, \beta)$ nu avem o corespondență biunivocă, chiar dacă s-ar considera și suprafața universală de acoperire a pseudosfere

inferioare (căci și această a doua suprafață se reprezintă tot peste semiplanul $\beta>0$, iar linia comună celor 2 suprafețe e o linie de puncte singulare). Cu $\alpha = ax$, $e^{\beta/a} = y$ $(x \in R,\ y \in R^+)$:

(60^{IV} b) $$ds^2 = a^2(dx^2 + dy^2)/y^2;$$

semiplanul $(x, y \gtrless 0)$ se mai numește *semiplanul lui Klein-Poincaré*, existînd o bijecție între acest semiplan și $V_2(\alpha, \beta)$.

84 Utilizînd *proiecția centrală* a sferei pe un plan tangent al ei, această proiecție duce 2 puncte diametral opuse ale sferei în un același punct al planului tangent; suprafața obținută prin identificarea punctelor diametral opuse ale sferei se numește *planul eliptic*. Să se determine metrica acestui plan.

R. Fie sfera $S: X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2$ și planul tangent π în $N(0, 0, r) \in S$; un punct al lui π e (x, y, r), încît dreapta $X = \rho x$, $Y = \rho y$, $Z = \rho r$ taie pe S în puncte astfel încît $\rho^2 = 1/[1 + K(x^2 + y^2)]$ cu $K = 1/r^2$. Din $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$, se obține metrica planului eliptic

(61) $$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/[1 + K(x^2 + y^2)] - K(x\,dx + y\,dy)^2/[1 + K(x^2 + y^2)]^2.$$

Obs. a) Prin proiecția centrală pe $\pi: Z = r$, se presupune că punctul lui S are $Z \neq 0$; cînd $Z = 0$, se face proiecția centrală pe planul tangent $X = r$ sau $Y = r$. Cu 3 proiecții centrale, se obțin toate punctele sferei. b) Considerînd $K<0$ (r e o constantă imaginară), avem pentru $x^2 + y^2 < r^2$:

(61′) $$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/[1 - (x^2 + y^2)/r^2] + (x\,dx + y\,dy)^2/r^2[1 - (x^2 + y^2)/r^2]^2;$$

e metrica *planului hiperbolic*, metrică ce convine geometriei Lobacevski-Bolyai. Există 2 modele importante ale planului hiperbolic, modelul Klein-Poincaré cu metrica (60^{IV} b) și modelul proiectiv cu metrica (61′).

85 Fie suprafețele S_t, S_n și S_b generate de muchiile triedrului $S-F$ al curbei strîmbe $C: \bar{r} = \bar{r}(\sigma)$, unde σ e arcul curbei. Se cere: a) Cu ajutorul planului tangent π în P la S, cînd P descrie generatoarea ce trece prin el, să se determine care dintre suprafețele considerate e o suprafață desfășurabilă și să se specifice curba ei de întoarcere. b) Să se afle metrica suprafețelor S_t, S_n și S_b.

86 Să se determine metricele suprafețelor polare și desfășurabilei rectificante ale unei curbe în spațiu.

5. PROPRIETĂȚI INTRINSECE ALE UNEI SUPRAFEȚE

87 Fie suprafața $S: x = u,\ y = v,\ z = \sin(u + v)$. Să se determine unghiul dintre: a) curbele $C_1: u + v = 0$ și $C_2: u - v = 0$; b) Oz și normala la S în $P_0 = C_1 \cap C_2$.

88 Fie elicoidul riglat $S: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$. Se cere: a) Să se determine curba $u = \text{const.}$ care taie toate curbele $v = \text{const.}$ sub un unghi de 60°. b) Să se calculeze lungimile laturilor și unghiurile triunghiului curbiliniu format de curbele $C_1: u = 1$, $C_2: v = -1$ și $C_3: u - v = 1$. c) Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe $u = Ce^v$. d) Să se raporteze suprafața la curbele $v = \text{const.}$ și la traiectoriile lor ortogonale, drept curbe coordonate.

R. a) $E = 2$, $F = 1$, $G = u^2 + 1$, $\cos\theta = F/\sqrt{EG}$; deducem $u = \pm 1$. b) $C_1 \cap C_2 = A(u = 1,\ v = -1)$, $C_1 \cap C_3 = B(u = 1,\ v = 0)$ și $C_2 \cap C_3 = C(u = 0,\ v = -1)$. Pe $C_1: du = 0$, deci $\text{arc}\,AB = \int_{-1}^{0} \sqrt{2}\,dv = \sqrt{2}$. Pe $C_2: dv = 0$, deci $\text{arc}\,AC = \sqrt{2}$. Pe $C_3: du - dv = 0$

și arc $BC = \sqrt{6}/2 + 5(\ln(1+\sqrt{6}) - \ln 5)/2$. $\hat{A}$ e dat de direcțiile $(du = 0,\ dv)$ și $(\delta u,\ \delta v = 0)$; deci $\cos \hat{A} = (F/\sqrt{EG})_A = 1/2$, adică $\hat{A} = \pi/3$. $\hat{B}$ e dat de $(du = 0,\ dv)$ și $(\delta u,\ \delta v = \delta u)$, deci $\cos \hat{B} = [(F+G)/\sqrt{G(E+2F+G)}]_B = 3/2$, adică $\hat{B} = \pi/6$. $\hat{C} = \arccos \dfrac{3}{10}$. *Obs.* Unghiul e determinat de vectorii tangenți al căror sens corespunde creșterii parametrului; deci (fig. 48): $\hat{A}$ e valoarea unghiului exterior cu vîrful în A, încît unghiul interior e $2\pi/3$. c) Ecuația diferențială a

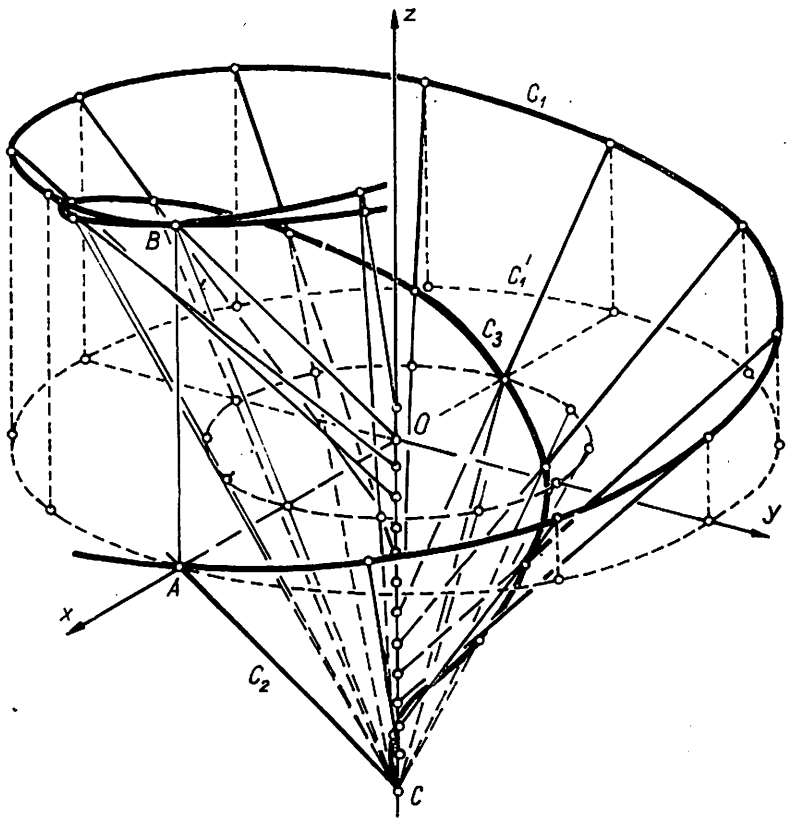


Fig. 48

familiei: $du = u\,dv$; deci condiția de ortogonalitate: $(2u+1)\,\delta u + (u^2+u+1)\,\delta v = 0$ cu soluția $u^2+u+1 = C'e^{-v}$, reprezentînd ecuația în termeni finiți a traiectoriilor ortogonale. d) Traiectoriile ortogonale ale lui $v = C$ sînt $2u + v = C'$. Facem transformarea $U = 2u + v$, $V = v$ și $S: 2x = (U - V)\cos V$, $2y = (U - V)\sin V$, $2z = U + V$.

89 Fiind dat elicoidul riglat oblic (16), să se determine relația dintre a și k astfel încît familiile de curbe $v = u + C$ și $v = 1/u + C'$ de pe elicoid să fie ortogonale una alteia.

90 Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiilor de curbe $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ și $u - v = \text{const.}$ ale suprafeței $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + v$.

91 Sînt ortogonale curbele trasate pe o suprafață S și care satisfac ecuațiile $\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv = 0$ și $\sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv = 0$?

92 Fie suprafaţa şurub (16′). Să se determine: a) Unghiul sub care se intersectează curbele $\Gamma_1 : u + v = 0$ şi $\Gamma_2 : u - v = 0$. b) Perimetrul, unghiurile şi aria triunghiului curbiliniu format prin intersecţia curbelor $C_1 : u = kv^2/2$, $C_2 : u = -kv^2/2$ şi $C_3 : v = 1$. c) Traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe $u = k \operatorname{sh}(v + C)$. d) Aria patrulaterului mărginit de curbele $u = 0$, $u = k$, $v = 0$ şi $v = \pi$.

R. a) $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + k^2$, $\cos\theta = (1 - k^2)/(1 + k^2)$. *Obs.* Putem determina pe k astfel ca θ să fie $\pi/2$, $\pi/3$ sau $\pi/6$. b) $C_1 \cap C_2 = A(u = v = 0)$, $C_1 \cap C_3 = B(u = k/2,\ v = 1)$, $C_2 \cap C_3 = C(u = -k/2,\ v = 1)$; pe C_1: $du = k v\, dv$, pe C_2: $du = -kv\, dv$, pe C_3: $dv = 0$ încît arc AB = arc $AC = 7k/6$, arc $CB = k$ iar perimetrul $p = 10k/3$. Găsim $\hat{A} = 0$, $\hat{B} = \hat{C} = \arccos\frac{2}{3}$. Avem $\sigma = 2\int_0^{k/2} \sqrt{u^2 + k^2}\, du \int_{2u/k}^{1} dv = k^2\left(\frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{5}}{12} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. c) Ecuaţia diferenţială a familiei: $du = u^2 + k^2\, dv$, condiţia de ortogonalitate: $\delta u = -\sqrt{u^2 + k^2}\, \delta v$ cu soluţia $\ln(u + \sqrt{u^2 + k^2}) = -v + C'$ sau (luînd $C' = \ln C - C''$) $u = -k \operatorname{sh}(v + C'')$. d) $\sigma = \int_0^{\pi} dv \int_0^{k} \sqrt{u^2 + k^2}\, du = \frac{\pi k^2 \sqrt{2}}{2}[1 + \ln(1 + 2)]$.

93 Să se arate că unghiul θ format de două linii situate pe o suprafaţă S e dat de formula $\sin\theta = \frac{EG - F^2}{ds\,\delta s}\begin{vmatrix} du & dv \\ \delta u & \delta v \end{vmatrix}$.

94 Să se determine ecuaţiile diferenţiale ale liniilor bisectoare ale reţelei constituite din familiile de curbe $C_i : dv/du = f_i(u, v)$, $(i = 1, 2)$. *Apl.* a) Să se afle reţeaua bisectoare a reţelei curbelor coordonate pentru: a_1) o suprafaţă S de ecuaţie (13); a_2) paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$. b) Dacă S e raportată la o reţea izotermă, reţeaua e bisectată de $C_1 : u + v = \text{const.}$ şi $C_2 : u - v = \text{const.}$, constituind o reţea izotermă.

R. Fie $(d_i u, d_i v)$ şi $(\delta u, \delta v)$ direcţiile tangentelor la C_i şi la bisectoare; din $\cos\theta_1 = \pm\cos\theta_2$ şi ţinînd seama de ecuaţiile diferenţiale ale lui C, avem

$$(62)\qquad \frac{E\,\delta u + F(f_1\,\delta u + \delta v) + G f_1\,\delta v}{\sqrt{E + 2Ff_1 + Gf_1^2}} = \pm\frac{E\,\delta u + F(f_2\,\delta u + \delta v) + G f_2\,\delta v}{\sqrt{E + 2Ff_2 + Gf_2^2}}.$$

Apl. a_1) Deoarece $(d_1 u = 0,\ d_1 v)$ şi $(d_2 u, d_2 v = 0)$, ecuaţiile (62) devin

$$(62')\qquad E\delta u^2 - G\delta v^2 = 0.$$

a_2) $\theta = \pm\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln((\sqrt{\rho^2 + 1} - 1)/(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1))\right) + \text{const.}$ (v. şi probl. 81). b) Cum $E = G$, $F = 0$, ecuaţiile (62′) admit ca soluţii pe C_i. Luînd $U = u + v$, $V = u - v$, obţinem $ds^2 = \lambda(dU^2 + dV^2)$ cu $\lambda = E((U + V)/2, (U - V)/2)$. *Obs.* C_i sînt ortogonale. Fie $\theta_i = \widehat{(u_0, C_i)}$ şi $\varphi_i = \widehat{(v_0, C_i)}$; atunci $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = -1/\sqrt{2}$ şi $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ încît $\theta_1 = \theta_2 + \pi/2$ şi $\theta_1 - \varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \theta_2$.

95 Fiind dată o familie (regulată) de curbe C pe o suprafaţă S, se numesc **traiectorii izogonale** *ale lui C pe S* curbele unei alte familii (regulate) C' de pe S care taie sub acelaşi unghi pe cele ale familiei C; cînd S e de rotaţie şi C sînt meridianele lui S, C' sînt **loxodromele** *lui S* (v. şi probl. II, 34). Să se deducă ecuaţia diferenţială a familiei C. *Apl.* a) Să se determine traiectoriile izogonale ale liniilor coordonate de pe o suprafaţă S. b) Să se găsească

loxodromele unei suprafeţe de rotaţie S; cazuri particulare. c) Să se afle traiectoriile izogonale ale generatoarelor unei suprafeţe riglate S.

R. Fie $C: dv/du = f(u, v)$; din expresia lui $\cos^2 V$ (V — const.), deducem

$$\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{\triangle f + (E + Ff)(F + Gf)\operatorname{tg}^2 V \pm \sqrt{\triangle}(E + 2Ff + Gf^2)\operatorname{tg} V}{\triangle - (F + Gf)^2 \operatorname{tg}^2 V} \quad (\triangle = EG - F^2). \tag{63}$$

Obs. Odată cu traiectoriile de unghi V, se definesc şi cele de unghi $\pi - V$. *Apl.* a) Fie $C: u =$ = const. sau $C: v =$ const.; atunci C':

$$\frac{F^2 - EG\cos^2 V}{G\sin^2 V}\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2 = 0;\quad E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + \frac{F^2 - EG\cos^2 V}{E\sin^2 V}\delta v^2 = 0. \tag{63'}$$

Obs. Dacă $V = \pi/2$, *traiectoriile ortogonale* liniilor coordonate sînt C':

$$F\,\delta u + G\,\delta v = 0, \text{ respectiv } E\,\delta u + F\,\delta v = 0. \tag{63''}$$

b) Fie S de ecuaţii (6), deci $C: v =$ const., $C': v\operatorname{ctg} V = \pm\int\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,du/\varphi +$ const. Avem: *pe harta unei suprafeţe de rotaţie, loxodromele sînt reprezentate prin drepte. Cazuri particulare.* Pentru sfera (7'), $C': \varphi\operatorname{ctg} V = \ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. *Obs.* Transformarea (60 b) e $u = \int d\theta/\sin\theta = \ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $v = \varphi$; metrica izotermă: $ds^2 = r^2\sin^2(2\operatorname{arc\,tg} e^u)(du^2 + dv^2)$. Loxodroma ce trece prin $P_0(\varphi_0, \theta_0)$: $(\varphi - \varphi_0)\operatorname{ctg} V = \pm\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}/\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)$ se transformă în dreapta $v - v_0 = \pm(u - u_0)\operatorname{tg} V$. Pentru catenoidul (9 a), $C': v\operatorname{ctg} V = \pm\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) +$ const., iar pentru pseudosfera (10), C': $v\operatorname{ctg} V = \pm 1/\sin u +$ const. *Obs.* Folosind metrica (60), $C': v\operatorname{ctg} V = \pm\int du/h(u) +$ const. De exemplu, pentru un con: $h = ku$ încît $C': v\operatorname{ctg} V = \pm\ln u/k +$ const., adică $u = C'\,e^{av}$ (elice cilindro-conică); pentru sfera (7): $h = \cos u$, încît $C': v\operatorname{ctg} V = \pm\ln\operatorname{tg}(\pi/4 + u/2) +$ const. c) Fie S de ecuaţie (34), deci $C: u =$ const. Dacă S (nedesfăşurabilă) are metrica (59''), $C': \operatorname{tg} V\delta v \pm$ $\pm\sqrt{1 + 2Mv + Nv^2}\,\delta u - 0$; fie S (desfăşurabilă) de metrică (59'''), cînd $C': (u - v)\,\delta u/\rho \pm$ $\pm\operatorname{tg} V\delta v = 0$. *Obs.* Traiectoriile ortogonale lui C, S fiind de metrică (59), sînt $C': \int P(u)\,du + v =$ = const; cînd S e desfăşurabilă: $P = 1$.

96 Fiind dată o familie de suprafeţe S_α cu un parametru, dacă pe fiecare S_α se consideră, după o lege determinată, un punct P_α, locul lui P_α cînd α variază e o curbă C, numită *traiectorie* (sin.: *curbă transversală*) a familiei S_α; dacă C taie pe S_α sub un acelaşi unghi constant, ea e *traiectoria izogonală* a familiei S_α. Să se afle *traiectoriile ortogonale* ale familiei S_α. *Apl.*: fascicul de plane.

R. Fie $S: \bar r = \bar r(u, v, \alpha)$. Legea dată se exprimă prin $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$; $C: \bar r = \bar r(u(\alpha), v(\alpha), \alpha)$. Dacă C e o curbă izogonală (fig. 49), fie V unghiul dintre tangenta la $C: \bar l = \bar r_u u' + \bar r_v v' +$ $+ \bar r_\alpha$ şi normala la $S_\alpha: \bar N = \bar r_u \times \bar r_v$; ecuaţia

$$\triangle\bar l^2\sin^2 V = (\bar N \times \bar l)^2 \quad (V - \text{const.},\ \triangle = EG - F^2) \tag{64}$$

determină pe $u = u(\alpha)$ şi $v = v(\alpha)$. Dacă $V = 0$, obţinem traiectoriile ortogonale ale lui S_α, definite de

$$\triangle u' + (G\bar r_u - F\bar r_v)\cdot\bar r_\alpha = 0,\ \triangle v' - (F\bar r_u - E\bar r_v)\cdot\bar r_\alpha = 0; \tag{64'}$$

soluţia generală $u = u(\alpha, C_1, C_2)$, $v = v(\alpha, C_1, C_2)$ e *congruenţa ortogonală* a lui S_α. *Obs.* a) Ecuaţiile (64') se obţin şi din condiţiile $\bar l\cdot\bar r_u = 0$, $\bar l\cdot\bar r_v = 0$. b) Fie $S_\alpha: F(x, y, z, \alpha) = 0$; din condiţia $\bar l \parallel \bar N$, rezultă că congruenţa ortogonală a lui S_α e formată din curbele integrale ale sistemului diferenţial

$$dx/F_x = dy/F_y = dz/F_z. \tag{64''}$$

Apl. Luînd axa fasciculului ca Oz, S_α: $x = u$, $y = \alpha u$, $z = v$. Deci curbele izogonale sînt curbele integrale ale ecuației diferențiale

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sin^2 V = (x^2 + y^2)\,dz^2 + (x\,dx + y\,dy)^2;$$

soluția generală: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(t) + C_1$ și $u = f(t)$, $v = 2\operatorname{ctg} V \ln f(t) + C_2$. Congruența ortogonală: cercurile $x^2 + y^2 = C_1$, $z = C_2$.

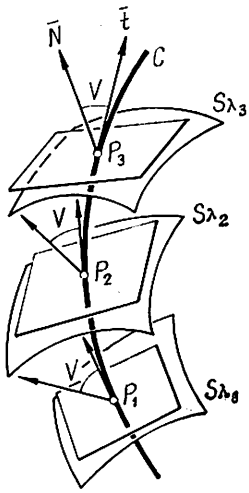


Fig. 49

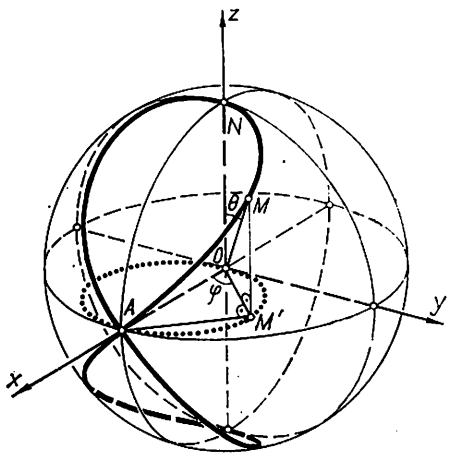


Fig. 50

97 Să se determine aria porțiunii Σ a suprafeței de rotație S. [*Apl.* a) Aria sferei. b) Aria torului. c) Aria porțiunii Σ delimitată pe o sferă de fereastra lui Viviani (problema Viviani). d) Aria domeniului sferic Σ mărginit de meridianul zero, de un arc de loxodromă avînd originea în intersecția A a meridianului zero cu ecuatorul iar extremitatea în P și de paralelul trecînd prin P.

R. Fie S de ecuații (6′). Deci, cu $d\tau = \sqrt{1 + f'^2}\,du$ elementul de arc al meridianului, avem $\sigma = \int_{u0}^{u_1} u\sqrt{1 + f'^2}\,du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_{\tau_0}^{\tau_1} u\,d\tau$. *Obs.* $d\sigma = 2\pi\,u\,d\tau$ e aria laterală a cilindrului circular drept avînd baza cu diametrul $2u$ și de generatoare $d\tau$. *Apl.* a) Pentru sfera (7): $f = \sqrt{r^2 - u^2}$, încît $\sigma = 2\pi\left[-2r\int_0^r d(\sqrt{r^2 - u^2})\right] = 4\pi r^2$. b) Fie torul (8); în planul Ozu, meridianul: $u = a + r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, încît $d\tau = \sqrt{du^2 + dz^2} = r\,d\varphi$. Atunci $\sigma = 2\pi\int_0^{2\pi}(a + r\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi^2 ar$. c) Fie S de ecuații (7′) și cilindrul $x^2 + y^2 = ax$. Pentru S: $\Delta = a^4\sin^2\theta$, deci $\sigma = 4(a^2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\theta} \sin\theta\,d\theta)$. Însă, în coordonatele φ, θ, curba NMA: $\sin\theta = \cos\varphi$, adică $\theta = \pi/2 - \varphi$; căci (fig. 50): $OM' = OA\cos\varphi = OM\sin\theta$ iar $OA = OM = r$. Deci $\sigma = 4r^2(\pi/2 - 1)$. d) Fie sfera S de ecuații (6′) și loxodroma C: $\varphi = \operatorname{tg} V \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$; deci

$$\sigma = r^2\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\operatorname{tg}V\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} d\varphi = r^2\operatorname{tg}V\left(-\cos\theta\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \ln\sin\theta\right).$$

98 Să se arate că elementul de arie e un invariant diferențial al unei suprafețe. *Apl.* Să se determine aria porțiunii Σ delimitată pe $S: x = u$, $y = v$, $z = (u^2 + v^2)/2$ de $S': x = u$, $y = \cos v/2\sqrt{2}$, $z = (1 + \sin v)/4$.

99 Aria porțiunii simple și netede Σ de pe suprafața (11) e

$$\sigma = \iint_D (\sqrt{\mathrm{F}_x^2 + \mathrm{F}_y^2 + \mathrm{F}_z^2}/\mathrm{F}_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{65}$$

domeniul D fiind proiecția pe planul Oxy a porțiunii Σ.

100 Să se stabilească relațiile între simbolurile lui Christoffel de prima și a doua speță. *Apl.* a) Să se determine conexiunea Levi-Civita pentru o suprafață: a) de rotație; a_2) riglată; a_3) raportată la o rețea izotermă. b) Să se arate că

$$\mathrm{d}\ln\sqrt{\Delta} = \left(\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)\mathrm{d}u + \left(\begin{vmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)\mathrm{d}v.$$

R. Se verifică ușor că $(i, j, k = 1, 2)$

$$|i\ j,\ 1| = E\begin{vmatrix} 1 & \\ i & j \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} & 2 \\ i & j \end{vmatrix},\quad |i\ j,\ 2| = F\begin{vmatrix} 1 & \\ i & j \end{vmatrix} + G\begin{vmatrix} & 2 \\ i & j \end{vmatrix} \tag{66}$$

și

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ i & j \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(G\,|i\,j, 1| - F\,|i\,j, 2|),\quad \begin{vmatrix} & 2 \\ i & j \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(-F\,|i\,j, 1| + E\,|i\,j, 2|). \tag{66'}$$

Obs. Folosind notațiile $a_{11} = E$, $a_{12} = a_{21} = F$, $a_{22} = G$, $a^{ij}a_{jk} = \delta_k$, $\Delta = |a_{ij}|$ și $x^1 = u$, $x^2 = v$, metrica spațiului $V_2(x^1, x^2)$ se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{67}$$

Atunci, simbolurile lui Christoffel pe prima și a doua speță sînt

$$|j\,l, s| = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta a_{sk}}{\delta x^j} + \frac{\delta a_{js}}{\delta x^k} - \frac{\delta a_{jk}}{\delta x^s}\right),\quad \begin{vmatrix} & i \\ j & k \end{vmatrix} = a^{is}|jk,\ s|. \tag{67'}$$

Apl. a) Conexiunea lui Levi—Civita fiind

$$\Gamma_{jk}^i = -\begin{vmatrix} & i \\ j & k \end{vmatrix}, \tag{67''}$$

atunci: a) pentru S de ecuații (6) obținem

$$\Gamma_{11}^1 = -(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')/(\varphi'^2 + \psi'^2),\quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0,\quad \Gamma_{22}^1 = \varphi'/(\varphi'^2 + \psi'^2),$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0,\quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\varphi'/\varphi,\quad \Gamma_{22}^2 = 0;$$

a_2) fie S de ecuație (34), încît ($\Delta = L - P^2 + 2Mv + Nv^2$) avem

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2\Delta}[L' - 2PP' + 2MP + 2v(M' + NP) + N'v^2],\quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{\Delta}(M + Nv),$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2\Delta}[2LM - 2LP' + L'P + 2v(2M^2 + LN - 2MP' + M'P) + v^2(6MN - 2NP' + N'P) + 2N^2v^3],$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\Delta}P(M + Nv),\quad \Gamma_{22}^2 = 0;$$

a_3) dacă metrica e izotermă: $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$, conexiunea lui S e

$$\Gamma^1_{11} = -E_u/2E,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -E_v/2E,\ \Gamma^1_{22} = E_u/2E,\ \Gamma^2_{11} = E_v/2E,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -E_u/2E,$$

$$\Gamma^2_{22} = -E_v.$$

b) $\frac{1}{2}(\ln \Delta)_u = (EG_u + GE_u - 2FF_u)/2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \ldots$ *Obs.* La fel se arată:

$$\left(\frac{E}{\Delta}\right)_{x^i} = \frac{2}{\Delta}\left(F\begin{vmatrix} & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix} - E\begin{vmatrix} 2 & \\ 2 & i \end{vmatrix}\right),\ \left(\frac{F}{\Delta}\right)_{x^i} = \frac{1}{\Delta}\left(-F\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & i \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} & 1 \\ 2 & i \end{vmatrix}\right) +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\left(G\begin{vmatrix} & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix} - F\begin{vmatrix} 2 & \\ 2 & i \end{vmatrix}\right),$$

$$\left(\frac{G}{\Delta}\right)_{x^i} = \frac{2}{\Delta}\left(F\begin{vmatrix} & 1 \\ 2 & i \end{vmatrix} - G\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & i \end{vmatrix}\right);\ \text{căci}\ \left(\frac{E}{\Delta}\right)_u = \frac{2}{\Delta}\left(|11, 1| - E\begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -\right.$$

$$\left. - E\begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \ldots$$

101 Să se arate că prin inversiune se realizează o reprezentare conformă a unei suprafeţe S pe o altă suprafaţă S'.

102 Să se arate că, prin *proiecţia stereografică*, sfera S e reprezentată conform pe planul ecuatorial π.

R. Fie S de ecuaţii (7') şi $P(\varphi, \theta) \in S$, P' proiecţia ortogonală a lui P pe π, iar $M(u, v)$ proiecţia stereografică din $N(0, 0, r)$ a lui P pe π (fig. 51). Însă $OM/ON = P'M/P'P =$

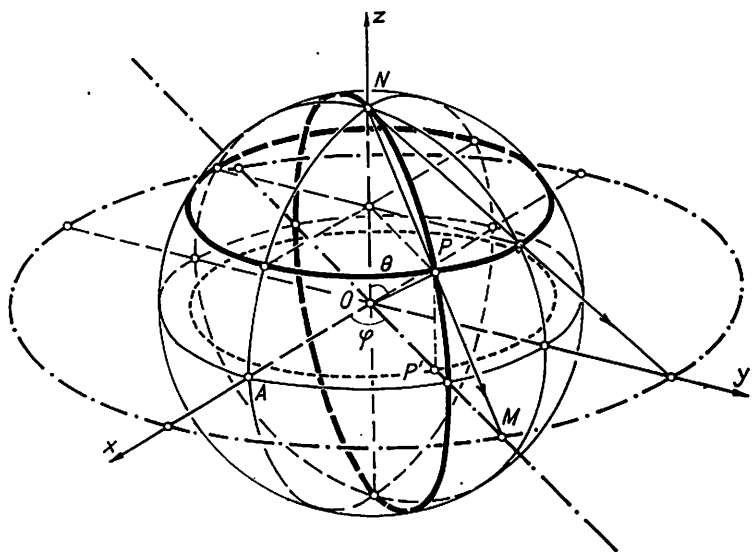


Fig. 51

$= OP'/(ON - P'P)$ iar $ON = r$, $OP' = r \sin\theta$, $P'P = r\cos\theta$; deci $OM = r\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$, încît: *prin transformarea* $u = r\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi$, $v = r\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi$ *se realizează reprezentarea conformă a sferei S pe planul ecuatorial* π; căci $du^2 + dv^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)/4\sin^4\frac{\theta}{2}$. Din ecuaţiile transformării

deducem $v/u = \operatorname{tg}\varphi$, $u^2 + v^2 = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}$, adică: *prin proiecția stereografică, meridianelor lui S le corespund în π drepte ce trec prin O iar paralelelor — cercuri cu centrul în O.* Mulțimea $K: a_0(u^2 + v^2) - 2a_1u - 2a_2v + a_3 = 0$, a dreptelor ($a_0 = 0$) și cercurilor ($a_0 \neq 0$) din π, e proiecția stereografică a secțiunii lui S cu planul $\pi': 2r(a_1x + a_2y) + (a_3 - a_0r^2)z - r(a_3 + a_0r^2) = 0$, cercurile trecînd prin N proiectîndu-se în dreptele $2(a_1u + a_2v) = a_3$; centrul unui cerc imagine e punctul în care π e intersectat de NP_0, P_0 fiind polul lui π' în raport cu S. Din $NP = 2r \sin\frac{\theta}{2}$, $NM = r/\sin\frac{\theta}{2}$ rezultă că $NP \cdot NM = 2r^2$, adică: *proiecția stereografică e determinată de transformarea prin inversiune a sferei S, polul fiind N și puterea egală cu* $2r^2$. Coordonatele lui $M \in \pi$ pot fi scrise sub forma $u = rx/(r + z)/(x^2 + y^2)$, $v = ry(r + z)/(x^2 + y^2)$; deci: corespondența stereografică între punctele (la distanță finită) ale lui π și punctele lui S e biunivocă, cu excepția lui N. Pentru $P \in S: x = 2r^2u/\lambda$, $y = 2r^2v/\lambda$, $z = r(u^2 + v^2 - r^2)/\lambda$ cu $\lambda = u^2 + v^2 + r^2$ sau $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = (u^2 + v^2 - r^2)/2r$, $x_4 = (u^2 + v^2 + r^2)/2r^2$. Corespondența între (u, v) și (x_i) fiind biunivocă ($i = 1, 2, 3, 4$), x_i se numesc coordonatele tetraciclice ale lui $M(u, v)$. Rezultă $K: 2r(a_1x_1 + a_2x_2) + (a_3 - a_0r^2)x_3 - (a_3 - a_0r^2)rx_4 = 0$. 2 elemente ale lui K sînt ortogonale dacă planele π' corespunzătoare sînt conjugate în raport cu K. *Obs.* a) Fie, în π, coordonatele polare: $u = \rho\cos\omega$, $v = \rho\sin\omega$; metrica lui π: $du^2 + dv^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$. Deci se realizează o corespondență conformă între S și π prin relațiile diferențiale $d\rho/\rho = d\theta/\sin\theta$, $d\omega = d\varphi$, adică $\rho = r\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$, $\omega = \varphi$ sau $\rho = r\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\omega = \varphi$, alegînd convenabil constantele de integrare, centrul de proiecție fiind N sau N'. d) Loxodromele se transformă în spirale logaritmice.

6. A DOUA FORMĂ FUNDAMENTALĂ A UNEI SUPRAFEȚE

103 Să se calculeze a doua formă fundamentală a unei suprafețe de rotație. *Apl.* la cazuri particulare.

104 O suprafață S e un plan π dacă și numai dacă a doua formă fundamentală e identic nulă.

R. Fie $\pi: \bar{a}\cdot(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ ($\bar{r}_0, \bar{a}$ — vectori constanți); atunci

$$D = D' = D'' = 0$$

(68)

$$D = -\bar{r}_u\cdot\bar{n}_u = \bar{n}\cdot\bar{r}_{uu},\quad D' = -\bar{r}_u\cdot\bar{n}_v = -\bar{r}_v\cdot\bar{n}_u = \bar{n}\cdot\bar{r}_{uv},\quad D'' = -\bar{r}_v\cdot\bar{n}_v = \bar{n}\cdot\bar{r}_{vv}.$$

Reciproc, din (68): $\bar{n}_u \parallel \bar{n}$ și $\bar{n}_v \parallel \bar{n}$. Însă $\bar{n}^2 = 1$, deci $\bar{n}\cdot\bar{n}_u = 0$, $\bar{n}\cdot\bar{n}_v = 0$, adică $\bar{n}_u \perp \bar{n}$ și $\bar{n}_v \perp \bar{n}$. Deci $\bar{n}_u = \bar{n}_v = 0$, adică $\bar{n}$ e vector constant (S e plan).

105 Fie $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = a\cos bv$ ($b > 0$). Se cere: a) Să se arate că S e un conoid drept. b) Să se calculeze prima și a doua formă fundamentală ale lui S. c) S admite puncte planare?

106 Să se arate că, dacă cele 2 forme fundamentale ale unei suprafețe sînt proporționale, suprafața e o sferă sau un plan.

R. Din $\Phi = \lambda\, ds^2$, rezultă $(\bar{n}_u + \lambda\bar{r}_u)\cdot\bar{r}_u = 0, \ldots, (\bar{n}_v + \lambda\bar{r}_v)\cdot\bar{r}_v = 0$. Din $\bar{n}^2 = 1$ și $\bar{n}\cdot\bar{r}_u = 0$, $\bar{n}\cdot\bar{r}_v = 0$, deducem $(\bar{n}_u + \lambda\bar{r}_u)\cdot\bar{n} = 0$, $(\bar{n}_v + \lambda\bar{r}_v)\cdot\bar{n} = 0$. Deci $\bar{n}_u + \lambda\bar{r}_u = 0$, $\bar{n}_v + \lambda\bar{r}_v = 0$; de unde $\lambda_v\bar{r}_u = \lambda_u\bar{r}_v$, adică $\lambda = \text{const.}$ (altfel $\bar{r}_u \parallel \bar{r}_v$), încît $\bar{n}/\lambda + \bar{r} = \bar{r}_0$ (o sferă de centru $\bar{r}_0$ și rază $|1/\lambda|$) *Obs.* a) Reciproca e adevărată (v. probl. 103). b) Fie S de ecuație (32); deci $r = \lambda(1 + p^2)$, $s = \lambda pq$, $t = \lambda(1 + q^2)$. Din primele ecuații prin derivare în raport cu y și x, obținem $pq\lambda_x - (1 + p^2)\lambda_y = -\lambda^2 q$; la fel, deducem $(1 + p^2)\lambda_x - pq\lambda_y = \lambda^2 p$. Atunci $z = -1/\lambda$, încît a doua ecuație dă $z^2 = f(x) + g(y)$, iar celelalte $f(x) = -x^2 + 2a_1x + b$, $g(y) = -y^2 + 2a_2y + c$. Obținem sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2a_2y + a_3 = 0$ ($a_3 = b + c$).

107 Asociind punctului curent (ordinar) P al unei suprafeţe S de ecuaţie (13) triedrul (în general, oblic) $T : \bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$, avem *ecuaţiile lui Gauss*:

$$\bar{r}_{uu} = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{r}_u + \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{r}_v + \mathrm{D}\bar{n}, \quad \bar{r}_{uv} = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{r}_u + \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{r}_v + \mathrm{D}'\bar{n},$$

(69)

$$\bar{r}_{vv} = \begin{vmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \bar{r}_u + \begin{vmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \bar{r}_v + \mathrm{D}''\bar{n}$$

şi *ecuaţiile lui Weingarten*:

$$\bar{n}_u = \frac{F\mathrm{D}' - G\mathrm{D}}{\Delta}\bar{r}_u + \frac{F\mathrm{D} - E\mathrm{D}'}{\Delta}\bar{r}_v = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} E & F & \bar{r}_u \\ F & G & \bar{r}_v \\ \mathrm{D} & \mathrm{D}' & 0 \end{vmatrix},$$

(69')

$$\bar{n}_v = \frac{F\mathrm{D}'' - G\mathrm{D}'}{\Delta}\bar{r}_u + \frac{F\mathrm{D}' - E\mathrm{D}''}{\Delta}\bar{r}_v = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} E & F & \bar{r}_u \\ F & G & \bar{r}_v \\ \mathrm{D}' & \mathrm{D}'' & 0 \end{vmatrix};$$

ecuaţiile (69) şi (69') se mai numesc *ecuaţiile fundamentale* ale lui S.

R. Fie $\bar{r}_{uu} = a_1\bar{r}_u + b_1\bar{r}_v + c_1\bar{n}, \ldots$ Înmulţind scalar cu $\bar{n}$, obţinem $c_1 = \mathrm{D}, \ldots$; înmulţind scalar cu $\bar{r}_u$ şi cu $\bar{r}_v$, rezultă $|11, 1| = a_1E + b_1F$, $|11, 2| = a_1F + b_1G, \ldots$, încît $a_1 = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $b_1 = \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \ldots$ Avem $\bar{n}_u = \alpha_1\bar{r}_u + \beta_1\bar{r}_v$, $\bar{n}_v = \alpha_2\bar{r}_u + \beta_2\bar{r}_v$; deducem $-\mathrm{D}' = \alpha_1E + \beta_1F$, $-\mathrm{D}' = \alpha_1F + \beta_1G, \ldots$ *Obs.* Matriceal, ecuaţiile (69') se pot scrie $\begin{Vmatrix} \bar{n}_u \\ \bar{n}_v \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} \mathrm{D} & \mathrm{D}' \\ \mathrm{D}' & \mathrm{D}'' \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -G & F \\ F & -E \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \bar{r}_u \\ \bar{r}_v \end{Vmatrix}$. b) Cu $\bar{r}_u = \bar{m}_1$, $\bar{r}_v = \bar{m}_2$, $\bar{n} = \bar{m}_3$:

(69'') $\quad d\bar{r} = \bar{m}_1\,du + \bar{m}_2 dv$, $d\bar{m}_\alpha = \omega_\alpha^i\bar{m}_i$, $d\bar{m}_3 = \omega_3^\alpha\bar{m}_\alpha (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2)$,

formele Pfaff ω_j^i având expresiile $\omega_\beta^\alpha = \begin{vmatrix} \alpha & \\ \beta & 1 \end{vmatrix} du + \begin{vmatrix} \alpha & \\ \beta & 2 \end{vmatrix} dv$, $\omega_1^3 = \mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv$, $\omega_2^3 = \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv$, $\Delta\omega_3^1 = (F\mathrm{D}' - G\mathrm{D})du + (F\mathrm{D}'' - G\mathrm{D}')dv$, $\Delta\omega_3^2 = (F\mathrm{D} - E\mathrm{D}')du + (F\mathrm{D}' - E\mathrm{D}'')dv$; formele nu-s independente, ele satisfăcînd *ecuaţiile de structură*.

7. LINII ASIMPTOTICE PE O SUPRAFAŢĂ

108 Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei S: a) $x = v\cos\ln u$, $y = v\sin\ln u$, $z = u$; b) $x = u$, $y = uv$, $z = v + \ln u$; c) $x = (1 - u^2)/u(1+v^2)$, $y = 2/(1+v^2)$, $z = (1+u^2)(1 - v^2)/2u(1 + v^2)$; d) $x = v$, $y = u$, $z = u^2v$; e) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^{-1}$; f) $z = y\sin x$; g) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$; h) $x^a y^b z^c = 1$; i) $z = (x^2 - y^2)/2 + \cos x - \cos y$; j) $z(x + y) = x - y$; k) $z = a(x/y + y/x)$; l) $z = xy(x^2 - y^2)$; m) $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v$, $y = b\,\mathrm{ch}\,u\sin v$, $z = c\,\mathrm{sh}\,u$.

109 Să se arate că liniile asimptotice ale unei suprafeţe riglate de grad 3, care nu sînt drepte, sînt cuartice unicursale.

110 Să se determine liniile asimptotice ale elicoizilor și suprafețelor de rotație. *Apl.* a) Elicoidul $S: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a\ln u + (b^2 - a^2)v/2b$ (a, b—const.). b) Suprafața de rotație $S: b_1)\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a^3/u^2$; $b_2)\ z^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

R Fie S de ecuații (15''); cînd $k = 0$, S e de rotație. Ecuația diferențială a liniilor asimptotice: $uf''\ du^2 - 2k\ du\ dv + u^2 f'\ dv^2 = 0$; deci ecuațiile fin te se obțin prin cuadraturi *Obs.* Dacă $f = 0$, S e suprafața șurub; liniile asimptotice: $u = C_1$ (cercurile $x^2 + y^2 = C_1^2$, $S = 0$) și $v = C_2$ (generatoarele $y = x\operatorname{tg} C_2$, $z = kC_2$), care pot fi obținute și folosind ecuația (16'). *Apl.* a) $u = C_1 e^{av/b}$ și $u = C_2 e^{-av/b}$, proiectîndu-se pe Oxy după 2 familii de spirale logaritmice ortogonale $b_1)\ f = a^3/u^2$, $u = Ce^{\pm v\sqrt{3}}$; $b_2)\ f = \pm\sqrt{au}$, $u = Ce^{\pm v\sqrt{2}}$.

111 Să se găsească conoidul drept ale cărui proiecții ortogonale ale liniilor asimptotice curbilinii pe planul director sînt lemniscate Bernoulli.

112 Fie suprafața riglată $S: x = u + (v - 1)\sin u,\ y = 1 + (v - 1)\cos u,\ z = a(v + u^2/2)$. Să se determine: a) Toate curbele din spațiu ale căror tangente sînt paralele cu generatoarele lui S; în particular, acelea care sînt cercuri strîmbe. b) Traiectoriile ortogonale generatoarelor lui S. c) Liniile asimptotice ale suprafeței S.

R a) Se obțin din $dx/\sin u = dy/\cos u = dz/a = ds/\sqrt{1 + a^2}$ cu $u = u(s)$. Pentru cercurile strîmbe: $u'^2/(1 + a^2) = 1/\rho^2$. b) Din $(dx,\ dy,\ dz) \perp (\sin u,\ \cos u,\ a)$. c) $u = C_1$ (generatoarele) și $2(u - \sin u)\dfrac{d}{du}(1/v) - (1 - \cos u)/v + 1 = 0$ (integrarea se reduce la o cuadratură).

113 Fie S o suprafață riglată nedesfășurabilă. Se cere: a) Să se determine liniile asimptotice ale lui S. b) Să se demonstreze că biraportul punctelor în care 4 linii asimptotice ale lui S sînt tăiate de o generatoare oarecare e constant. c) Dacă S e cu plan director, raportul simplu al punctelor în care 3 linii asimptotice sînt tăiate de o generatoare oarecare e constant. *Exemple:* a) $x = (1 - u^2)(1 + v)/(1 + u^2),\ y = 2u(1 - v)/(1 + u^2),\ z = v$; b) $\bar r = \bar r_1 + \bar r_2 u + \bar r_3 v + \bar r_4 uv$ ($\bar r_i$ — vectori constanți); c) $x = u + v,\ y = u^2 + uv,\ z = 1 + uv$; d) $x = 1 + uv,\ y = u + u^2 v,\ z = u + v$.

R a) Fie S de ecuație (34) Ecuația diferențială a liniilor asimptotice devine

$$du = 0 \text{ și } 2(\bar r_0'\,\bar a\,\bar a')\,v' = (\bar a\,\bar r_0'\,\bar r_0'') + [(\bar a\,\bar r_0'\,\bar a'') + (\bar a\,\bar a'\,\bar r_0'')]\,v + (\bar a\,\bar a'\,\bar a'')\,v^2, \tag{70}$$

ultima fiind — în general — o ecuație Riccati. Dacă $(\bar a\,\bar r_0'\,\bar r_0'') = 0$, cînd generatoarea prin P_0 (de pe $C_0: \bar r = \bar r_0(u)$) e situată în planul osculator în P_0 la C_0 (C_0 e linie asimptotică a lui S), ecuația (70_2) e ecuație Bernoulli. Dacă $(\bar a\,\bar a'\,\bar a'') = 0$, cînd S e cu plan director, ecuația (70_2) e liniară. b) Biraportul a 4 integrale particulare ale unei ecuații Riccati e constant. Fie $C_i: \bar r = \bar r_0 + v_i\bar a$ cu $v_i(u)$ integrale particulare ($i = 1, 2, 3, 4$) și o generatoare $g: u = \text{const}$. Dacă $t_i = v_i|\bar a|$ e abscisa (pe g, originea fiind în $P_0 = g \cap C_0$) a lui $P_i = g \cap C_i$, atunci $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (t_1 t_2 t_3 t_4) = (v_1 v_2 v_3 v_4) = \text{const}$. c) Raportul simplu a 3 integrale particulare ale unei ecuații diferențiale liniare e constant. Exemple; a) $u = C_1,\ (u^2 - 1)(v - 1)^2 = C_2 u(v + 1)^2$. b) S e dublu riglată cu plan director (paraboloid hiperbolic); $u = C_1$ și $v = C_2$. c) S cu plan director; $u = C_1,\ v = C_2\sqrt{u} - u$. d) C_0 e linie asimptotică; $u = C_1$ și $v = 1/C_2(\sqrt{u^2 + 1} - u)$.

114 Fie pseudosfera (10). Se cere: a) Să se determine liniile asimptotice. b) Să se arate că, dacă se consideră v ca parametru în lungul unei asimptote iar originea arcului s e punctul corespunzător lui $v = 0$, atunci $s = av$. c) Să se afle torsiunea liniilor asimptotice.

R. a) $v = C + \ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}$. b) Pe asimptotică $du^2 - \sin^2 u\ dv^2 = 0$. c) $1/\tau = \text{const}$.

115 Să se determine natura punctelor suprafeței S: a) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$; b) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2/2 - 5u + 6\ln u + 7$; c) $x + y = z^2$; d) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$; d) $x = \operatorname{ch} v\cos u$, $y = \operatorname{ch} v\sin u$, $z = u$ (catenoid). De asemenea, să se găsească punctele ombilicale ale: e) paraboloidului (23); f) suprafeței tetraedrale (31′).

116 Se numesc *suprafețe aspidale* suprafețele corespondente într-o transformare aspidală față de un pol Ω. Se cere: a) Să se studieze o astfel de suprafață. b) Numind *suprafață de undă a lui Fresnel* suprafața aspidală a unui elipsoid cu axe inegale în raport cu centrul său, să se afle liniile asimptotice ale suprafeței Fresnel.

R. a) Dacă $\Omega = 0$ iar $P(x, y, z)$ și $P'(X, Y, Z)$ sînt 2 puncte corespondente, *transformarea aspidală* e definită de ecuațiile directoare

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,\ xX + yY + zZ = 0\ (\overline{O}\overline{P} \perp \overline{O}\overline{P}',\ OP = OP').$$

Normalele în P și P' la S și S', în corespondență aspidală, sînt 2 drepte perpendiculare și coplanare cu OP și OP'. S și S' sînt polare reciproce în raport cu o sferă $\Sigma(\Omega; 1)$ b) Pentru S raportat la axe, avem

$$S': x^2/(r^2 - a^2) + y^2/(r^2 - b^2) + z^2/(r^2 - c^2) = 1 \text{ cu } r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

cu ajutorul funcțiilor eliptice se obține o reprezentare parametrică. Suprafața Fresnel e algebrică de grad 4, formată din 2 pînze, una din ele învăluind pe cealaltă; cele 2 pînze au în comun 4 puncte în Oxz. Planele principale ale lui S sînt plane de simetrie ale lui S', iar centrul lui S e centru al lui S'. Fiecare din planele de simetrie ale lui S' o taie după 2 conice: un cerc și o elipsă; de exemplu, Oxz taie pe S' după $x^2 + z^2 - b^2 = 0$, $y = 0$ (cerc) și $a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2 = 0$, $y = 0$ (elipsă). Punînd în evidență curbele de secțiune, ecuația lui S' poate fi scrisă

$$S': (x^2 + y^2 + z^2 - b^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - a^2c^2) - (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)y^2 = 0.$$

Conicele de secțiune dintr-un plan de simetrie au în comun 4 puncte, care sînt puncte conice ale lui S'. Există 16 puncte conice, din care numai 4 sînt reale (cele din Oxz). Dacă $P \in S$, sfera $\Sigma'(O; OP)$ taie pe S după o curbă bipătratică C_4. Perpendiculara din O pe planul tangent de-a lungul lui OP la conul cu vîrful în O și avînd pe C_4 ca directoare taie pe Σ' în $P_i'(i = 1, 2)$, simetrice în raport cu O, iar $P_i' \in S'$. Planul tangent în $P' \in S'$ e perpendicular pe cel în $P \in S$ și ambele perpendiculare pe planul OPP'.
Liniile asimptotice ale suprafeței Fresnel sînt curbe algebrice.

117 Fie suprafața $S: x = u^2, y = u^2 + v, z = u^2 + v^2$. Se cere: a) Să se arate că S e desfășurabilă. b) Să se afle linia de strictțiune a lui S.

118 Să se găsească linia parabolică a suprafeței S: a) $x = u^3, y = v^2, z = u + v$; b) $x^3 + y^2 = z$; c) $x = u + v, y = uv, z = u^3 + v^3$; d) $x = v^3, y = u^2 + u, z = u^2/2a + av$.

119 Să se studieze comportarea liniilor asimptotice ale unei suprafețe S de-a lungul liniei parabolice Γ a lui S.

R. Γ împarte pe S în regiuni, într-una punctele lui S fiind de aceeași natură (hiperbolice sau eliptice). De-a lungul lui Γ, S are o singură direcție asimptotică, ce poate coincide sau nu cu tangenta la Γ: a) dacă nu coincide, liniile asimptotice din regiunea cu puncte hiperbolice au în punctul corespunzător un punct de întoarcere; b) dacă coincid, Γ e înfășurătoarea liniilor asimptotice, cînd proprietatea are loc peste tot, și se schimbă între ele, cînd are loc într-un punct.

120 Să se arate că raportul anarmonic k format de direcțiile izotrope și direcțiile asimptotice ale unei suprafețe S e dat de formula

$$(71)\ (1 + k)/(1 - k) = ((GD + ED'')/2 - FD')/\sqrt{EG - F^2}\ \sqrt{DD'' - D'^2}.$$

121 Să se arate că planul tangent într-un punct P al unei suprafețe S taie pe S după o curbă C care are în P un punct dublu, ale cărei tangente

sînt direcţiile asimptotice în P la S. Dacă C_i sînt ramurile în P ale lui C şi au curbura $1/\rho_i$, iar C_i^* sînt liniile asimptotice prin P ale lui S şi au curbura $1/\rho_i^*$, să se demonstreze relaţia

$$2\rho_i = 3\rho_i^* \quad (\textit{Beltrami}).$$

R Luînd $P = O$ şi Oxy ca plan tangent (în P la S), fie

$$z = (r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2)/2 + ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + (4). \tag{72}$$

Deci $C: r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + (3) = 0$, $z = 0$; tangentele în $P = O$ la C sînt date de ecuaţiile $r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 = 0$, $z = 0$. Direcţiile asimptotice în $P = O$ la S sînt date de $r_0dx^2 + 2s_0dxdy + t_0dy^2 = 0$. De unde rezultă afirmaţia. Luînd tangenta comună a lui C_i şi C_i^* ca Ox, atunci $r_0 = 0$ Considerînd $C_i: y = \alpha_i x^2 + \ldots$, $z = 0$, din $C_i \in C = S \cap Oxy$ rezultă $\alpha_i = -a/s_0$; deci $y_0' = 0$, $y_0'' = -2a/s_0$, adică $1/\rho_i = 2|a/s_0|$. Pe linia asimptotică $C_i^*: y = y(x)$, $z = z(x)$ avem satisfăcute ecuaţia (72) cu $r_0 = 0$ şi $(6ax + \ldots)\,dx^2 + 2(s_0 + \ldots)\,dx\,dy + (t_0 + \ldots)\,dy^2 = 0$ iar $y_0' = 0$.
Avem $6ax + \ldots + 2(s_0 + \ldots.)\,y' + (t_0 + \ldots)\,y'^2 = 0$ şi $z' = s_0y + s_0xy' + t_0yy' + \ldots$; deci $z_0' = 0$. Derivînd, obţinem $3a + \ldots + (s_0 + \ldots)\,y'' + (t_0 + \ldots)\,y'y'' = 0$ şi $z'' = 2s_0y' + s_0xy'' + t_0y'^2 + t_0yy'' + \ldots$; deci $y_0'' = -3a/s_0$, $z_0'' = 0$ iar $1/\rho_i^* = 3|a/s_0|$.

122 Condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă S să fie raportată la liniile asimptotice e ca coordonatele punctului curent al lui S să verifice

$$\theta_{uu} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix}\theta_u + \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix}\theta_v,\ \theta_{rv} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix}\theta_u + \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix}\theta_r. \tag{73}$$

Apl. $S: x = e^{2(u+v)}$, $y = e^{-(u+v)}\cos\sqrt{3}(u - v)$, $z = e^{-(u+v)}\sin\sqrt{3}(u - v)$ e raportată la liniile asimptotice; să se determine sistemul (73).

R. Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice admite pe $u = \text{const.}$ şi $v = \text{const.}$:

$$(\bar r_u\ \bar r_v\ \bar r_{uu}) = 0,\ (\bar r_u\ \bar r_v\ \bar r_{vv}) = 0, \text{ adică } \bar r_{uu} = a\bar r_u + b\bar r_v,\ \bar r_{vv} = a'\bar r_u + b'\bar r_v; \tag{73'}$$

se determină a, b, a', b' înmulţind scalar pe (73') cu $\bar r_u$, respectiv cu $\bar r_v$, şi rezolvînd sistemul obţinut. *Obs.* Ecuaţiile (73) rezultă şi din ecuaţiile Gauss (69). *Apl.* $\bar r_{uu} = 2\bar r_v$, $\bar r_{vv} = 2\bar r_u$; deci $D = D'' = 0$, $b = a' = 2$, $a = b' = 0$. *Obs.* $\theta_{uv} = 4\theta$.

8. CURBURA UNEI CURBE SITUATE PE O SUPRAFAŢĂ

123 Fie suprafaţa $S: x = u^2/2 + v$, $y = u + v^2/2$, $z = uv$. Se cere: a) Să se arate că binormalele curbelor $v = \text{const.}$ sînt paralele cu un acelaşi plan. b) Să se afle, de pe fiecare curbă $v = \text{const.}$, punctele în care raza de curbură e minimă. c) Să se determine punctele lui S în care curbura normală are aceeaşi valoare pentru orice secţiune normală.

R. a) Fie $v = k$; cum $\bar l = \bar r_u \dfrac{du}{ds}$, $\bar n/\rho = \dfrac{d\bar l}{ds}$ şi $\bar b = \bar l \times \bar n$, găsim $\bar b \,||\, Oyz$. b) $\sqrt{1 + k^2}\rho = (u^2 + k^2 + 1)^{3/2}$; $\dfrac{d\rho}{du} = 0$ cînd $u = 0$ ($v = \text{const.}$ are raza de curbură minimă în punctele ei de intersecţie cu $u = 0$). c) Sînt punctele ombilicale ale lui S; cum $E = G$, e necesar ca $D = D''$: sînt pe $u = v$ şi $u + v + 1 = 0$.

124 Fie, pe suprafaţa $S: x = u + v^2$, $y = -2u^2 + v$, $z = (u - -1)/(v + 1)$, curba $C: v = u$ şi punctul $P(u = v = 1)$. Să se determine: a) Curbura lui C în P. b) Curbura secţiunii normale C_n asociată în P lui C. c) Natura punctului P.

R. a) $P(2, -1, 0) \in C$. În P la $S: \bar{N} = (-\bar{i} + 2\bar{j} + 18\bar{k})/2$; în P la $C: \bar{\tau} = (6\bar{i} - 6\bar{j} + + \bar{k})/2$, $\bar{\beta} = (7\bar{i} + 5\bar{j} - 12\bar{k})/2$, $\bar{\nu} = -(67\bar{i} + 79\bar{j} + 72\bar{k})$, $\cos\theta = -1387/\sqrt{329}\sqrt{15914}$; în P la $S: E = 69/4$, $F = -2$, $G = 5$, $\triangle = 329/4$, $\sqrt{\triangle}D = -4$, $\sqrt{\triangle}D' = -9/4$, $\sqrt{\triangle}D'' = -1$. Cum $\cos\theta/R = \Phi/ds^2$ iar pe $S: \bar{\tau} = (dv/du = 1)$, găsim $4R = 73\sqrt{73/218}$. b) π_N (conţinînd $\bar{\tau}$ şi $\bar{N}$): $110x + 109y - 6z - 111 = 0$; deci $C_n: 110(u + v^2) + 109(-2u^2 + v) - 6(u - 1)/(v + + 1) - 111 = 0$. Din formula Meusnier: $76R_n = -73\sqrt{329}$. c) P e un punct hiperbolic. Direcţiile asimptotice în $P: 8du^2 + 9\,du\,dv + 2dv^2 = 0$.

125 Fie, pe suprafaţa $S: x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, curba $C: v = u^2$ şi punctul $P(u = v = 1) \in C$. Se cere curbura secţiunii normale C_n în P la C.

126 Să se afle expresiile razelor de curbură ale secţiunilor normale asociate curbelor coordonate ale unei suprafeţe. *Apl.* la: a) cilindrul parabolic $x = u$, $y = u^2/2$, $z = v$; b) torul (8).

127 Fie suprafaţa desfăşurabilă $S: \bar{r} = \bar{r}_0(u) + v\,\bar{r}_0'(u)$, u fiind arcul curbei de strictţiune $C_0: \bar{r} = \bar{r}_0(u)$. Să se arate că raza de curbură a secţiunii normale C_n, asociată unei curbe C de pe suprafaţa S, e $R_n = \rho_0\tau_0((v'^2 + 1)^2 + + v^2/\rho_0^2)/v$ cu $1/\rho_0$, $1/\tau_0$ — curbura şi torsiunea lui C_0.

128 Să se calculeze curbura secţiunii normale asociată în $P(u, v)$ direcţiei $\lambda(u, v)\,du + \mu(u, v)\,dv = 0$ la o suprafaţă de rotaţie. *Apl.* la conul S: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bu/a$, pentru C_n asociată în $P(u = \sqrt{a^2 + b^2}/a$, $v = (a^2 + b^2)/a^2)$ curbei $C: v = u^2$.

R. Fie S de ecuaţii (6); conform problemei 83 şi 103, obţinem $1/R_n = [\mu^2(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi') + + \lambda^2\varphi\psi']/\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}[\mu^2(\varphi'^2 + \psi'^2) + \lambda^2\varphi^2]$; deci $1/R_n' = \psi'/\varphi\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, $1/R_n'' = (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')/ /(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}$, rezultînd că C_n'' coincide cu meridianul $C: v = \text{const.}$ *Apl.* $\varphi = u$, $\psi = bu/a$ iar (în P) $dv = 2\sqrt{a^2 + b^2}\,du/a$ (deci $\lambda = 2\sqrt{a^2 + b^2}$, $\mu = -a$); atunci $1/R_n = 4ab/(5a^2 + 4b^2)$. *Obs.* $1/R_n' = b/u\sqrt{a^2 + b^2}$, $1/R_n'' = 0$.

129 Fiind dată o suprafaţă S, să se calculeze: a) curbura liniilor coordonate de pe S; b) unghiul format, într-un punct P al lui S, de normala S cu normalele principale ale liniilor coordonate. *Apl.* la: a) sfera (7); b) paraboloidul (27).

R. a) Fie S de ecuaţie (13) şi $C': u = \text{const.}$, $C'': v = \text{const.}$; curbura lor e

$$1/\rho'^2 = \left(\triangle\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\;\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right|^2 + GD^2\right)/G^3,\quad 1/\rho''^2 = \left(\triangle\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\;\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right|^2 + ED^2\right)/E^3. \tag{74}$$

Căci, de exemplu, curbura lui C' e $1/\rho' = |\bar{r}_v \times \bar{r}_{vv}|/|\bar{r}_v|^3$, iar $\bar{r}_{vv}$ e dat de formula Gauss (69). b) Se foloseşte formula Meusnier. *Apl.* a) Avem $\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\;\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\sin 2u$, $\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\;\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right| = 0$. Pentru paralelul $C': \rho' = = r\cos u$; de altfel (v. fig. 2), avem $\Omega P = OP' = r\cos u$. Pentru meridianul $C'': \rho'' = r$. *Obs.* a_1) Fie C un cerc mare al lui S, iar $\theta = \widehat{(\bar{n}, \bar{\nu})}$; însă $\bar{\nu} = \bar{n}$, deci $\theta = 0$ iar $\Phi/ds^2 = 1/r$. Cum $\cos\theta/R = = \Phi/ds^2$, avem $R = r$. a_2) Pentru $C_n': 1/R_n' = D''/G = 1/r$; deci C_n' e un cerc mare (de altfel, π_n conţine normala în P la S, care trece prin centrul O al sferei). Pentru $C_n'': 1/R_n'' = D/E = 1/r$; însă $C_n'' = C''$. b) $E = 1 + u^2/a^2$, $F = uv/ab$, $G = 1 + v^2/b^2$, $D = 1/a\sqrt{\triangle}$, $D' = 0$, $D'' = 1/b\sqrt{\triangle}$,

$\begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = u/ab\Delta$, $\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = v/ab\Delta$ etc. *Obs.* Prin O parabolele $C_0' : u = 0$ și $C_0'' : v = 0$; găsim $\rho_0' = b(1 + v^2/b^2)^{3/2}$, $\rho_0'' = a(1 + u^2/a^2)^{3/2}$.

9. CURBURA UNEI SUPRAFEȚE

130 Fie suprafețele $S_1 : x = a \cos u \cos v$, $y = b \cos u \sin v$, $z = c \sin u$ și $S_2 : x = a \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v$, $y = b \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$, $z = c \operatorname{sh} u$. În punctul lor comun, să se afle : a) Curburile lor (totală, medie). b) Expresiile curburilor principale; explicație. c) Secțiunile principale.

R. a) În punctul comun $A(u = v = 0) = (a, 0, 0) : E_1 = E_2 = c^2$, $F_1 = F_2 = 0$, $G_1 = G_2 = b^2$, $D_1 = -D_2 = a$, $D_1' = D_2' = 0$, $D_1'' = D_2'' = a$; deci a) $K_1 = K_2 = a^2/b^2c^2$, $H_1 = -H_2 = a(b^2 + c^2)/2b^2c^2$. b) Curburile principale $\sigma_i = 1/R_i (i = 1, 2)$ sînt rădăcinile ecuației

$$\sigma_n^2 - 2H\sigma_n + K = 0 \text{ cu } K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2},\ H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{2(EG - F^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{75}$$

Rezultă $\sigma_1 = a/c^2$, $\sigma_2 = a/b^2$ pentru S_1 și $\sigma_1 = -a/c^2$, $\sigma_2 = -a/b^2$ pentru S_2; deci S_1 și S_2 sînt în contact în A. c) Curbura normală a lui C în P fiind

$$\sigma_n = (Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2)/(Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2), \tag{75'}$$

rezultă secțiunile principale $C_1 : v = 0$ și $C_2 : u = 0$, care sînt elipse pentru S_1 (elipsoid) și hiperbole pentru S_2 (hiperboloid cu două pînze).

131 Fie suprafața S : a) $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$; b) $z = \lambda \arcsin \frac{x - y}{2}$; c) $x = \cos v - (u + v) \sin v$, $y = \sin v + (u + v) \cos v$, $z = u + 2v$. Se cere : α) Să se arate că S e o suprafață desfășurabilă. β) Să se determine generatoarele lui S. γ) Să se calculeze curburile principale ale suprafeței S.

132 Să se găsească punctele unui paraboloid în care maximum curburii lui Gauss e atins; în acele puncte, să se calculeze curbura medie și curburile principale ale suprafeței.

133 Se numește *suprafață Weingarten* (sin. : *suprafață W*) o suprafață pentru care — în fiecare punct al ei — razele principale de curbură sînt legate printr-o relație $\Phi(R_1, R_2) = 0$; de exemplu : suprafețele cu curbură constantă sau suprafețele minima. Să se arate că suprafețele de rotație și cele elicoidale sînt suprafețe *W*. *Apl.* a) Să se găsească relația $\Phi(R_1, R_2) = 0$ pentru un tor. b) Fie suprafața S născută prin rotirea unei parabole în jurul directoarei ei. Atunci : b_1) să se determine liniile ei asimptotice; b_2) să se calculeze curburile (totală, medie); b_3) să se arate că raportul curburilor principale e constant.

134 Să se arate că relațiile

$$F = D' = 0 \tag{75''}$$

reprezintă condiţiile necesare şi suficiente ca liniile coordonate $C_1 : v = \text{const.}$ şi $C_2 : u = \text{const.}$ să fie secţiunile principale ale suprafeţei S. Determinîndu-se curburile principale, să se calculeze curburile (totală, medie) ale lui S. *Apl.* a) Pentru suprafeţele de rotaţie (6), liniile coordonate sînt secţiuni principale. b) H măsoară variaţia elementului de arie.

R. După (75'), în $P \in S$ (P nu e un ombilic), *curburile normale* ale lui C_1 şi C_2 sînt respectiv $\sigma_1 = D/E$ şi $\sigma_2 = D''/G$. Ele sînt soluţii ale ecuaţiei (75) dacă $DF - ED' = 0$, $D''F - GD' = 0$; acest sistem (în F, D) admite numai soluţia (75''). Reciproc, în condiţiile (75''), ecuaţia (75) admite *curburile principale*

$$\frac{1}{R_1} = \sigma_1 = \frac{D}{E} \text{ pentru } C_1 \text{ şi } \frac{1}{R_2} = \sigma_2 = \frac{D''}{G} \text{ pentru } C_2 \text{ iar } K = \frac{DD''}{EG},\ H = \frac{ED'' + GD}{2EG}. \tag{75'''}$$

Apl. a) Cum (v. probl. 83 şi 103) $F = D' = 0$, găsim $\sigma_1 = (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')/\lambda^{3/2}$, $\sigma_2 = \psi'/\varphi\lambda^{1/2}$ cu $\lambda = \varphi'^2 + \psi'^2$. Pentru sfera (7): $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/r$, $K = 1/r^2 > 0$, $H = 1/r$. Pentru torul (8): $\sigma_1 = 1/r$, $\sigma_2 : \cos u/(a + r\cos u)$. Pentru catenoidul (9): $\sigma_1 = -\sigma_2 = -a/u^2$, $H = 0$ $\left(\text{sau } \sigma_1 = -\sigma_2 = -1/a^2\operatorname{ch}^2\frac{u}{a}\right)$; *obs.*: luînd $\varphi = \sqrt{u^2 + a^2}$, $\psi = a\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$, obţinem $\sigma_1 = -\sigma_2 = -a/(u^2 + a^2)$. Pentru pseudosfera (10): $\sigma_1 = -1/a\operatorname{ctg} u$, $\sigma_2 = \operatorname{ctg} u/a$; $K = -1/a^2 < 0$, $H = 2\operatorname{ctg} 2u/a$. b) Raportăm pe S la secţiunile ei principale; în condiţiile (75''), aria limitată de o curbă e $d\sigma = \sqrt{EG}\,du\,dv \cdot P'$ de pe normala în P la S, la distanţa $l(u, v)$, descrie suprafaţa S': $\bar{r}'(u, v, l) = \bar{r}(u, v) + l\bar{n}(u, v)$ de metrică $ds'^2 = ds^2 - 2l\Phi + l^2 ds^{*2} + dl^2$; pentru l mic: $ds'^2 \approx \approx ds^2 - 2l\Phi = E(1 - 2/R_1)\,du^2 + G(1 - 2/R_2)\,dv^2$, încît $d\sigma' = \sqrt{E'G'}\,du\,dv = \sqrt{EG}(1 - 4H + \ldots)^{1/2} \approx (1 - 2H)\,d\sigma$.

135 Dacă $\sigma_i = 1/R_i (i = 1, 2)$ sînt curburile principale ale suprafeţei S de separaţie a unui lichid, presiunea normală p pe elementul de suprafaţă, într-un punct oarecare, e dată de *ecuaţia lui Laplace*

$$\sigma_1 + \sigma_2 = p/\sigma, \tag{76}$$

unde σ e tensiunea superficială, considerată constantă. Să se afle presiunea p cînd S e: a) o sferă; b) un paraboloid de rotaţie.

136 Curbura totală şi curbura medie ale unei suprafeţe (13) sînt:

$$K = |\bar{n}_u \times \bar{n}_v| / |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|,\ H = |\bar{r}_v \times \bar{n}_u - \bar{r}_u \times \bar{n}_v| / 2|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|.$$

137 Dacă o suprafaţă S e raportată la liniile asimptotice, atunci

$$[\ln(-K)]_u = -4\begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},\ [\ln(-K)]_v = -4\begin{vmatrix} 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

138 Să se arate că, de-a lungul unei traiectorii ortogonale la o linie asimptotică a unei suprafeţe S, curbura normală e egală cu dublul curburii medii a suprafeţei.

139 Să se determine condiţia necesară şi suficientă ca liniile asimptotice ale unei suprafeţe să fie ortogonale.

140 Într-un punct P al unei suprafeţe S, unghiul θ al liniilor asimptotice (care trec prin P) e dat de formula (*A. Dobrescu*)

$$\operatorname{tg}^2\theta = -K/H^2 \quad (K\text{-curbura totală}, H\text{-curbura medie}). \tag{77}$$

R. Presupunem $D'' \neq 0$ (u = const. nu e linie asimptotică). Din ecuația diferențială a liniilor asimptotice obținem $dv/du + \delta v/\delta u = -2D'/D''$, $dv\delta v/du\delta u = D/D''$; atunci $\cos\theta = H/\sqrt{H^2 - K}$. Cînd $D = D'' = 0$ (S e raportată la liniile asimptotice), $K = -D'^2/\triangle$, $H = -FD'/\triangle$ iar $\cos\theta = F/\sqrt{EG} = H/\sqrt{H^2 - K}$. *Obs.* a) Dacă P e un punct parabolic ($\theta = 0$), atunci $K = 0$ și (77) se verifică. b) Cum $\cos\theta = (R_1 + R_2)/(R_1 - R_2)$, deducem $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{-R_2/R_1}$.

141 Dacă o suprafață e raportată la liniile asimptotice, atunci

$$\bar{r}_u = (\bar{n}\times\bar{n}_u)/\sqrt{-K},\ \bar{r}_v = -(\bar{n}\times\bar{n}_v)/\sqrt{-K}$$ (formulele *Lelieuvre*).

142 Se numește *suprafață minima* (sin.: *suprafață minimală*) o suprafață pentru care, în orice punct al ei, curbura medie H e nulă. Să se arate că, dintre toate suprafețele care trec printr-o curbă închisă C din spațiu, suprafața de arie minimă are curbura medie nulă. *Apl.* a) Să se determine suprafețele minima de rotație. b) Să se arate că mijloacele segmentelor care unesc două puncte arbitrare pe două curbe izotrope oarecare descriu o suprafață minima.

R. Aria porțiunii Σ a lui S de ecuație (32), delimitată de C, e

$$A = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Fiind dată integrala $\iint_D F(p, q)\,dx\,dy$, unde $p = z_x$ și $q = z_y$ cu $z = z(x, y)$, minimul integralei e dat de *ecuația lui Euler-Ostrogradski*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0. \tag{78}$$

În cazul considerat aici, această condiție devine

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0, \text{ adică } H = 0. \tag{78'}$$

Apl. a) Fie S de ecuații (6'). Condiția (78') se scrie

$$f'(1 + f'^2) + uf'' = 0;\ \text{deci}\ f' = a/\sqrt{u^2 - a^2}\ \text{sau}\ f = b + a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}).$$

Rezultă: *singura suprafață minimală de rotație e catenoidul* (*Meusnier*). *Obs.* Printr-o translație în lungul axei Oz, pînă ce originea vine în $(0, 0, b)$, putem avea $b = 0$; de asemenea, schimbînd sensul pe Oz, putem considera $a > 0$, b) Fie 2 curbe izotrope: C de ecuații (II, 48') și Γ obținută din ecuațiile lui C pentru $u \to v$ și $f(u) \to g(v)$. Dacă $P(u) \in C$ și $Q(v) \in \Gamma$, avem

$$2x = i[f + g - (uf' + vg') - (1 - u^2)\,f''/2 - (1 - v^2)\,g''/2],\quad 2y = f + g - (uf' +$$
$$+ vg') + (1 + u^2)\,f''/2 + (1 + v^2)\,g''/2,\ 2z = -i[f' + g' - (uf' + vg')]. \tag{79}$$

care sînt coordonatele mijlocului M al segmentului PQ. Rezultă $E = G = 0$, $D' = 0$, încît $H = 0$.

Obs. b_1) În particular: *mijloacele coardelor unei curbe izotrope descriu o suprafață minima.* b_2) Luînd u și v valori complexe conjugate și o descompunere convenabilă pentru f și g, putem obține în (79) valori reale; deci: (79) *reprezintă, în general, ecuațiile parametrice ale unei suprafețe minima* (*Enneper*).

143 Să se determine conoizii drepți care sînt suprafețe minima. În acest caz, să se determine: a) razele de curbură și centrele de curbură principale, într-un punct P al suprafeței; b) locul centrelor de curbură în P, cînd acest punct descrie una din liniile asimptotice.

R. Fie S de ecuații (19″); condiția $H = 0$ devine $f''/f' + 2v/(1 + v^2) = 0$, adică $f' = k/(1 + v^2)$, deci $f = k \operatorname{arc\,tg} v + k_0$ (putem lua $k_0 = 0$). Rezultă: *singurul conoid drept care e suprafață minima e elicoidul Kästner.* a) Fie

$$(79) \qquad -(X - x)/kx = (Y - y)/ky = -\left(Z - k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right)/(x^2 + y^2) = t$$

normala la S de ecuație (16′). Centrul de curbură Ω e punctul de intersecție a 2 normale apropiate, pe care le obținem variind x, y, t astfel ca dX, dY, dZ să fie nuli; eliminînd pe dx, dy, dt, obținem $kt = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}/\sqrt{x^2 + y^2}$. Fiecărui t îi corespunde un $\Omega(X, Y, Z)$, iar raza de curbură e $R = P\Omega$. Obținem $R_{1,2} = \pm(x^2 + y^2 + z^2)/k$; deci $K = -k^2/(x^2 + y^2 + k^2)^2 < 0$, $H = 0$. *Obs.* $R_{1,2}$ pot fi obținute și folosind ecuația (16′) sau (19″). b) Ecuația asimptotelor: $d^2z = 0$ se scrie $(x\,dx + y\,dy)(y\,dx - x\,dy) = 0$; obținem generatoarele $g: y = C_0x$, $z = k \operatorname{arc\,tg} C_0$ și curbele $C: x^2 + y^2 = C^2$, $z = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, adică $C: x = C\cos\theta$, $y = C\sin\theta$, $z = k\theta$. Cînd P descrie pe C, avem $t = \pm\sqrt{C^2 + k^2}/kC$; Ω, dat de (79), descrie 2 elice pe cilindrul $x^2 + y^2 = C^2 + k^2(C^2 + k^2)$.

144 O suprafață S cu curbură constantă (nenulă) se numește *suprafață sferică* sau *suprafață pseudosferică* după cum curbura totală K e pozitivă sau negativă. Să se determine suprafețele de rotație cu curbură constantă. *Apl.* Fie $S: x = a\sin u\sin v$, $y = a\sin u\cos v$, $z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u) + f(v)$. Să se determine $f(v)$ astfel ca S să fie o suprafață cu curbură constantă. În acest caz, să se găsească: a) Liniile asimptotice ale lui S și arcul pe o asimptotică, de la punctul în care linia e tăiată de curba $v = 0$; de asemenea, unghiul curbelor $v = \text{const.}$ cu liniile asimptotice. b) Curbura medie H a lui S.

R. Fie (6′) *o suprafață sferică* cu $K = 1/a^2 = \text{const.}$; obținem $a^2f'f'' - u(1 + f'^2) = 0$, adică $f = \pm\int\sqrt{(a^2 - C + u^2)/(C - u^2)}\,du + C_0$. Luînd $C_0 = 0$ (prin o translație a axelor în lungul lui Oz), avem de considerat cazurile $C \lessgtr a^2$, cînd se spune că S *e de tip eliptic, hiperbolic sau parabolic.* Dacă $C = a^2$, obținem *sfera* $(O; a)$. Dacă $C < a^2$, fie curba meridian $\Gamma: v = \pi/2$, deci Γ: $z = \pm\int\sqrt{(a^2 - C + y^2)/(C - y^2)}\,dy$, $x = 0$; atunci $y^2 \leqslant C$, $z'' = \pm a^2y/(C - y^2)^2\lambda$ cu $\lambda^2 = (a^2 - C + y^2)/(C - y^2)$, încît tabela nr. 1 arată că aspectul lui Γ e cel din fig. 52. O e punct de inflexiune pentru Γ și punct conic pentru S. Dacă $C > a^2$, atunci $C - a^2 \leqslant y^2 \leqslant C$ iar din tabela nr. 2 rezultă că Γ are aspectul din fig. 53; punctele lui Γ corespunzătoare lui $y = \pm\sqrt{C - a^2}$ sînt puncte de întoarcere de prima speță. Fie (6′) o *suprafață pseudosferică* cu $K = -1/a^2 = \text{const.}$;

Tabela 1:

y	$-\sqrt{C}$		0		$\sqrt{C}$
$\frac{dz}{dy}$	$+\infty$	$+$	$\sqrt{\frac{a^2 - C}{C}}$	$+$	$+\infty$
$\frac{d^2z}{dy^2}$		$-$	0	$+$	
z	$-p$	↗	0	↗	p

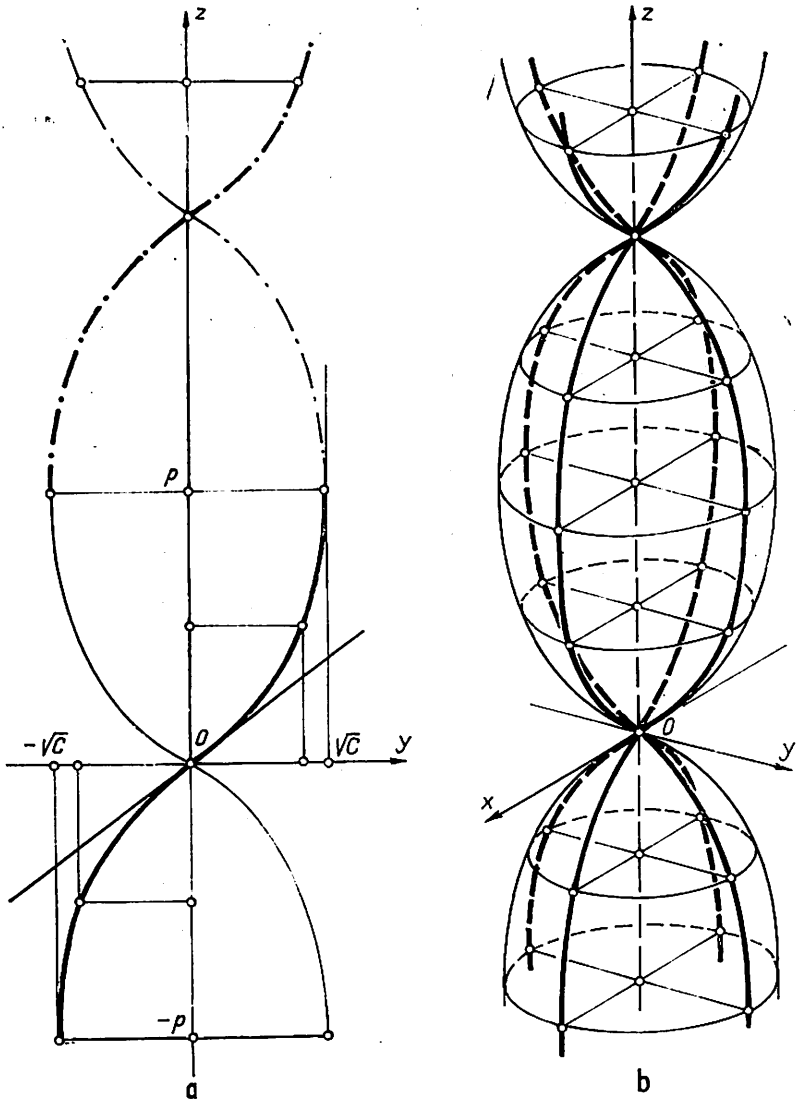


Fig. 52

Tabela 2

y	$-\sqrt{C}$		$-\sqrt{C-a^2}$		$+\sqrt{C-a^2}$		$\sqrt{C}$
$\frac{dz}{dy}$	$+\infty$	$+$	0		0	$+$	$+\infty$
$\frac{d^2z}{dy^2}$		$-$				$-$	
z	$-p$	↗	0		0	↗	p

rezultă $a^2f'f'' + u(1 + f'^2)^2 = 0$, adică $f = \pm \int \sqrt{(a^2 + C - u^2)/(u^2 - C)}du + C_0$ (putem lua $C_0 = 0$). Se disting cazurile $C \gtrless 0$, cînd S e *de tip eliptic, hiperbolic sau parabolic.* Fie curba meridiană $\Gamma: z = \pm \int \sqrt{(a^2 + C - y^2)/(y^2 - C)}dy$, $x = 0$. Dacă $C = 0$, cu $y = a \sin t$, obținem *trac-*

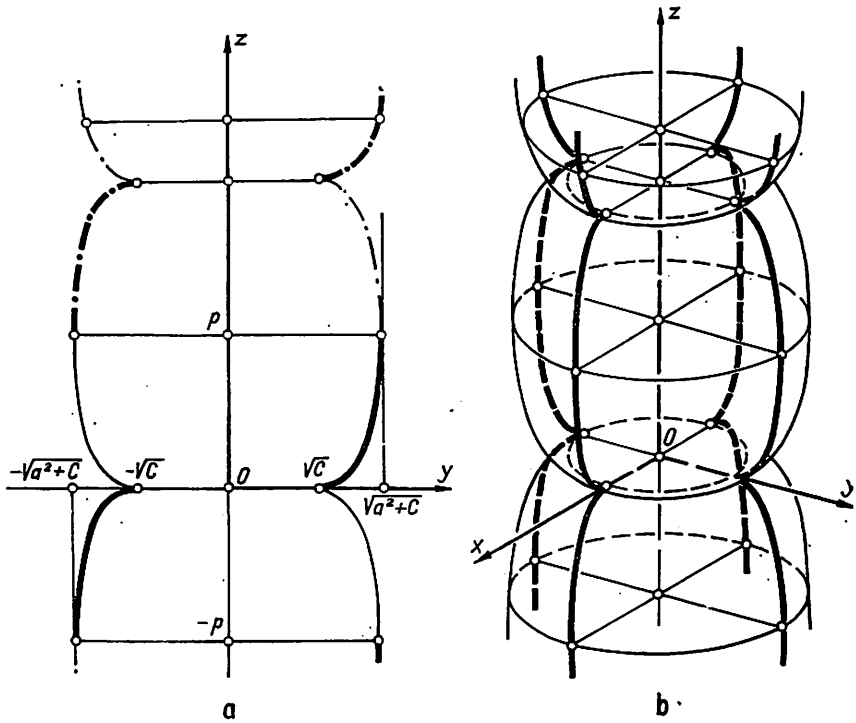


Fig. 53

tricea $\Gamma: x = 0$, $y = a \sin t$, $z = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$; deci S e *pseudosfera* (*10*). Dacă $C<0$, atunci $y^2 \leqslant a^2 + C$, deci $C > -a^2$ iar $z'' = \mp a^2 y/(y^2 - C)^2\lambda$ cu $\lambda^2 = (a^2 + C - y^2)/(y^2 - C)$; tabela nr. 3 arată că O e punct de inflexiune pentru Γ, deci punct conic pentru S (fig. 54). Dacă $C > 0$, avem $C \leqslant y^2 \leqslant a^2 + C$, forma lui Γ fiind exprimată de tabela nr. 4; S are forma din fig. 55.

Obs. a) S de rotație are metrica (60); cum $K = -\frac{1}{h} h_{uu} = -1/a^2$, avem de integrat $a^2h'' = h$, deci $h = Ae^{u/a} + Be^{-u/a}$. Sînt de considerat cele 3 tipuri; căci A și B pot fi de același semn, de semne contrare, ori unul din ele e 0:

(80) $\qquad ds^2 = du^2 + e^{2u/a}dv^2$, $ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{u}{a} dv^2$, $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2$.

Apl. $K = -(1 + af''/(f'^2 + a^2) \cos u)/(f'^2 + a^2)$. Dacă $f'' = 0$, deci $f = kv + k_0$ (putem avea $k_0 = 0$), obținem elicoidul generat de o tractrice, axa lui fiind asimptota tractricei, numit *suprafața lui Dini* (fig. 56), care e o suprafață pseudosferică cu $K = -1/(a^2 + k^2)$; cînd $k = 0$, S e *pseudosfera.* a) $a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + (k \pm \sqrt{a^2 + k^2})v = C$, $\quad s = \sqrt{a^2 + k^2}v$; $\quad \theta = u$, $\quad \theta = \pi - u$.

b) $H = -\operatorname{ctg} 2u/\sqrt{a^2 + k^2}$.

Tabela 3

y	$-\sqrt{a^2+C}$		0		$\sqrt{a^2+C}$
$\frac{dz}{dy}$	0	+	$\sqrt{\frac{a^2+C}{-C}}$	+	0
$\frac{d^2z}{dy^2}$		+	0	−	
z	$-p$	↗	0	↗	p

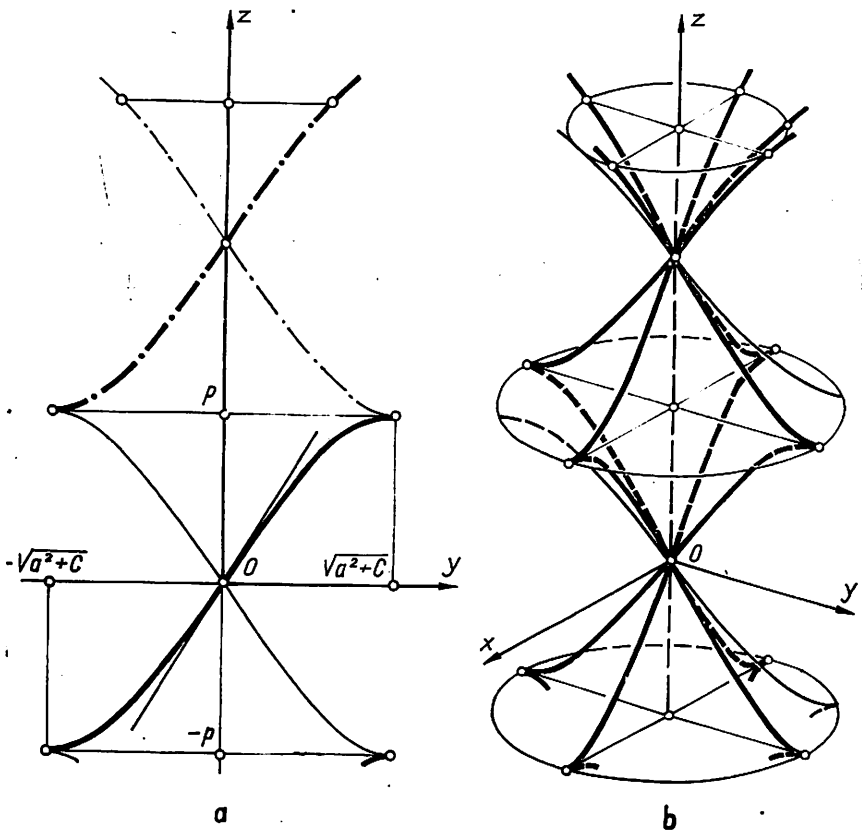


Fig. 54

Tabela 4

y	$-\sqrt{a^2+C}$		$-\sqrt{C}$		$+\sqrt{C}$		$\sqrt{a^2+C}$
$\frac{dz}{dy}$	0	+	$+\infty$	▨	$+\infty$	+	0
$\frac{d^2z}{dy^2}$		+		▨		−	
z	$-p$	↗	0		0	↗	p

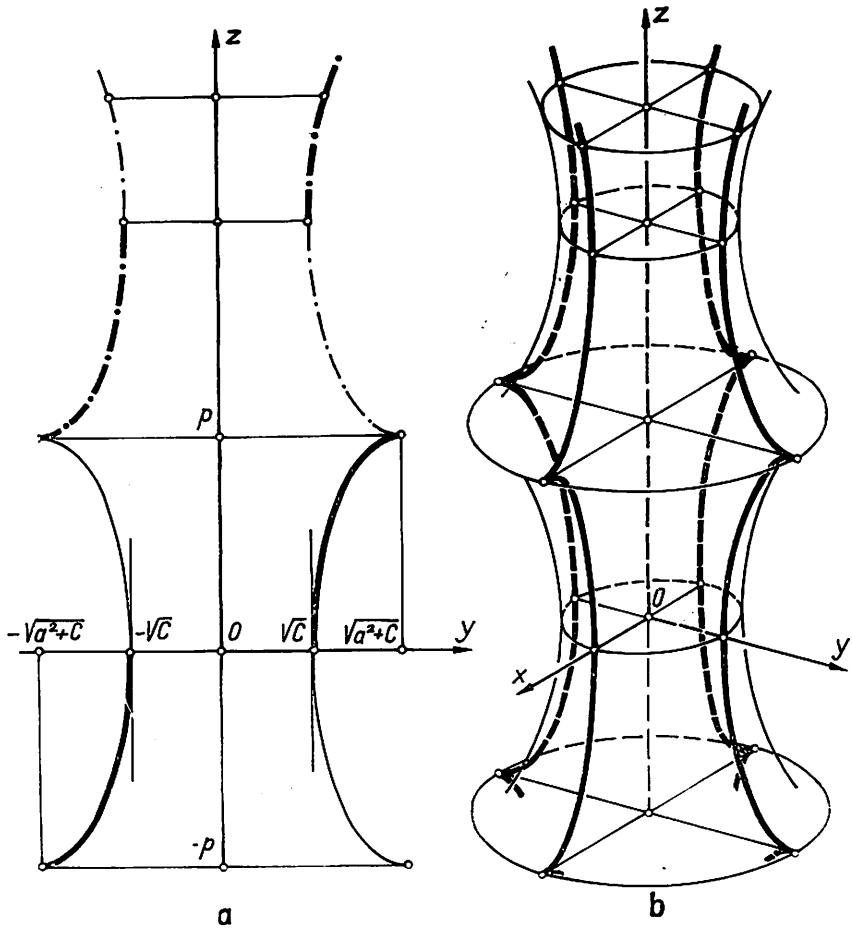


Fig. 55

145 Se numeşte *suprafaţă Ţiţeica* o suprafaţă S cu proprietatea

(81) $$K/d^4 = \text{const.},$$

unde K e curbura totală în P la S, iar d e distanţa de la un punct fix (centrul lui S) la planul tangent în P la S. Se cere: a) Să se arate că o cuadrică cu centru e o suprafaţă Ţiţeica. b) Să se determine m astfel ca $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^m$ să fie o suprafaţă Ţiţeica.

R. a) Fie S de ecuaţie (27); explicitînd pe z, avem $p = -cx/az$, $q = -cy/bz$, $r = -c^2(1 - y^2/b)/az^3, \ldots$, $K = 1/abc\lambda^2$, $d = 1/\sqrt[4]{\lambda}$ cu $\lambda = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ iar $K/d^4 = 1/abc$. b) $K/d^4 = m^2/(m-1)^2u^{2(m+2)}$; deci $m = -2$ (fig. 57). *Obs.* a) Liniile asimptotice: $(1 - m)du^2 = u^2dv^2$, adică $v = \pm\sqrt{1-m}\ln Cu$ sînt curbe Ţiţeica pentru $m = -2$. b) Putem lua $u = e^U$, $v = V$.

146 Vectorii de poziţie ai punctelor unei suprafeţe (13) verifică sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi de forma

(82) $$\bar{r}_{uu} = a\bar{r}_u + b\bar{r}_v + c\bar{r},\ \bar{r}_{uv} = a'\bar{r}_u + b'\bar{r}_v + c'\bar{r},\ \bar{r}_{vv} = a''\bar{r}_u + b''\bar{r}_v + c''\bar{r},$$

unde $a, b, \ldots, b'', c''$ sînt funcţii de u, v. Se cere : a) Să se arate că un sistem integrabil (82) defineşte o singură suprafaţă S, abstracţie făcînd de o centro-afinitate. b) Să se determine condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul (82) să reprezinte o suprafaţă Ţiţeica. c) Transformata unei suprafeţe

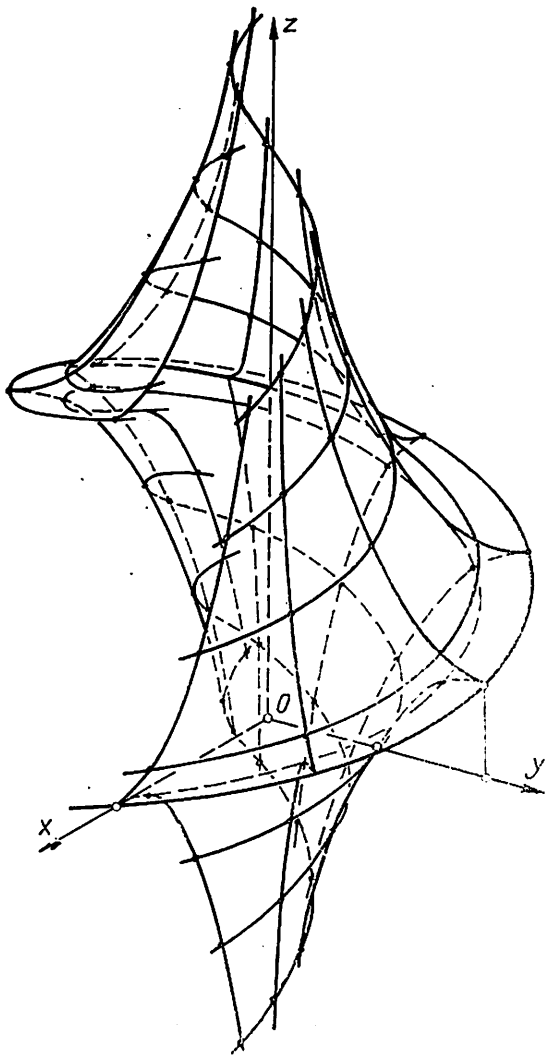


Fig. 56

Ţiţeica, în polaritatea în raport cu sfera cu centrul în cel al lui S şi de rază unitatea, e de asemenea o suprafaţă Ţiţeica. d) Să se afle suprafeţele date de sistemul (82) cînd : d_1) coeficienţii $a, \ldots, c''$ sînt constante ; d_2) fiecare ecuaţie e de tip Poisson.

R. a) Dacă $\Delta = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}) = 0$, deci (cel puţin) o ecuaţie (82) e de ordinul întîi, ecuaţiile (82) definesc un con şi reciproc. Fie $\Delta \neq 0$; luînd $\bar{r}_u = \bar{\rho}$, $\bar{r}_v = \bar{\sigma}$, (82) se transformă într-un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin în $\bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\sigma}$. Cînd acest sistem e complet integrabil, el

admite o singură soluție $\bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\sigma}$ care iau valorile $\bar{r}_0, \bar{\rho}_0, \bar{\sigma}_0$ pentru $u = u_0$, $v = v_0$; deci: *sistemul complet integrabil (82) definește o singură suprafață S care trece printr-un punct dat P_0 și e tangentă în P_0 unui plan dat.* Sistemul (82) e echivalent cu sistemul scalar

(82′) $\theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v + c\theta,\ \theta_{uv} = a'\theta_u + b'\theta_v + c'\theta,\ \theta_{vv} = a''\theta_u + b''\theta_v + c''\theta,$

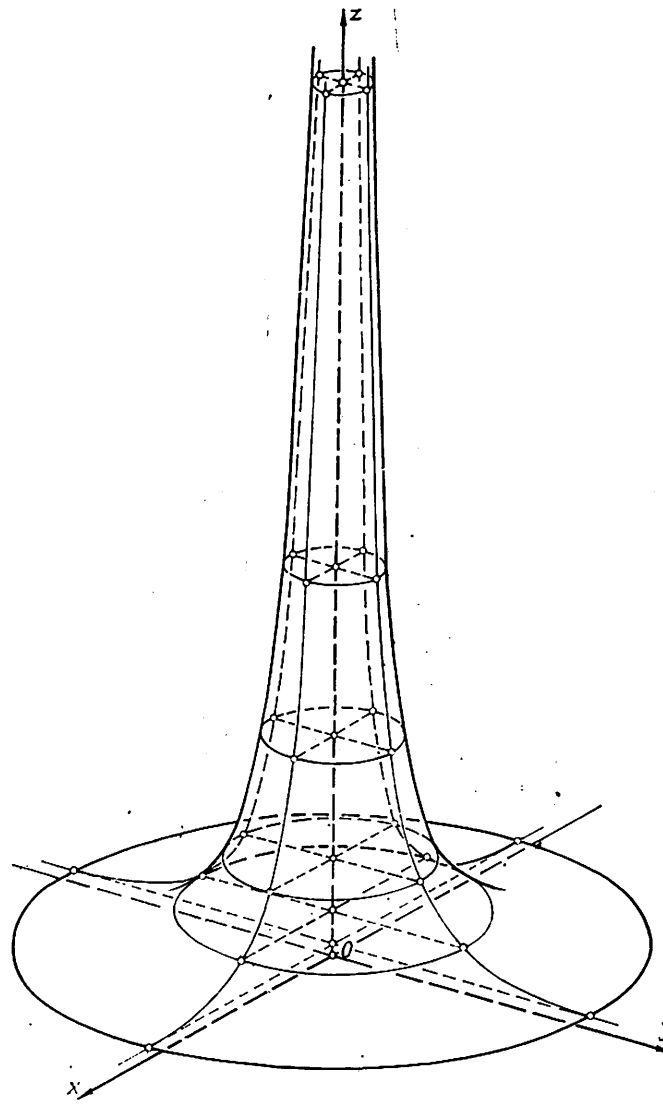


Fig. 57

iar 3 soluții independente $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ale sistemului definesc o suprafață S. Însă orice combinație liniară a acestor soluții e și ea o soluție a lui (82′); deci: *S e definită abstracție făcînd de o centro-afinitate.* Condițiile de integrabilitate sînt

$$c_v' + ac' + bc'' = c_u' + a'c + b'c', \quad c_v' + a'c' + b'c'' = c_u'' + a''c + b''c',$$

(82″) $$a_v + ba'' = a_u' + c' + a'b', \quad a_v' + a'^2 + b'a'' = a_u'' + c'' + aa'' + b''a',$$

$$b_v + c + ab' + bb'' = b_u' + a'b + b'^2, \quad b_v' + c' + a'b' = b_u'' + a''b.$$

Obs. a_1) Dacă S e raportată la liniile asimptotice, avem $c = c'' = 0$, $c' \neq 0$. a_2) S fiind raportată la coordonate omogene, punctele ei rămîn neschimbate prin substituția $\bar{r} = \rho\bar{r}^*$; obținem pentru *ecuația Laplace* (82_2):

$$h = a'b' + c' - a'_u, \quad k = a'b' + c' - b'_v \text{ (invarianți).} \tag{82'''}$$

Ecuația Laplace e *cu invarianți egali*: $h = k$, dacă

$$a'_u = b'_v; \tag{82^{IV}}$$

există deci o funcție $m(u, v)$ astfel ca $a' = m_v$, $b' = m_u$ și putem alege pe ρ astfel ca $a'^* = (m - \ln\rho)_u = 0$, $b'^* = (m - \ln\rho)_v = 0$, adică: *putem să aducem o ecuație Laplace cu invarianți egali la forma canonică a lui Moutard*

$$\bar{r}_{uv} = h\bar{r}. \tag{82^{V}}$$

b) Ținînd seama de (82) și de planul tangent: $\bar{R}\cdot\bar{n} = \triangle/|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$, obținem $K = (cc'' - c'^2)\triangle^2/(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)^4$ și $d = \triangle/|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$; deci $K/d^4 = (cc'' - c'^2)/\triangle^2$. Dacă S^* e transformata lui S printr-o centro-afinitate: $\bar{r}^* = (\bar{r}_1\cdot\bar{r})\bar{i} + (\bar{r}_2\cdot\bar{r})\bar{j} + (\bar{r}_3\cdot\bar{r})\bar{k}$ cu $\bar{r}_i$ vectori constanți $(i = 1, 2, 3)$, se găsește K^*/d^{*4}: $K/d^4 = 1/(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3) = \text{const}$; deci $I = K/d^4$ e un *invariant centro-afin relativ al lui* S. Cînd $c = c'' = 0$, $I = -c'^2/\triangle^2$; deoarece $\triangle_u = (a + b')\triangle$ $\triangle_v = (a' + b'')\triangle$, atunci $I_u = -4Ib'$, $I_v = -4Ia'$. Rezultă *teorema Țițeica*: *Condiția necesară și suficientă ca invariantul* $I = K/d^4$ *să fie constant pentru o suprafață definită de sistemul complet integrabil* (82), *raportată la liniile sale asimptotice, e ca* $a' = b' = 0$. *Obs.* Dacă $a'' = 0$, (82) ne arată că S e riglată, fiind simplu riglată cînd $a'' = 0$, $b \neq 0$ (u = const. sînt drepte) sau $a'' \neq 0$, $b = 0$ (v = const. sînt drepte) și dublu riglate cînd $a'' = b = 0$ (u = const. și v = const. sînt drepte). Fie $a'' = 0$, $b \neq 0$; notînd $c' = h$, ecuațiile (82'') devin

$$ah = h_u, \quad h_v = b''h, \quad a_v = h, \quad b_v + bb'' = 0, \quad h = b'_u.$$

Primele 2 relații determină pe a și b'', iar celelalte dau $(\ln h)_{uv} = h$ și $b = \varphi(u)/h$ cu $\varphi(u)$ o funcție arbitrară. Deci: *sistemul*

$$\bar{r}_{uu} = h_u\bar{r}_u/h + \varphi(u)\bar{r}_v/h, \quad \bar{r}_{uv} = h\bar{r}, \quad \bar{r}_{vv} = h_v\bar{r}_v/h \tag{83}$$

funcția h *fiind o soluție a ecuației Liouville*

$$(\ln h)_{uv} = h, \tag{83'}$$

definește suprafețele Țițeica riglate. Soluția generală a ecuației (83') fiind $h = 2U'V'/(U + V)^2$ cu $U = U(u)$ și $V = V(v)$ funcții arbitrare și luînd pe U și V ca noi variabile, sistemul (82') se scrie

$$\theta_{uu} = -2\theta_u/(u + v) + \psi(u)\,(u + v)^2\theta_v/2, \quad \theta_{uv} = 2\theta/(u + v)^2, \quad \theta_{vv} = -2\theta_v/(u + v), \tag{83''}$$

notînd tot u, v în loc de U, V și $\varphi(u)/U'^3 = \psi(U)$. Din ultima ecuație (83''), obținem $\theta_v = 2A/(u + v)^2$, adică $\theta = B - 2A/(u + v)$, unde A și B sînt funcții de u care se determină din condiția că θ verifică celelalte ecuații (83''); deci $B = A'$ și $A''' - \psi(u)\,A = 0$. Dacă $A_i (i = 1, 2, 3)$ sînt 3 soluții independente ale ecuației în A și luînd $\bar{A}(A_1, A_2, A_3)$, obținem: *suprafața Țițeica reprezentată de sistemul (83'') are ecuația*

$$\bar{r} = \bar{A}' - 2\bar{A}/(u + v) \text{ cu } \bar{A} \text{ dat de } \bar{A}''' - \psi(u)\,\bar{A} = 0. \tag{83'''}$$

Fie $a'' \neq 0$, $b \neq 0$; notînd $c' = h$, din (82'') deducem $a = h_u/h$, $b'' = h_v/h$, $bh = \alpha(u)$, $a''h = \beta(v)$ iar $(\ln h)_{uv} = h - \alpha\beta/h^2$. Printr-o transformare de forma $U = U(u)$, $V = V(v)$ putem avea $\alpha(u) = 1$, $\beta(v) = 1$, încît: *suprafețele Țițeica neriglate sînt date de sistemul*

$$\bar{r}_{uu} = h_u\bar{r}_u/h + \bar{r}_v/h, \quad \bar{r}_{uv} = h\bar{r}, \quad \bar{r}_{vv} = \bar{r}_u/h + h_v\bar{r}_v/h, \tag{84}$$

funcția h *fiind o soluție a ecuației*

$$(\ln h)_{uv} = h - 1/h^2. \tag{84'}$$

c) Fie sfera Σ: $\bar{R}^2 = 1$. Transformata S^* e înfășurătoarea planului polar π (a lui $P \in S$ în raport cu Σ): $\bar{R}\cdot\bar{r} = 1$; deci S^*: $\bar{r}\cdot\bar{r}^* = 1$, $\bar{r}_u\cdot\bar{r}^* = 0$, $\bar{r}_v\cdot\bar{r}^* = 0$, adică S^*: $\bar{r}^* = \bar{r}_u \times \bar{r}_v/\triangle$. Cum $\bar{r}^*_u = h(\bar{r}_u \times \bar{r})/\triangle$, $\bar{r}^*_v = h(\bar{r} \times \bar{r}_r)/\triangle$ și ținînd seama de (82) și (82''), rezultă afirmația. d_1) Luăm $x = e^{\alpha u + \beta v}$, $y = e^{\gamma u + \delta v}$, $z = e^{\lambda u + \mu v}$, existînd constantele p, q, r astfel ca $p\alpha + q\gamma + r\lambda = 0$, $p\beta + q\delta + r\mu = 0$; deci S e o suprafață tetraedrală (31). Dacă S de ecuație (31) e o suprafață

Țițeica, din (82″) rezultă $a = b'' = 0$, $c' = ba''$; pentru soluția $x = Ae^{\alpha u+\beta v}$, (82′) dă $\alpha^2 = b\beta$, $\alpha\beta = c'$, $\beta^2 = a''\alpha$, adică $\alpha^3 = bc'$, $\beta = c'/\alpha = \alpha^2/b$. Luînd $\alpha = \beta = 1$, atunci $b = c' = a'' = 1$, $\gamma = \mu = \varepsilon'$, $\delta = \lambda = \varepsilon''$ cu ε' și ε'' rădăcinile cubice imaginare ale unității: e cazul (84) cu $h = 1$. Deci S are ecuația (31′) cu $a^3 = ABC$. *Obs.* E imaginară reprezentarea parametrică

(85) $$x = Ae^{u+v},\ y = Be^{\varepsilon' u+\varepsilon'' v},\ z = Ce^{\varepsilon'' u+\varepsilon' v} \text{ (adică } xyz = ABC);$$

deci liniile asimptotice a care e raportată S) sînt imaginare. Putem considera integrale reale; atunci obținem

(86) $$x = Ae^{u+v},\ y = Be^{-\frac{1}{2}(u+v)} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),\ z = Ce^{-\frac{1}{2}(u+v)} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

sau, prin transformarea $U = -\frac{1}{2}(u+v)$, $V = \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$ (cu u, v în loc de U, V):

(86′) $$x = Ae^{-2u},\ y = Be^{u}\cos v,\ z = Ce^{u}\sin v;\ ((y/B)^2 + (z/C)^2)x - A = 0.$$

Printr-o centro-afinitate, din (31′) sau (86′), se obține

(85′) $$(a_1x + b_1y + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z)(a_3x + b_3y + c_3z) = k.$$

d$_2$) Luînd $a = \alpha/(u+v)$, $b = \beta/(u+v)$, $c = \gamma(u+v)^2$ (α, β, γ — constante) și formule analoage pentru $a', \ldots, c''$, fiecare din ecuațiile (82) e o ecuație Poisson; atunci (82) sînt condiții între constantele $\alpha, \ldots, \gamma''$. Dacă S e o suprafață Țițeica, (83″) devine un sistem de ecuații de tip Poisson dacă $\psi(u) = 0$, deci $a'' = b = 0$; atunci (83‴), care e o cuadrică cu centru, se scrie

$$\bar{r} + (2C_1uv + \bar{c}_2(v-u) - 2\bar{c}_3)/(u+v);\ \text{căci } \bar{A} = \bar{c}_1u^2 + \bar{c}_2u + \bar{c}_3.$$

Luînd $\bar{c}_1(a/2, 0, c/2)$, $\bar{c}_2(0, 1, 0)$, $\bar{c}_3(-a/2, 0, c/2)$, găsim hiperboloidul (4).

147 Să se arate că, pentru o suprafață riglată S cu centru, expresia K/d^4 e constantă în lungul fiecărei generatoare (K-curbura totală, d-distanța de la centrul lui S la planul tangent).

148 Fie o suprafață S; se numește *riglată asimptotică* asociată lui S suprafața riglată Σ generată de tangentele la o familie de linii asimptotice în punctele în care acestea taie o linie asimptotică dată din cealaltă familie de linii asimptotice. Să se arate că, pentru ca S să fie o suprafață Țițeica în raport cu un punct P_0 (centrul suprafeței) e necesar și suficient ca desfășurabilele asimptotice ale tuturor riglatelor asimptotice asociate lui S să fie conuri cu vîrful în P_0.

149 Se numește *suprafață* T o suprafață pentru care $K/\cos^4\theta = \text{const.}$ în orice punct P al lui S, θ fiind unghiul pe care-l face normala în P la S cu o direcție fixă (*G. Țițeica*). Să se arate că paraboloizii sînt suprafețe T, direcția fixă fiind axa lor.

150 Fie o suprafață S. Se numește *imaginea sferică a lui* $P \in S$ extremitatea P^* a vectorului $\bar{r}^*$ egal cu vectorul $\bar{n}$ al normalei în P la S, punctul de aplicație al lui $\bar{r}^*$ fiind originea O; porțiunea din sfera S^* $(0; 1)$, descrisă de P^* cînd P descrie pe S, se zice că e *imaginea sferică a lui* S. Se cere: a) Să se arate că, în reprezentarea sferică, orientarea unei porțiuni Σ a lui S se păstrează sau se schimbă, după cum Σ e constituită din puncte eliptice sau hiperbolice; imaginile punctelor parabolice ale lui S sînt puncte singulare ale reprezentării. b) Să se determine imaginea sferică a unei suprafețe desfășurabile. c) Să se demonstreze că prima formă fundamentală a sferei S^*, numită *a treia formă fundamentală a suprafeței* S nu e independentă de primele forme fundamentale ale lui S. d) Valoarea absolută a

curburii totale, într-un punct regulat P al lui S, e egală cu limita raportului dintre aria imaginii sferice Σ^* a unei porțiuni Σ a lui S, care conține pe P, și aria lui Σ, cînd Σ tinde către P (*Gauss*). *Apl.* a) Să se găsească suprafețele de rotație pentru care a treia formă fundamentală e izotropă. b) Să se arate că o suprafață S se reprezintă conform pe sfera unitate dacă și numai dacă S e o sferă sau o suprafață minimă (*Bonnet*).

R. a) Fie $S^*: \bar{r}^* = \bar{n}(u, v)$; atunci, conform (69'), $\overline{N}^* = K\overline{N}$. b) Fie S de ecuație (34) cu condiția (34''); atunci $\bar{n}$, același în lungul generatoarei $u = \text{const.}$, nu depinde de v. Deci: *imaginea sferică a unei suprafețe desfășurabile e o curbă. Obs.* Imaginea sferică a generatoarelor coincide cu cea a tangentelor liniei de strictiune, iar a suprafeței cu cea a binormalelor liniei de strictiune. c) $ds^{*2} = \bar{n}_u^2\,du^2 + 2\bar{n}_u \cdot \bar{n}_v\,du\,dv + \bar{n}_v^2\,dv^2 = e du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$; ținînd seama de (69'), obținem *relația lui Beltrami-Enneper*

(87) $K\,ds^2 - 2H\Phi + ds^{*2} = 0$; deci $e = 2HD - KE$, $f = 2HD' - KF$, $g = 2HD'' - KG$.

d) $|\overline{N}^*| = |K|\,|\overline{N}|$, adică $\sqrt{eg - f^2} = |K|\sqrt{EG - F^2}$; deci aria $\Sigma^* = \iint_D \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv = \iint_D |K|\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$. Conform formulei mediei unei integrale duble, există un punct $P_1 \in \Sigma$ astfel ca aria $\Sigma^* = |K_1|$ aria Σ, unde aria $\Sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$, iar K_1 e curbura totală a lui S în P_1. Deci

(88) $$|K| = \lim_{\Sigma \to P} \frac{\text{aria } \Sigma^*}{\text{aria } \Sigma}.$$

Apl. a) Fie S de ecuații (6'); găsim $e = \varphi''^2/(1+\varphi'^2)^2$, $f = 0$, $g = \varphi'^2/(1+\varphi'^2)$. Din $e = g$, deducem $\varphi = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \ln[(1 + C_1 e^{\varepsilon u})/(1 - C_1 e^{\varepsilon u})] + C_2$. b) Pentru sfera (7): $ds^{*2} = ds^2/r^2$; pentru S cu $H = 0$: $ds^{*2} = -K\,ds^2$. Reciproc: $e/E = f/F = g/G$ dau $D/E = D'/F = D''/G$ (S sferă) sau $H = 0$ (S minimală). Deci: *dacă S e o sferă sau e minimală, reprezentarea sferică e o reprezentare conformă a ei.*

151 Să se exprime torsiunea unei linii asimptotice a unei suprafețe S cu ajutorul curburii totale a lui S. *Apl.* Să se arate că liniile asimptotice ale unei suprafețe Țițeica sînt curbe Țițeica.

R. În lungul unei linii asimptotice C, avem $\Phi = 0$ și $\overline{\beta}$ (binormala) $= \varepsilon\bar{n}$ ($\varepsilon = \pm 1$). Însă $d\overline{\beta}/ds = \overline{n}/T$; deci $1/T^2 = d\bar{n}^2/ds^2 = ds^{*2}/ds^2$, unde ds e elementul de arc al lui C. Cu (87) și $\Phi = 0$, avem *formula lui Enneper*

(89) $$1/T^2 = -K.$$

Dacă S e neriglată iar $1/T_1$ și $1/T_2$ sînt torsiunile în P ale liniilor asimptotice C_1 și C_2 ce trec prin P, atunci $1/T_1 = \sqrt{-K}$ și $1/T_2 = -\sqrt{-K}$. *Apl.* Cu (89) și (81) și că π_t (în P la S) $= \pi_0$ (în P la C).

10. LINII DE CURBURĂ PE O SUPRAFAȚĂ

152 Să se determine liniile de curbură ale suprafeței S: a) $x = a(u - v)/2$, $y = b(u + v)/2$, $z = uv/2$; b) $x = f(u)\cos u - f'(u)\sin u + g(v)\cos u$, $y = f(u)\sin u + f'(u)\cos u + g(v)\sin u$, $z = v$; c) $x = f(u) + g(v)$, $y = f(u) - g(v)$, $z = au$; d) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$ $(a > b > c)$; e) $x^2 + y^2 = 2z$; f) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^m$; g) $x^2 = (u-1)(v-1)/3$, $y^2 = -(u-2)(v-2)$, $z^2 = 2(u-4)(v-4)/3$.

R. Ecuația diferențială a liniilor de curbură e

$$(90)\qquad \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

a) $(u+\sqrt{a^2+b^2+u^2})\,(v+\sqrt{a^2+b^2+v^2}) = C_1$ și $u+\sqrt{a^2+b^2+u^2} = C_2(v+\sqrt{a^2+b^2+v^2})$. *Obs.* S e dublu riglată (paraboloid hiperbolic). b) $u = C_1$, $v = C_2$. c) $u = C_1$, $v = C_2$. *Obs.* S e desfășurabilă ($K = 0$). d) Cu $p = -c^2x^2/a^2z, \ldots$, ecuația (90) devine

$$(90')\qquad b^2Bxy\,dx^2 - (b^2Bx^2 - a^2Ay^2 + a^2b^2C)\,dx\,dy - a^2Bxy\,dy^2 = 0,$$

unde $A = b^2 - c^2$, $B = c^2 - a^2$, $C = a^2 - b^2$. Eliminînd constantele din (90') și din ecuația obținută prin diferențiere, problema se reduce la integrarea ecuației

$$(90'')\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ cu integrala generală } x^2/p^2 \pm y^2/q^2 - 1 = 0;$$

deci liniile de curbură se proiectează pe Oxy după elipse sau hiperbole. Înlocuind în (90') pe y și $\frac{dy}{dx}$ din (90''), obținem $b^2B^2p^2 + a^2A^2q^2 + a^2b^2C = 0$, cu ajutorul căreia se poate discuta natura liniilor de curbură. e) Luînd $x = u$, $y = v$, obținem $u^2 - v^2 = C_1$, $uv = C_2$. f) $u = C_1$, $v = C_2$. g) $u = C_1$, $v = C_2$. *Obs.* S e elipsoidul $x^2 + y^2/2 + z^2/4 - 1 = 0$.

153 Fie suprafața de rotație S obținută rotind curba $C: x = u$, $y = 0$, $z = u^{-2}$ în jurul axei Oz. Se cere: a) Să se găsească curbura curbei C. b) Să se afle curbura totală și curbura medie ale lui S; să se arate că S e o suprafață Țițeica. c) Să se determine liniile asimptotice și liniile de curbură ale lui S. d) Să se găsească loxodromele lui S, știind că unghiul pe care-l face cu meridianele e $\pi/4$.

154 Fie suprafața $S: x = u$, $y = v$, $z = uv/a$. Se cere: a) Să se arate că intersecția planului tangent în $P \in S$ cu S e constituită din curbele asimptotice ale lui S care trec prin P; explicație. b) Să se afle curburile totală și medie; consecințe. c) Să se găsească curbele ortogonale lui C (de pe S) de-a lungul cărora produsul razelor principale de curbură e constant. d) Liniile de curbură ale suprafeței S.

R. a) În $P(u_0, v_0) \in S$, fie planul tangent π_t. $\Gamma = \pi_t \cap S$ e o conică, proiecția ei pe Oxy fiind dreptele $x = u_0$, $z = 0$ și $y = v_0$, $z = 0$; deci $\Gamma = d_1d_2$ cu $d_1: x = u_0$, $u_0y = az$ și $d_2: y = v_0$, $v_0x = az$. Liniile asimptotice $\Gamma_1: x = C_1$, $y = v$, $z = C_1v/a$ și $\Gamma_2: x = u$, $y = C_2$, $z = C_2u/a$; din $P \in \Gamma_t$, obținem $C_1 = u_0$ și $C_2 = v_0$ iar $\Gamma_t = d_t$. b) $K = -1/a^2(1 + u^2/a^2 + v^2/a^2)^2 < 0$; S are numai puncte hiperbolice. $H = -uv/a^3(1 + u^2/a^2 + v^2/a^2)^{3/2} = 0$ de-a lungul lui $u = 0$ și $v = 0$. c) $R_1R_2 = 1/K = \text{const.}$ dacă $u^2 + v^2 = \text{const.}$; deci $C: xy = az$, $x^2 + y^2 = k$. Direcția tangentei la $C: u\,\delta u + v\,\delta v = 0$; deci condiția de ortogonalitate: $d(uv) = a^2d(v/u)/[(v^2/u^2) - 1]$ cu soluția $v - u = (v + u)\,Ce^{2uv/a^2}$. d) $u + \sqrt{a^2+u^2} = C_1(v + \sqrt{a^2+v^2})$ și $(u + \sqrt{a^2+u^2})(v + \sqrt{a^2+v^2}) = C_2$

155 Se dă suprafața $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$. Se cere: a) Curbura medie, curbura totală și natura punctelor lui S. b) Razele principale de curbură. c) Liniile asimptotice și liniile de curbură ale lui S.

156 Pe suprafața generată de cercurile tangente în origine axei Oz și care se sprijină pe dreapta din planul Oxy, paralelă cu Oy, la distanța $2a$ de această axă. Să se determine liniile asimptotice și liniile de curbură ale suprafeței S.

157 Se dă suprafața $S: x = au + \sin u \operatorname{ch} v$, $y = v + a\cos u \operatorname{sh} v$, $z = 1 - a^2\cos u \operatorname{ch} v$ ($|a| = 1$). Se cere: a) Să se arate că S e suprafață minima. b) Liniile asimptotice și liniile de curbură ale suprafeței S.

158 Fie suprafaţa $S: x = (v + e^{u^2/2}) \cos u - f(u) \sin u$, $y = (v + e^{u^2/2}) \sin u + f(u) \cos u$, $z = v$. Să se determine: a) funcţia $f(u)$ astfel ca S să fie o suprafaţă desfăşurabilă; b) curba de întoarcere a suprafeţei desfăşurabile S; c) liniile de curbură ale suprafeţei S.

159 Se numeşte *suprafaţă Joachimstahl* suprafaţa care are o familie de linii de curbură formată din curbe plane ale căror plane formează un fascicul. Se cere: a) Să se arate că suprafeţele de rotaţie sînt astfel de suprafeţe. b) Să se dea o construcţie a unei suprafeţe Joachimstahl. *Apl.* a) Fiind dată familia de plane $\pi: z = ux + vy + \sqrt{1 + u^2 + v^2} + f(v)$ cu 2 parametrii u, v, să se determine $f(v)$ astfel ca înfăşurătoarea S a acestor plane să fie o suprafaţă Joachimstahl. b) Să se afle liniile asimptotice ale înfăşurătoarei S a planelor $\pi: 2ux + 2vy + (1 - u^2 - v^2) z - f(u) - g(v) = 0$, cînd S e o suprafaţă Joachimstahl .în 2 moduri.

R. a) Fie S de ecuaţii (6); liniile de curbură sînt $C_1: v = \text{const.}$ (curbe plane în $\pi_1: y = x \operatorname{tg} v$ trecînd prin axa de rotaţie Oz) şi $C_2: u = \text{const.}$ (cercuri de rază $r = \varphi(u)$ situate în $\pi_2: z = \psi(u) \parallel Oxy$). b) Într-un plan, care conţine o dreaptă d, se construieşte cea mai generală familie de curbe C care admit ca traiectorii ortogonale a familiei de cercuri avînd centrele pe d; fiecare curbă a familiei C se roteşte în jurul lui d cu un unghi care variază după o lege determinată de la o curbă la alta. Locul poziţiilor acestor curbe e o suprafaţă Joachimstahl. *Obs.* Pe S, liniile de curbură ale unei familii sînt curbe sferice, situate pe sfere cu centrele pe axa d a fasciculului de plane care conţin liniile de curbură ale celeilalte familii; reciproca e adevărată. *Apl.* a) Fie $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ la π, deci la S; atunci $S: x = \alpha$, $y + f'(v) = \beta$, $z - [f(v) - vf'(v)] = \gamma$. În lungul secţiunii C_1 a lui S cu $\pi_1: x = x_0$, avem $\alpha = x_0$; deci C_1 sînt linii de curbură (*teorema Joachimstahl*). În lungul curbei $C_2: v = v_0$, normalele lui π trec prin punctul fix $P_0\,[0, -f'(v_0), f(v_0) - v_0 f'(v_0)]$; deci C_2 (de pe sfera de centru P_0 şi raza $r = 1$) sînt linii de curbură. Deoarece $\alpha + u\gamma = 0$, $\beta + v\gamma = 0$, rezultă că C_2 sînt cercuri din $\pi_2: y + v_0 z + (1 + v_0^2) f'(v_0) - v_0 f(v_0) = 0 \parallel Ox$. Dacă d (fixă) $\in \pi_2$, atunci $d \parallel Ox$; cu $\Omega(0, b, c) = d \cap Oyz$, avem $b + cv + (1 + v^2) f'(v) - vf(v) = 0$, adică $f(v) = a\sqrt{1 + v^2} - bv + c$. *Obs.* P_0 descrie cercul $(y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2$, $x = 0$; S e torul $[x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + a^2 - 1]^2 = 4a^2[(y - b)^2 + (z - c)^2]$. b) S e dată de $\pi = 0$, $\pi_1 = 2x - 2uz - f'(u) = 0$, $\pi_2 = 2y - 2vz - g'(v) = 0$. Fie, în $P \in S$, normalele $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ la S (deci la π) şi $\bar{n}_i$ la π_i $(i = 1, 2)$. Deoarece $\bar{n} \cdot \bar{n}_1 = u/\sqrt{1 + u^2}$, în lungul lui $C_1: u = u_0$, π_1 taie pe S după un unghi constant $\theta = \operatorname{arc ctg} u_0$; deci curbele plane C_1 sînt linii de curbură. Planele π_1 trec prin o dreaptă fixă, dacă $x - u(z + f'(u)/2u) = 0$ e un fascicul; deci $f'(u) = 2a_1 u$, adică $f(u) = a_1 u^2 + b_1 u + c_1$. Deoarece $\bar{n} \cdot \bar{n}_2 = v/\sqrt{1 + v^2}$, curbele plane $C_2: v = v_0$ sînt linii de curbură, π_2 trecînd prin o dreaptă fixă dacă $g(v) = a_2 v^2 + b_2 v + c_2$. Ecuaţia liniilor asimptotice: $dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma = 0$, adică

$$du^2/U + dv^2/V = 0 \text{ cu } U = (a_2 - a_1) u^2 + a_2 + c_1 + c_2,\ V = (a_1 - a_2) v^2 + a_1 + c_1 + c_2.$$

160 Se dă suprafaţa $S: x = u(3v^2 - u^2 - 1/3)$, $y = v(3u^2 - v^2 - 1/3)$, $z = 2uv$. Să se arate: a) liniile asimptotice ale lui S sînt ortogonale; b) liniile de curbură ale lui S sînt curbe plane.

161 Se numeşte *suprafaţă Enneper* înfăşurătoarea planelor mediatoare ale segmentelor ce unesc punctele a 2 parabole situate în plane perpendiculare şi ale căror vîrfuri sînt în focarul celeilalte. Să se arate: a) această suprafaţă e minimală; b) liniile de curbură sînt curbe plane şi să se găsească înfăşurătoarea planelor lor; c) liniile asimptotice sînt elice, fiind bisectoarele liniilor de curbură. De asemenea, să se determine: d) razele principale de curbură într-un punct al suprafeţei; e) curba de întoarcere a suprafeţei desfăşurabile circumscrisă suprafeţei în lungul unei linii coordonate.

R. Luînd $F_1 = V_2 = (0, 0, a)$ şi $F_2 = V_1 = (0, 0, -a)$, fie parabolele $p_1: x^2 = 8a(z + a)$, $y = 0$ şi $p_2: y^2 = -8a(z - a)$, $x = 0$; cu $P_1(4au, 0, 2au^2 - a) \in p_1$ şi $P_2(0, 4av, -2av^2 + a) \in p_2$, obţinem că suprafaţa Enneper are ecuaţiile (fig. 58)

$$(91) \qquad S: x = a(3u + 3uv^2 - u^3),\ y = a(3v + 3u^2 v - v^3),\ z = 3a(u^2 - v^2).$$

Obs. S trece prin $O(u = v = 0)$ și planul tangent în O la S e Oxy. a) $E = G = 9a^2(1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$; deci S e raportată la o rețea izotermă. $D = -D'' = 6a$, $D' = 0$; deci $K = -4/9a^2(1 + u^2 + v^2)^4$, $H = 0$. b) $u = C_1$, $v = C_2$ și sînt cubice plane (căci $1/\tau = 0$); se găsesc respectiv în planele $x + C_1 z - aC_1(3 + 2C_1^2) = 0$, $y - C_2 z - aC_2(3 + 2C_2^2) = 0$, ale căror înfășurătoare sînt cilindrii $27ax^2 = 2(z - 3a)^3$ și $27ay^2 + 2(z + 3a)^3 = 0$. c) $u + v = \text{const.}$; $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$; raportul dintre curbură și torsiune fiind constant, curbele sînt elice. *Obs.* c_1) Liniile asimptotice sînt loxodrome ale lui S față de liniile coordonate. Dacă $a = 1$, atunci $\theta = 45°$; loxodromele care fac 30° cu $u = \text{const.}$ sînt $v/\sqrt{3} \pm u = \text{const.}$ c_2) Notînd $u + v = 2\alpha$, $u - v = 2\beta$, găsim că liniile asimptotice

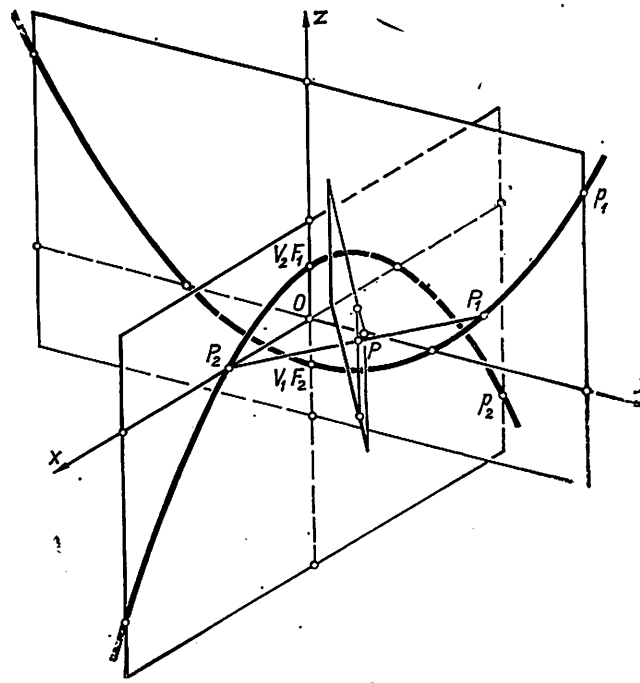


Fig. 58

sînt cubice. d) $R_{1,2} = \pm 3a(1 + u^2 + v^2)^2/2$. e) $\pi_i = \pi$ (plan mediator lui P_1P_2). Dacă $u = \text{const.}$ curba de întoarcere: $x = a[(u^4 + 6u^2 - 3)/2u + 3(u^2 - 1)v^2/u - 3v^4/2u]$, $y = -4av^3$, $z = -3a/(2v^2 + 1)$, $v = \text{const.}$ $x = -4au^3$, $y = a[(v^4 + 6v^2 - 3)/2v + 3(v^2 - 1)u^2/v] - 3u^4/2v$, $z = 3a(2u^2 + 1)$.

162 Se numește *suprafață Monge* suprafața născută de o curbă plană al cărei plan se rostogolește pe o suprafață desfășurabilă dată. Să se afle liniile de curbură ale unei suprafețe Monge.

163 Presupunînd că suprafața S e raportată la liniile de curbură, se cere: a) Să se arate că liniile de curbură care sînt curbe parametrice se conservă printr-o transformare de forma

$$u = u(u), \quad v = v(v). \tag{92}$$

b) Să se scrie ecuațiile fundamentale ale lui S. c) Să se calculeze a treia formă fundamentală a suprafeței S.

164 Să se demonstreze *teorema lui Joachimstahl*: dacă 2 suprafețe se intersectează după o curbă C, care e linie de curbură pentru amîndouă, unghiul celor 2 suprafețe de-a lungul lui C e constant. *Apl.* Să se găsească suprafețele ale căror linii de curbură, din una sau din ambele familii, sînt cercuri.

R. Fie $S_t : \bar{r} = \bar{r}_t(u, v)$ și $\theta = (\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2})$ în $P \in C$; deci $\cos\theta = \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2$. Diferențiind de-a lungul lui C, avem $-\sin\theta \dfrac{d\theta}{ds} = -(\bar{t}\cdot\bar{n}_2 + \bar{n}_1\cdot\bar{t})/\rho_n = 0$, dacă ținem seama de formulele lui O. Rodrigues: $d\bar{n}_t/ds = -\bar{t}/\rho_n$, unde s e arcul lui C iar $\bar{t} = d\bar{r}_t/ds$ e versorul tangentei (în P) la C. *Apl.* Pentru ca o curbă plană sau sferică să fie linie de curbură pentru S, e necesar și suficient ca S să taie planul sau sfera sub un unghi constant. În primul caz, normalele lui S în punctele cercului C se taie într-un punct I de pe perpendiculara în centrul Ω al lui C pe planul π al lui C, generînd un con de rotație. Rezultă că sfera cu centrul în I și trecînd prin C e tangentă lui S de-a lungul lui C; adică: *S e înfășurătoarea unei sfere depinzînd de un parametru și reciproc.* În al doilea caz, se obțin 2 familii cu un parametru de conuri de rotație (generatoarele fiind normale la S), ale căror vîrfuri descriu 2 curbe $C_i (i = 1, 2)$. Se știe (din geometria elementară) că C_i aparțin la 2 conice homofocale. După cum conicele sînt o elipsă și o hiperbolă sau ambele sînt parabole, suprafața e algebrică de grad 4 sau 3, numindu-se *ciclidele lui Dupin*; în particular, cînd sînt un cerc și o dreaptă normală pe planul cercului în centrul acestuia, găsim torul. Axele conurilor unei familii sînt tangente unei curbe situate pe conurile celeilalte familii; aceste 2 curbe constituie locul centrelor principale de curbură ale ciclidei lui Dupin. *Obs.* S e înfășurătoarea unei familii de sfere care sînt tangete la 3 sfere date. O astfel de suprafață e transformata prin inversiune a unui tor.

165 Să se determine suprafețele ale căror linii asimptotice și linii de curbură coincid.

R. Fie S raportată la liniile de curbură, deci $F = D' = 0$. Ecuația liniilor asimptotice: $Ddu^2 + D''dv^2 = 0$ admite soluțiile $u = C_1$ și $v = C_2$ numai dacă $D = D'' = 0$; deci S e un plan. *Obs.* Dacă S e raportată la liniile asimptotice, deci $D = D'' = 0$, din ecuația liniilor de curbură: $D'(Edu^2 - Gdv^2) = 0$ obținem $D' = 0$ (S e plan) sau $Edu^2 - Gdv^2 = 0$ care n-admite soluțiile $u = C_1$ și $v = C_2$ (dacă $E = G = 0$, liniile asimptotice $u = C_1$ și $v = C_1$ sînt liniile izotrope).

166 Se numește *suprafață izotermă* o suprafață ale cărei linii de curbură formează o rețea izotermă. Să se arate: a) în ce se transformă o astfel de suprafață printr-o inversiune; b) ecuația rețelei liniilor de curbură pe o asemenea suprafață are invarianții egali. *Apl.* a) Suprafețele de rotație sînt suprafețe izoterme. b) Fie suprafața izotermă $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ care satisface ecuația $\bar{r}_{uv} = (\ln m)_v \bar{r}_u + (\ln m)_u \bar{r}_v$; atunci suprafața $\Sigma : \bar{R} = \bar{R}(u, v)$ care satisface ecuația $\bar{R}_u = \bar{r}_u/m^2$, $\bar{R}_v = -\bar{r}_v/m^2$ cu $m = m(u, v)$ e de asemenea izotermă.

R. a) Într-o suprafață izotermă. b) Cum $F = D' = 0$, ecuația (69_9) devine $\bar{r}_{uv} = (\ln E)_v \bar{r}_u + (\ln G)_u \bar{r}_v$, reprezentînd *ecuația rețelei gaussiene constituită din liniile de curbură.* Dacă $E = G$, condiția (82^{IV}) e îndeplinită. Reciproc, această condiție cere $\left(\ln \dfrac{E}{G}\right)_{uv} = 0$, adică $E/G = U(u)V(v)$; prin (92) putem face $E = G$. *Obs.* Cele 5 coordonate pentasferice ale unui punct al unei suprafețe izoterme, considerate ca funcții de parametrii ρ_1, ρ_2 ai liniilor de curbură, sînt soluții ale unei ecuații Laplace cu invarianți egali; reciproca e adevărată, dacă cele 5 soluții particulare x_i ale unei astfel de ecuații satisfac relația $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Exemplu: *ciclidele izoterme* $x_i = \sqrt{(a_i - \alpha)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)/f(\alpha_i)}$, unde α e o const. iar $f(u) = (u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_5)$. *Apl.* a) Fie S de ecuații (6) sau (6'); $u = C_1$ și $v = C_2$ sînt linii de curbură și se conservă prin (60 b), prin care metrica (60 a) se reduce la forma izotermă. b) Relațiile ce definesc pe Σ sînt compatibile; căci $\bar{R}_{uv} = \left(\ln \dfrac{1}{m}\right)_v \bar{R}_u + \left(\ln \dfrac{1}{m}\right)_u \bar{R}_v$.

167 Într-un punct (ordinar) P al unei suprafețe S, *două tangente* se numesc *conjugate* dacă dreapta de intersecție a planelor tangente în P și într-un punct (apropiat) P' de pe o tangentă coincide cu cealaltă tangentă, cînd P' tinde către P. Să se arate: a) Condiția de conjugare a două direcții tangente $d\bar{r}$ și $\delta\bar{r}$ (în P la S) e

(93) $\delta\bar{r}\cdot d\bar{n} = 0$, adică $D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + \delta u\,dv) + D''\,dv\,\delta v = 0$.

b) Generatoarele suprafeței desfășurabile Σ circumscrise lui S de-a lungul unei curbe C sînt conjugate cu tangentele lui C. c) În orice punct P la S, există 2 tangente autoconjugate și 2 tangente conjugate (reale) ortogonale. d) În orice P la S, suma razelor de curbură pentru o pereche arbitrară de direcții conjugate e aceeași. *Apl.* Să se determine, în $P(a, a, a) \in (31')$, direcția conjugată lui $\bar{i}_1(1, -2, 1)$.

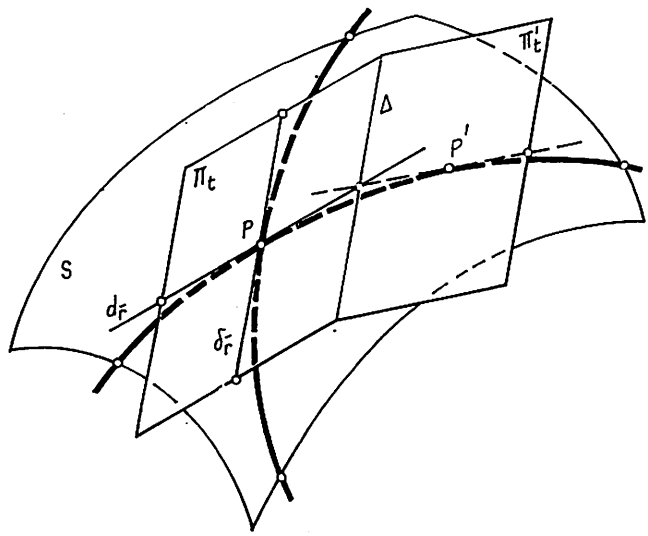


Fig. 59

R. a) Fie S de ecuație (13) și $\bar{r}' = \overline{OP'} = \bar{r} + \lambda d\bar{r}$, $\bar{n}' = \bar{n} + \lambda(d\bar{n} + \bar{\varepsilon})$ cu $\bar{\varepsilon} \to 0$ cînd $\lambda \to 0$ (fig. 59); deci π_t (în P la S): $(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{n} = 0$ și π_t' (în P' la S): $(\bar{R} - \bar{r}') \cdot \bar{n}' = 0$. Atunci $\Delta = \pi_t \cap \pi_t'$: $\pi_t = 0$, $\frac{1}{\lambda}(\pi_t' - \pi_t) = 0$ cînd $\lambda \to 0$, adică Δ: $(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{n} = 0$, $(\bar{R} - \bar{r}) \cdot d\bar{n} = 0$; însă $\Delta \,||\, \delta\bar{r}$ dacă avem condiția (93). *Obs.* Pentru (32):

$$r\,dx\,\delta x + s(dx\,\delta y + \delta x\,dy) + t\,dy\,\delta y = 0. \tag{93'}$$

b) Cînd P descrie pe C, π_t înfășoară pe Σ. Generatoarea g a lui Σ e dreapta caracteristică a lui π_t; deci g: $(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{n} = 0$, $(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \frac{d\bar{n}}{ds} = 0$ și trece prin P, adică g e tangentă în P la S. c) Condiția (93) are un caracter involutiv, adică tangentele în P la S (în π_t în P la S) formează un fascicul, tangentele corespondente în involuție fiind conjugate. Tangentele unite (duble) în involuția (93) sînt date de $dv/du = \delta v/\delta u$, încît *tangentele autoconjugate* sînt *tangentele asimptotice*. *Tangentele ortogonale* în involuția (93) sînt *tangentele principale*: se obțin eliminînd pe δu, δv din condiția de ortogonalitate și condiția (93). d) Cu $D = D'' = 0$, condiția (93) devine $du\,\delta v + \delta u\,dv = 0$, încît $\rho_n + \rho_n' = 2F/D'$ e independentă de dv/du. *Apl.* π_t: $x + y + z - 3a = 0$ și $\bar{n}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ iar $\bar{i}_1 \cdot \bar{n} = 0$. Fie $P(u = v = a) \in S$ iar $\bar{i}_1$ ($du = 1$, $dv = -2$). Condiția (93) devine $2v^2\,du\,\delta u + uv(du\,\delta v + \delta u\,dv) + 2u^2\,dv\,\delta v = 0$; deci $\bar{i}_2(\delta u = 1, \delta v = 0)$. Din $\bar{i}_2 \cdot \bar{n} = 0$, deducem $\bar{i}_2(1, 0, -1)$.

168 Două familii de curbe, de pe o suprafață S, formează o *rețea conjugată* (sin.: *sistem conjugat*) dacă prin fiecare punct P al lui S trece o singură curbă din fiecare familie astfel că tangentele (în P) la cele 2 curbe sînt conjugate. Se cere: a) Să se arate că 2 familii de curbe formează o rețea conjugată pe S dacă tangentele la curbele dintr-o familie, de-a lungul oricăreia

dintre curbele celeilalte familii, descriu o suprafață desfășurabilă Σ. b) Dîndu-se o familie de curbe pe S, să se afle familia de curbe astfel ca cele 2 familii să formeze o rețea conjugată pe S. c) Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca rețeaua de curbe coordonate să fie conjugată. *Apl.* a) Să se găsească familia de curbe conjugate curbelor obținute prin secțiunea paraboloidului (23) cu planele $x + y = C_1$. b) Să se raporteze $S: x = v(2u + v), y = 3u + v, z = v/u\,(u + v)$ la curbele $u = \text{const.}$ și la curbele conjugate acestora. c) Să se afle liniile conjugate liniilor lui $S: z = a^2/x^2 - b^2/y^2$ care se proiectează pe Oxy după hiperbolele $a/x + b/y = C$.

R. a) Căci tangentele la curbele unei familii sînt caracteristicele planelor tangente lui S de-a lungul uneia din curbele celeilalte familii, descriind pe Σ. b) Fie familia $\Phi(u, v) = C_1$, deci $\Phi_u\,du + \Phi_v\,dv = 0$; atunci (93) devine $(D\Phi_v - D'\Phi_u)\,\delta u + (D'\Phi_v - D''\Phi_u)\,\delta v = 0$, adică familia $\Psi(u,v) = C_2$. c) $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ sînt conjugate dacă, și numai dacă, avem $D' = 0$. Cum $D' = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vu})/\sqrt{\Delta}$, rezultă: *pentru ca S să fie raportată la o rețea conjugată, e necesar și suficient ca $\bar{r}(u, v)$ să satisfacă o ecuație Laplace*

(94) $$\bar{r}_{uv} = a\,\bar{r}_u + b\,\bar{r}_v.$$

Apl. a) Cu $u = x$, $y = v$, avem $\bar{l}_1: du + dv = 0$. Din (93), deducem $\bar{l}_2: \delta u/A - \delta v/B = 0$; deci $x/A - y/B = C_2$. b) Ecuația (93): $\delta u + \delta v = 0$; prin $U = u$, $V = u + v$, obținem $S: x = -U^3 + V^2$, $y = 2U - V$, $z = 1/U - 1/V$. c) Familia dată e autoconjugată.

169 Fiind dată o suprafață S, să se determine condiția ca: a) liniile ortogonale curbelor coordonate să fie conjugate; b) liniile conjugate curbelor coordonate să fie ortogonale.

170 Să se demonstreze că o condiție necesară și suficientă ca o suprafață S să fie suprafață minima e ca liniile izotrope să fie conjugate.

R. S e raportată la o rețea izotermă: $E = G$, $F = 0$ iar $H = (D + D'')/2E$. Liniile izotrope (pe S): $du^2 + dv^2 = 0$ sînt conjugate dacă $D + D'' = 0$, adică $H = 0$. Reciproc, dacă $H = 0$ $(D + D'' = 0)$, dv/du, $\delta v/\delta u$ sînt conjugate cînd $1 - \dfrac{dv}{du}\dfrac{\delta v}{\delta u} = 0$, $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{\delta v}{\delta u} = 0$ sau încă $du^2 + dv^2 = 0$ (direcțiile sînt izotrope).

171 Să se găsească condiția ca pe suprafața $S: x = Au^a v^\alpha$, $y = Bu^b v^\beta$, $z = Cu^c v^\gamma$ curbele coordonate să constituie o rețea conjugată de curbe Țițeica.

172 Se numește *suprafață de translație* o suprafață S cu proprietatea că, raportată fiind la o rețea conjugată, liniile coordonate dintr-o familie se obțin prin translații dintr-o curbă a acelei familii. Se cere: a) Să se afle ecuația unei astfel de suprafețe. b) Fiind dată

(95) $$S: z = f(x) + g(y),$$

să se determine funcțiile $f(x)$ și $g(y)$ astfel încît: b_1) suprafața să fie minimă și să se găsească liniile ei asimptotice; b_2) razele de curbură principale să fie legate de relația $(R_1 + R_2)\cos\gamma = c$ și să se calculeze liniile ei de curbură cînd $(R_1 - R_2)\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = \text{const.}$, cu α, β, γ unghiurile normalei la S cu axele de coordonate.

R. a) De-a lungul curbei $u = \text{const.}$: $\int_{v_0}^{v} \sqrt{G}\,dv = 0$; deci $\int_{v_0}^{v} G_u\,dv/2\sqrt{G} = 0$, adică $G_u = 0$. Analog, de-a lungul lui $v = \text{const.}$, obținem $E_v = 0$. Rezultă $\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Cum $D' = 0$, din (69) deducem că S e definită de

(95′) $$\bar{r}_{uv} = 0, \text{ adică } \bar{r} = \bar{a}(u) + \bar{b}(v).$$

Fie C_0 și C două curbe $v = \text{const.}$ (corespunzătoare valorilor v_0 și v); o curbă $u = \text{const.}$ le taie în $P_0(u, v_0)$ și $P(u, v)$ astfel încît $\overrightarrow{P_0P} = \bar{r}(u, v) - \bar{r}(u, v_0) = \bar{b}(v) - \bar{b}(v_0) = \text{const.}$, adică C se obține printr-o translație din C_0. La fel pentru $u = \text{const.}$ b$_1$) $H = 0$: $f''/(1 + f'^2) = -g''/(1 + g'^2) = k$ (const.); deci $f(x) = -\frac{1}{k} \ln\cos(kx + k_1) + a$, $g(y) = \frac{1}{k} \ln\cos(ky + k_2) + b$. Cu $a + b = k_3/k$ și $X = kx + k_1$, $Y = -ky + k_2$, $Z = -kz + k_3$, obținem *suprafața lui Scherk*

$$z = \ln \frac{\cos x}{\cos y} \quad \text{sau} \quad e^z = \frac{\cos x}{\cos y}. \tag{95''}$$

Secțiunea cu Oyz e o curbă Sumner. Liniile asimptotice: $\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4) \cdot \operatorname{tg}(\pm y/2 + \pi/4) = \text{const.}$ *Obs.* Cînd $k = 0$, S e un plan. b$_2$) Deoarece $\overline{N}(p, q, -1)$ pentru S de ecuație (32), condiția impusă devine $(1 + f'^2)/f'' + (1 + g'^2)/g'' = c$; ceea ce are loc numai dacă $f''/(1 + f'^2) = a$, $g''/(1 + g'^2) = b$ iar $1/a + 1/b = c$. Deci S: $z = -\frac{1}{a} \ln\cos(ax + A) - \frac{1}{b} \ln\cos(by - B)$. Cum $\cos\gamma = 1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, cu $\operatorname{tg}\alpha = p/\sqrt{1 + q^2}$, $\operatorname{cotg}\beta = q/\sqrt{1 + p^2}$, condiția se scrie $(1/a - 1/b)^2 = (k^2 - 4/ab) \sin^2(ax + A) \cdot \sin^2(by + B)$ și e identic verificată (în x, y) dacă $a = b$, $k = 2/a$. Translatînd originea și schimbînd sensul pe Oz, obținem suprafața

$$az = \ln\cos ax + \ln\cos ay. \tag{95'''}$$

Liniile de curbură: $\operatorname{tg}(ax/2 + \pi/4) = C \operatorname{tg}(ay/2 \pm \pi/4)$.

173 Fiind dată o suprafață S, se numește *suprafață paralelă cu* S locul geometric S^* descris de un punct P^* al normalei în P la S astfel încît $PP^* = \text{const.}$, cînd P descrie pe S. Se cere: a) Să se găsească ecuația vectorială a lui S^* și să se determine formele ei fundamentale. b) Să se arate că, dacă normalele lui S sînt totodată normalele altei suprafețe S^*, cele 2 suprafețe sînt paralele. c) Să se demonstreze că, dacă P descrie o linie de curbură pe S, corespondentul său P^* descrie de asemenea o linie de curbură pe S^*. d) Să se exprime curburile K^*, H^* ale lui S^* cu ajutorul curburilor K, H ale lui S.

R. a) Fie S de ecuație (13); dacă $PP^* = l(l - \text{const.})$, atunci

$$\bar{r}^* = \bar{r} + l\bar{n}. \tag{96}$$

Obs. Avem $d\bar{r}^* = d\bar{r} + l\,d\bar{n}$; de unde $\bar{n} \cdot d\bar{r}^* = 0$, adică: *normalele lui S sînt normale și pentru S**. Cu (89), rezultă $ds^{*2} = (1 - l^2K)\,ds^2 - 2l(1 - lH)\Phi$, $\Phi^* = lK\,ds^2 + (1 - 2lH)\Phi$. b) Fie S^*: $\bar{r}^* = \bar{r} + \lambda\bar{n}$; deci $d\bar{r}^* = d\bar{r} + \lambda\,d\bar{n} + \bar{n}\,d\lambda$ iar $\bar{n} \cdot d\bar{r}^* = d\lambda = 0$, adică $\lambda = \text{const.}$ c) În condiția impusă, normala în P la S generează o suprafață desfășurabilă; deci, normala în P^* la S^* generînd o suprafață desfășurabilă, P^* descrie o linie de curbură pe S^*. În 2 puncte corespondente pe 2 linii de curbură corespondente, avem (v. formula lui O. Rodrigues): $d\bar{r} + \rho\,d\bar{n} = 0$, $d\bar{r}^* + \rho^*d\bar{n}^* = 0$; de unde $\rho^* = \rho - l$. d) Cunoscînd pe ds^{*2} și Φ^*, obținem $K^* = K/(1 - 2lH + l^2K)$, $H^* = (H - lK)/(1 - 2lH + l^2K)$. *Consecințe.* d$_1$) Dacă S e desfășurabilă, și S^* e desfășurabilă. d$_2$) Dacă $K = 1/l^2$, atunci $H^* = -1/2l$, iar dacă $H = 1/2l$, atunci $K^* = 1/l^2$. d$_3$) $(H^{*2}/K^* - 1)/K^* = (H^2/K - 1)/K$. d$_4$) $R_1^* - R_2^*$ e invariant și $R_1 - R_2 = 4(H^2/K - 1)\,K$.

174 Se numește *evoluta* (sin.: *desfășurata*, *suprafața centrelor*) unei suprafețe S suprafața înfășurătoare a normalelor lui S. Să se arate: a) Numind *normalie* suprafața generată de normalele lui S de-a lungul unei curbe C a acesteia, toate normaliile corespunzătoare curbelor lui S trecînd printr-un punct P al lui S sînt tangente în centrele (principale) de curbură Ω_1 și Ω_2 ale lui S, situate pe normala în P la S (*teorema lui Mannheim*). b) Planele tangente la evoluta Σ a lui S, care sînt duse prin aceeași normală (în P la S), sînt rectangulare. c) Fiind dată o congruență de drepte pentru care planele focale ale generatoarelor sînt perpendiculare, există o infinitate de suprafețe, paralele, ale căror normale sînt dreptele congruenței date.

Apl. a) Să se studieze cazul cînd una sau amîndouă din pînzele evolutei se reduc la un punct sau la o curbă. b) Evoluta unui elicoid. c) Să se determine suprafeţele pentru care liniile asimptotice se corespund cu cele de pe una sau de pe amîndouă pînze ale evolutei sale.

R. a) Normalia corespunzătoare lui C conţine normala $\bar{n}$ în P la S. Conform teoremei lui Monge, normalia corespunzătoare liniei de curbură C_i (trecînd prin P; $i = 1, 2$) e o suprafaţă desfăşurabilă S_i, avînd muchia de întoarcere Γ_i; însă $S_1 \cap S_2 = \bar{n}$ iar $\bar{n} \cap \Gamma_i = \Omega_i$ (fig. 60). *Obs.* a_1) Cînd P descrie pe S, Ω_i descrie pînza Σ_i:

(97) $$\bar{r}_i = \bar{r} + \rho_i \bar{n} \quad (i = 1, 2);$$

evoluta $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ *e suprafaţa centrelor lui* S. a_2) Σ_i e generată şi de Γ_i, cînd C_i descrie familia căreia-i aparţine; deci: *evoluta lui* S *e evoluta oricărei suprafeţe paralele cu* S. Atunci, S numindu-se *evolventa* (sin.: *desfăşuranta*) lui Σ, orice suprafaţă paralelă cu S e o evolventă a lui Σ; rezultă: *o suprafaţă dată are o* ∞^1 *de evolvente*. a_3) *Normalele lui* S constituie o *congruenţă de normale*, a cărei suprafaţă focală e evoluta Σ a lui S (descrisă de focarele Ω_i). Congruenţa se numeşte *congruenţă Guichard* dacă S_i taie pe Σ_i după liniile de curbură; atunci acea pînză se numeşte *suprafaţă Guichard*. Se numesc *congruenţe pseudosferice* congruenţele de-a lungul cărora distanţa între focare, precum şi unghiul planelor focale sînt constante; pentru astfel de congruenţe e satisfăcută ecuaţia Liouville: $\ln \sqrt{EG}_{uv} = k \sqrt{EG}$ (k—const.), avînd soluţia generală $k \sqrt{EG} = 2U'V'/(U + V)^2$ unde $U = U(u)$ şi $V = V(v)$, iar suprafeţele focale sînt suprafeţe pseudosferice. Congruenţa se numeşte *congruenţă W* dacă liniile asimptotice pe cele 2 pînze focale se corespund. Astfel congruenţa de normale asociată unei suprafeţe W e o congruenţă W şi reciproc; căci (v. probl. 207), din $D_1/D_2 = D_1''/D_2''$ şi $D_1' = D_2' = 0$ rezultă $D(R_1, R_2)/D(u, v) = 0$. b) Planul tangent π_i în Ω_i la Σ_i conţine normala $\bar{n}$ (în P la S) şi tangenta (principală) $\bar{l}_i$ (în P la C_i); deci $\pi_1 \perp \pi_2$. *Obs.* π_i sînt planele focale ale normalei n, fiind tangente lui S_i în lungul lui $\bar{n}$. b_2) S_i e circumscrisă lui Σ în lungul curbei Γ_j' (prin Ω_j) de pe Σ_j ($j \neq i$); deci: *tangentele în* Ω_i *la* Γ_i *şi* Γ_i' *sînt conjugate*. c) Fie (II, 88); notăm $u = \alpha$ şi $v = \beta$. Desfăşurabilele congruenţei sînt date de ecuaţia (II, 88''), tăind suprafaţa directoare Σ: $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ după 2 familii de curbe C şi C' (prin ipoteză, reale distincte şi ortogonale); luîndu-le drept curbe coordonate pe Σ:

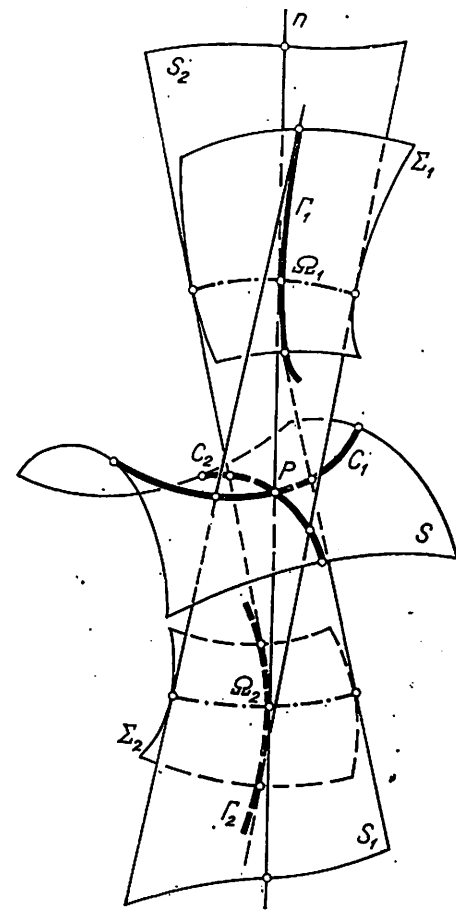


Fig. 60

(98) $$(\bar{r}_u\ \bar{a}_u\ \bar{a}) = 0, \quad (\bar{r}_v\ \bar{a}_v\ \bar{a}) = 0.$$

Fie planele focale π_i ale congruenţei n (prin Ω la Σ); (98) exprimă că $\bar{a}_u \in \pi_1$ şi $\bar{a}_v \in \pi_2$. Cum $\bar{a}^2 = 1$ ($\bar{a}_u \perp \bar{a}$ şi $\bar{a}_v \perp \bar{a}$): $\theta = (\widehat{\bar{a}_u, \bar{a}_v}) = (\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \dfrac{\pi}{2}$ şi

(98') $$\bar{a}_u \cdot \bar{r}_v = 0, \quad \bar{a}_v \cdot \bar{r}_u = 0.$$

În condiţia (98'), putem determina o funcţie $t(u, v)$ astfel încît

(98'') $$\bar{a} \cdot d\bar{R} = 0,$$

adică *generatoarea n (prin Ω la Σ) să fie normala în P la S.* Căci, din (II, 88), avem $\bar{a}\cdot(d\bar{r} + \bar{a}dt + t\,d\bar{a}) = \bar{a}\cdot d\bar{r} + dt = 0$, adică $t = -\int \bar{a}\cdot d\bar{r} + C$; căci $\bar{a}\cdot d\bar{r} = \bar{a}\cdot\bar{r}_u\,du + \bar{a}\cdot\bar{r}_v\,dv$ e o diferențială totală exactă. Deci suprafețele

$$S: \bar{R} = \bar{r} + \left(-\int \bar{a}\cdot d\bar{r} + C\right)\cdot\bar{a}, \tag{98'''}$$

ortogonale congruenței (II, 88), sînt evolventele suprafeței focale a congruenței date. *Obs.* Condiția necesară și suficientă ca congruența (II, 88) să fie o congruență de normale e $\bar{a}_v\cdot\bar{r}_u = \bar{a}_u\cdot\bar{r}_v$; căci putem găsi un punct $P(t) \in$ (II, 88) astfel ca să avem (98'''). Se arată că avem chiar (98'). *Apl.* a) Pentru o sferă, ambele pînze ale evolutei se reduc la centrul sferei. Dacă Σ_1 e o curbă, atunci una din cele 2 familii de linii de curbură e formată din cercuri; deci S e înfășurătoarea unei familii de sfere cu un parametru ale căror centre descriu pe Σ_1 (v. probl. 164). Căci, fie $\Sigma_1: \bar{r} = \bar{r}_1(u)$ cu $\bar{r}_{1u}^2 = 1$; atunci $S: \bar{r} = \bar{r}_1 + t\bar{n}$ cu $\bar{n}$ în P la S. Din $\bar{r}_u\cdot\bar{n} = \bar{r}_v\cdot\bar{n} = 0$, obținem $t_u = \cos\theta$, $t_v = 0$, unde $\theta = (\widehat{\bar{n}, \bar{r}_{1u}})$. Condiția de compatibilitate $(\cos\theta)_v = 0$ exprimă că $\bar{n}$ (care trece printr-un punct al lui Σ_1) descrie un con de rotație; deci o familie de linii de curbură pe S e formată din cercuri. *Obs.* Pentru o suprafață de rotație S, Σ_1 se reduce la axa de rotație, iar Σ_2 e o suprafață de rotație a cărei meridiană e evoluta meridianei lui S. Dacă Σ_i sînt curbe, S e ciclida lui Dupin. b) Σ_i sînt 2 elicoizi cu aceeași axă și același parametru ca și cel dat. c) Fie, pentru S, $F = D' = 0$. Condiția $D/D_1 = D''/D_1''$ se transformă în $R_1R_2 = f(u)$. În al doilea caz, S e cu curbură totală constantă.

175 Se numește *suprafață L* suprafața ale cărei centre principale de curbură sînt situate pe 2 cuadrice confocale (*Liouville*). Dacă aceste cuadrice aparțin familiei

$$x^2/(a-\lambda) + y^2/(b-\lambda) + z^2/(c-\lambda) - 1 = 0 \tag{99}$$

iar ρ_0, ρ_1, $\rho_2 (\rho_2 < c < \rho_1 < b < \rho_0 < a)$ sînt coordonatele eliptice corespunzătoare familiei, ce reprezintă — în aceste coordonate — ecuația

$$\Omega = \sum_{i=0}^{2} \int \sqrt{(\rho_i - \alpha)(\rho_i - \beta)/f(\rho_i)}\, d\rho_i, \quad f(u) = 4(a-u)(b-u)(c-u), \tag{99'}$$

α, β-constant.

11. FORMA SUPRAFEȚEI ÎN VECINĂTATEA UNUI PUNCT ORDINAR

176 Să se găsească, într-o vecinătate a originii, forma suprafeței S: a) $x^3 - 2x^2 - y^2 - z = 0$; b) $z = ax\sin y$; c) $x^4 + 3x^2y + 2y^2 + z = 0$; d) $z = \ln\frac{\cos x}{\cos y}$; e) $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 - z = 0$.

R. În vecinătatea originii, ecuația lui S se scrie

$$z = \frac{1}{2}(x^2/R_1 + y^2/R_2) + (3), \tag{100}$$

S fiind aproximată de *paraboloidul de curbură* de ecuație

$$z = \frac{1}{2}(x^2/R_1 + y^2/R_2). \tag{101}$$

a) $z = \frac{1}{2}(-4x^2 - 2y^2) + (3)$; deci $R_1 = -1/4$, $R_2 = -1/2$ iar $K = 8 > 0$, încît O e un punct eliptic (fig. 61). b) $z = ax(y - y^3/3 + \ldots) = \frac{1}{2}(aX^2 - aY^2) + (3)$ și $K = -a$, $H = 0$, încît O e un punct hiperbolic (fig. 62). c) $R_1 = 0$, $R_2 = -1/4$, deci $K = 0$, O fiind un punct parabolic (fig. 63). d) $z = \ln[1 - (x^2/2! - x^4/4! + \ldots)] - \ln[1 - (y^2/2! - y^4/4! + \ldots)] = -(x^2/2! - x^4/4! + \ldots) + (y^2/2! - y^4/4! + \ldots)$; deci $R_1 = -R_2 = -1$, adică $H = 0$, $K = -1$, O fiind punct hiperbolic (fig. 64). e) $R_1 = -1/32$, $R_2 = 1/50$; deci O e un punct hiperbolic (fig. 65).

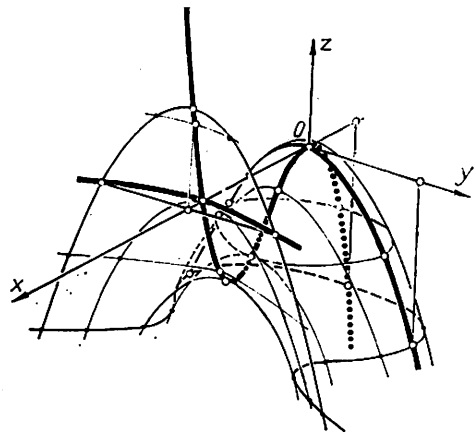


Fig. 61

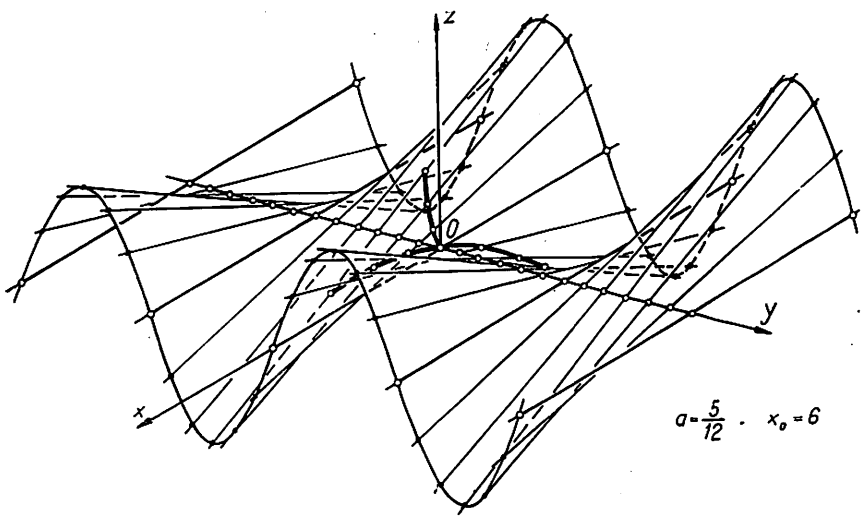


Fig 62

177 Raportînd suprafața S de ecuația (32) la liniile asimptotice care trec prin punctul său hiperbolic P, într-o vecinătate a lui P, S are ecuația

(100′) $$z = xy/R_1 + (3) \text{ iar } H_P = 0,\ K_P = -1/R_1^2.$$

. *R.* Raportînd pe S la P și planul tangent în P la S, atunci

(100″) $$z = \frac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + (3) \text{ iar } K_0 = r_0t_0 - s_0^2,\ H_0 = (r_0 + t_0)/2.$$

Liniile asimptotice: $r_0dx^2 + 2s_0dx\,dy + t_0dy^2 = 0$ coincid cu Ox și Oy dacă $r_0 = t_0 = 0$ (reper oblic). Însă $H_0 = 0$ și $K_0 = -s_0^2$; deci $R_1 = -R_2 = 1/s_0$. *Obs.* Liniile de curbură: $dx^2 - dy^2 = 0$ sînt bisectoarele liniilor asimptotice.

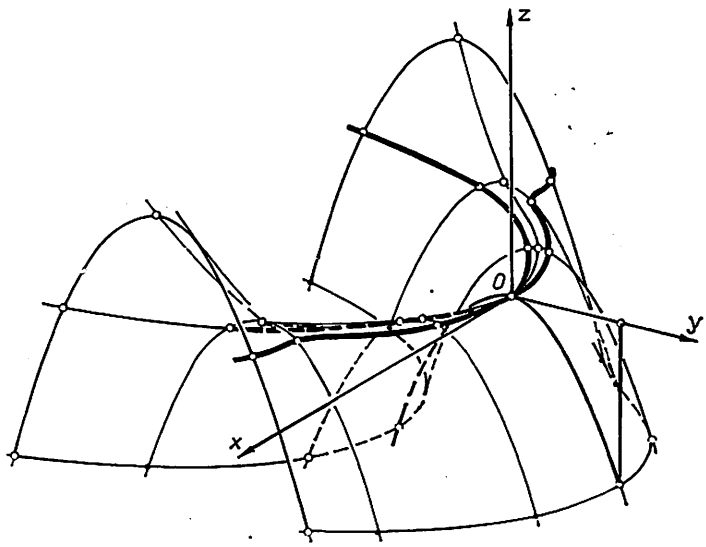


Fig. 63

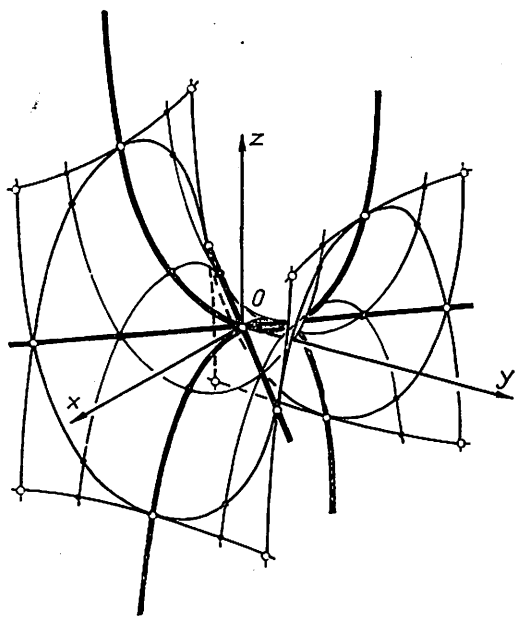


Fig. 64

178 Raportînd suprafața S de ecuație (32) la liniile de curbură care trec prin punctul ordinar P al lui S, suprafața S are ecuația

(100‴)
$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{R_1}\right)_x x^3 + 3\left(\frac{1}{R_1}\right)_y x^2y + 3\left(\frac{1}{R_2}\right)_x xy^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{R_2}\right)_y y^3 + (4),$$

coeficienții fiind calculați în P.

R. Pentru S de ecuație (100″), liniile de curbură: $s_0dx^2(r_0 - t_0)dx\,dy - s_0dy^2 = 0$ fac cu Ox unghiul θ cu $\operatorname{tg} 2\theta = 2s_0/(r_0 - t_0)$; deci, printr-o rotație de unghi θ (în Oxy), ecuația lor devine $dx\,dy = 0$ (Ox și Oy). *Obs.* Liniile asimptotice: $r_0dx^2 + t_0dy^2 = 0$ fac cu direcțiile principale unghiul ω cu $\operatorname{tg}^2\omega = -R_2/R_1$.

Însă (3) $= \frac{1}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^2) + (4)$; cum $r = r_0 + ax + by + \ldots$, $s = bx + cy + \ldots$, $t = t_0 + cx + dy + \ldots$, $r_x = a + \ldots$, $r_y = s_x = b + \ldots$, $s_y = t_x = c + \ldots$, $t_y = d + \ldots$ iar $r_0 = 1/R_1$, $s_0 = 0$, $t_0 = 1/R_2$, deducem $a = \left(\frac{1}{R_1}\right)_x$, $b = \left(\frac{1}{R_1}\right)_y$, $c = \left(\frac{1}{R_2}\right)_x$, $d = \left(\frac{1}{R_2}\right)_y$.

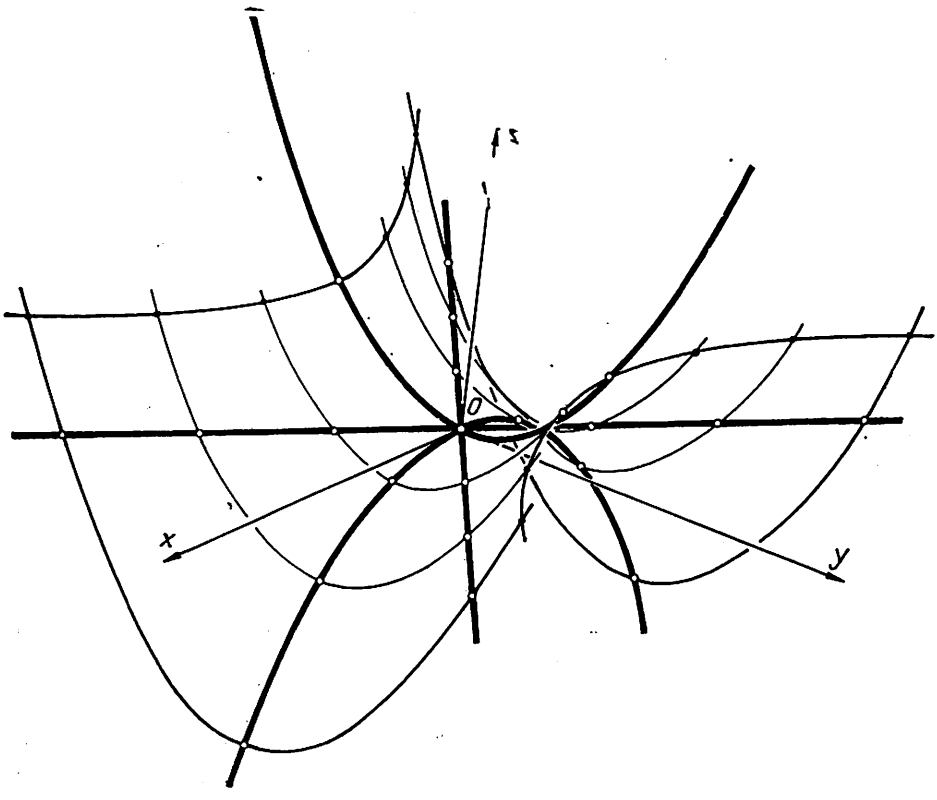


Fig. 65

179 Fie punctul (ordinar) P al unei suprafețe S; luînd pe tangenta în P la S un punct M astfel încît $PM = \sqrt{|R_n|}$, unde R_n e raza de curbură a secțiunii normale C_n în P prin tangenta considerată, se cere: a) Să se găsească *indicatoarea lui Dupin* (în P la S), adică locul descris de M cînd tangenta variază. b) Să se afle condiția ca 2 diametri ai indicatoarei să fie conjugați. *Apl.* Să se indice genul indicatoarei Dupin în diferite puncte ale lui $S: x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1/u + 1/v + 2uv$.

R. a) Fie $\bar{i}_1 = \bar{r}_u/\sqrt{E}$, $\bar{i}_2 = \bar{r}_v/\sqrt{G}$ și $\bar{i} = d\bar{r}/ds = (\sqrt{E}\ du/ds)\bar{i}_1 + (\sqrt{G}\ dv/ds)\bar{i}_2$; în general, $\bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2 \neq 0$ (fig. 66). Notînd $\xi = \sqrt{E\,|R_n|}\,\frac{du}{ds}$, $\eta = \sqrt{G\,|R_n|}\,\frac{dv}{ds}$, atunci $\overline{PM} = \sqrt{|R_n|}\,\bar{i} = \xi\bar{i}_1 + \eta\bar{i}_2$. Locul descris de M se obține eliminînd pe $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ din ξ, η și $1/R_n$; deducem că *indicatoarea lui Dupin e conica*

(102) $$D\xi^2/E + 2D'\xi\eta/\sqrt{EG} + D''\eta^2/G = \varepsilon \quad (\varepsilon = \text{sign}\ R_n = \pm 1).$$

Conica e de gen eliptic, hiperbolic sau parabolic, după cum $DD'' - D'^2 \gtrless 0$. Cînd liniile coordonate sînt linii de curbură ($F = D' = 0$), obținem

(102') $\qquad \xi^2/R_1 + \eta^2/R_2 = \varepsilon \quad (1/R_1 = D/E,\ 1/R_2 = D''/G).$

b) Două direcții m, m' sînt conjugate în raport cu conica (102), dacă $D/E + D'(m + m')/EG + D''mm'/G = 0$. Fie direcțiile $m = \eta/\xi = \sqrt{G/E}\ \dfrac{dv}{du}$ și $m' = \eta'/\xi' = \sqrt{G/E}\ \dfrac{\delta v}{\delta u}$; atunci obți-

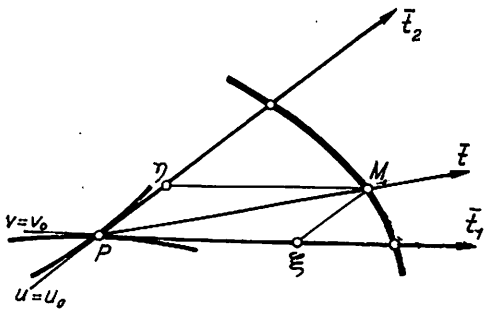


Fig. 66

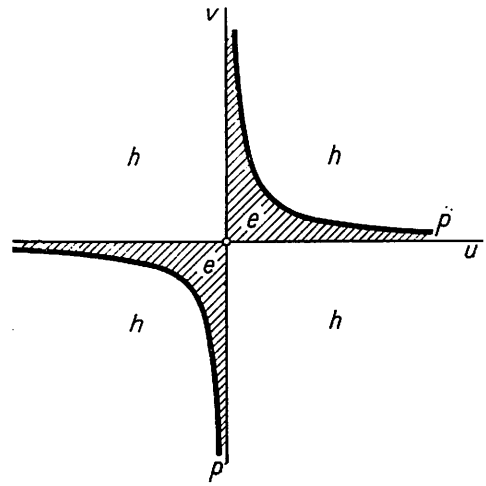


Fig. 67

nem condiția (93). *Obs.* În P la S, direcțiile principale sînt axele conicei (102), iar direcțiile asimptotice sînt asimptotele conicei. *Apl.* $\triangle^2(DD'' - D'^2) = 16\,(1 - u^3v^3)/u^3v^3$; deci genul conicei Dupin e semnul lui $uv(uv - 1)$. Pentru discuție, fie în planul Ωuv (fig. 67), dreptele $u = 0$, $v = 0$ și hiperbola $uv = 1$; deci P e punct eliptic, hiperbolic sau parabolic cînd se găsește în partea haşurată, în cea nehaşurată sau pe hiperbolă (dreptele nu aparțin domeniului de existență).

180 Printr-un punct (ordinar) P al unei suprafețe S se duc n drepte tangente care fac între ele unghiuri egale cu π/n. Curbura medie (în P la S) e medie armonică a curburilor normale care corespund curbelor direcției.

R. Notînd cu a, b razele de curbură principale (în P la S) și folosind formula lui Euler, obținem $1/\rho_1 = \cos^2\theta/a + \sin^2\theta/b = (1/a + 1/b)/2 + 2(1/a - 1/b)\cos 2\theta$, $1/\rho^2 = (1/a + 1/b)/2 + 2(1/a - 1/b)\cos 2(\theta + \pi/n), \ldots, 1/\rho_n = (1/a + 1/b)/2 + 2(1/a - 1/b)\cos 2(\theta + 2(n-1)\pi/n)$. Însă $\cos\alpha + \cos(\alpha + 2\pi/n) + \ldots + \cos(\alpha + 2(n-1)\pi/n) = 0$ (proiecția pe un diametru a sumei vectorilor ce unesc centrul cu vîrfurile unui poligon regulat); deci $\sum_{i=1}^{n} 1/\rho_i = n(1/a + 1/b)/2 = nH_P$. *Obs.* Pentru 2 secțiuni normale perpendiculare (θ și $\theta + \pi/2$): $1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1/a + 1/b = 2H_P$; atunci $1/\rho_2 = \sin^2\theta/a + \cos^2\theta/b$.

12. ALTE PROPRIETĂȚI INTRINSECE ALE UNEI SUPRAFEȚE

181 Să se arate că curbura geodezică (a unei curbe C de pe o suprafață S într-un punct $P \in C$) aparține geometriei intrinsece a lui S.

R. Fie $C: u = u(s)$, $v = v(s)$. Se ține seama că $d\bar{r}/ds = \bar{r}_u u' + \bar{r}_v v'$, $d^2\bar{r}/ds^2 = \bar{r}_{uu} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} u'v' + \bar{r}_{vv} v'^2 + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_v v''$ ($u' = du/ds$, $u'' = d^2u/ds^2, \ldots$) și de distributivitatea produsului mixt față de adunare, în formula

(103) $\qquad 1/\rho_g = \pm\left(\dfrac{d\bar{r}}{ds}\,\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}\,\bar{n}\right)$ ($\bar{n}$-versorul normală în P la S).

Introducînd simbolurile lui Christoffel de speța a doua, obținem

$$(103')\quad \frac{1}{\rho_g} = \pm\sqrt{\Delta}\left[\left|\begin{matrix}2\\1\,1\end{matrix}\right| u'^3 + \left(2\left|\begin{matrix}2\\1\,2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}1\\1\,1\end{matrix}\right|\right)u'^2 v - \left(2\left|\begin{matrix}1\\1\,2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}2\\2\,2\end{matrix}\right|\right)u'v'^2 - \left|\begin{matrix}1\\2\,2\end{matrix}\right| v'^3 + u'v'' - u''v'\right]$$

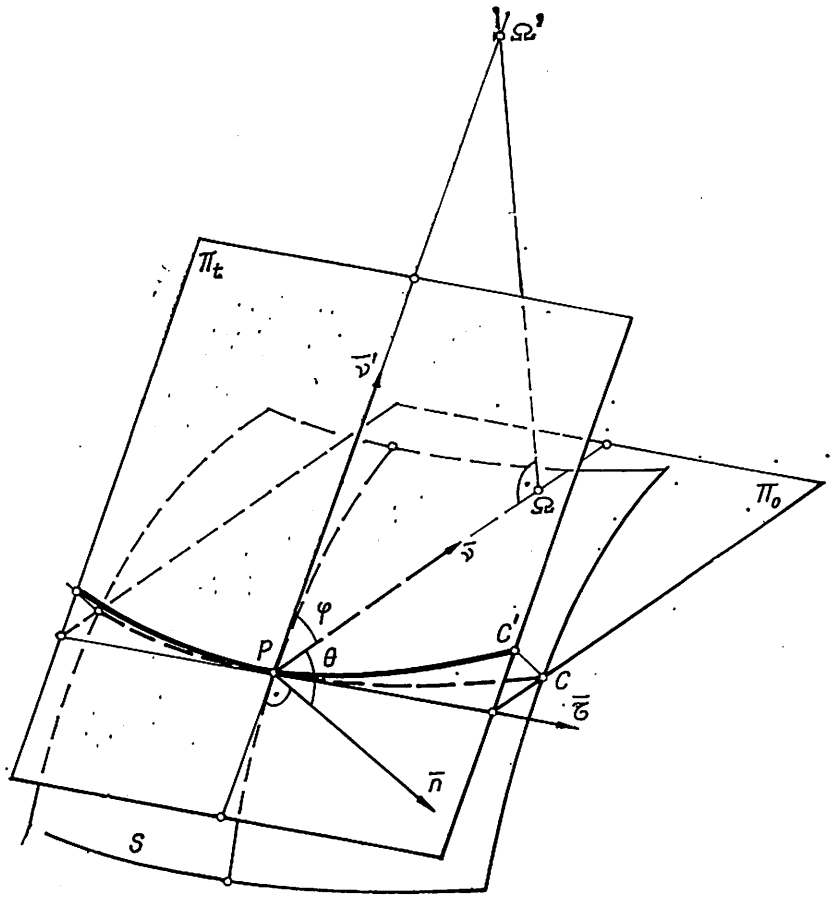


Fig. 68

sau

$$(103'')\quad \frac{1}{\rho_g} = \pm\sqrt{\Delta}\begin{vmatrix} u' & u'' + \left|\begin{matrix}1\\1\,1\end{matrix}\right| u'^2 + 2\left|\begin{matrix}1\\1\,2\end{matrix}\right| u'v' + \left|\begin{matrix}1\\2\,2\end{matrix}\right| v'^2 \\ v' & v'' + \left|\begin{matrix}2\\1\,1\end{matrix}\right| u'^2 + 2\left|\begin{matrix}2\\1\,2\end{matrix}\right| u'v' + \left|\begin{matrix}2\\2\,2\end{matrix}\right| v'^2 \end{vmatrix}$$

sau încă

$$(103''')\quad \frac{1}{\rho_g} = \pm\sqrt{\Delta}(u'v'' - u''v') + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right)v'^2 \\ Fu' + Gv' & \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 \end{vmatrix}.$$

182 Suprafaţa S fiind raportată la o reţea ortogonală, să se determine curburile geodezice ale curbelor coordonate.

183 Fiind dat un punct P al unei curbe C de pe o suprafaţă S, să se demonstreze că curbura geodezică în P a lui C e egală cu curbura în P a proiecţiei C' a lui C pe planul tangent în P la S.

R. C şi C' sînt în contact în P, tangenta comună fiind intersecţia lui π_t (în P la S) cu π_0 (în P la C) (fig. 68). Pe cilindrul proiectant, C' e secţiunea normală asociată lui C în P; deci, cu $\varphi = (\widehat{\bar{\nu}, \bar{\nu}'})$, avem $1/R' = \cos\varphi/R$. Fie $\theta = (\widehat{\bar{\nu}, \bar{n}})$, adică $\varphi = \pi/2 - \theta$; atunci $1/R' = \sin\theta/R = \rho_g$. Centrul de curbură Ω' al lui C' în P e *centrul de curbură geodezică* al lui C.

184 Să se arate că generatoarele paraboloidului hiperbolic $S: z = xy$ sînt linii geodezice, folosind ecuaţia diferenţială a acestor curbe.

R. De-a lungul unei geodezice: $1/\rho_g = 0$; ecuaţia diferenţială a geodezicelor:

$$(104)\quad u'v'' - u''v' + \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} u'^3 + \left(2\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix}\right) u'^2v' - \left(2\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix}\right) u'v'^2 - \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} v'^3 = 0.$$

Deci $(1 + u^2 + v^2)(u'v'' - u''v') + 2(uu' - vv')\,u'v' = 0$ cu soluţiile $u = C_1$, $v = C_2$.

185 Liniile geodezice ale unei suprafeţe cilindrice S sînt elice.

R. Fie S: $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = v$. Avem $\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = (f'f'' + g'g'')/(f'^2 + g'^2)$, restul simbolurilor fiind nule. Luînd geodezica $v = v(u)$, ecuaţia (104) dă $v = C_1\int\sqrt{f'^2 + g'^2}\,du + C_2$. De-a lungul curbei de bază $v = 0$, avem $ds = \sqrt{f'^2 + g'^2}\,du$; deci $v = C_1 s(u) + C_2$, s fiind lungimea arcului pe curba $v = 0$. Geodezicele: $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = C_1 s(u) + C_2$ sînt elice, căci $\cos\theta = \bar{\tau}.\bar{k}/|\bar{\tau}| = C_1/\sqrt{1 + C_1^2}$ *Obs.* a) Putem considera că u e arcul pe $v = 0$ ($f'^2 + g'^2 = 1$); ecuaţia diferenţială a geodezicelor: $v'' = 0$, adică $v = C_1 u + C_2$. b) Plecînd de la ecuaţia diferenţială a geodezicelor

$$(104')\qquad (d\bar{r}\ \ d^2\bar{r}\ \ \bar{N}) = 0,$$

obţinem $(f'^2 + g'^2)\,(du\,d^2v - d^2u\,dv) - (f'f'' + g'g'')\,du^2\,dv = 0$, adică $d\left(\frac{dv}{du}\right) - \frac{1}{2}d\,[\ln(f'^2 + g'^2)]\,\frac{dv}{du} = 0, \ldots$ Cînd $f'^2 + g'^2 = 1$, atunci $f'f'' + g'g'' = 0$. c) Cu $f = u$ şi geodezica $v = v(u)$, ecuaţia diferenţială a geodezicelor: $v''/v' = g'g''/(1 + g'^2)$; $v' = C_1\sqrt{1 + g'^2} = C_1\frac{ds}{du}$, adică $v = C_1 s + C_2$, s — arcul curbei $y = g(x)$, $z = 0$.

186 Fiind dat un con S cu vîrful O, se cere: a) Să se găsească geodezicele lui. b) Să se arate că, pentru ca o curbă C de pe S să fie geodezică, e necesar şi suficient ca unghiul ψ pe care-l formează în punctul ei curent P cu generatoarea lui S ce trece prin P să satisfacă relaţia

$$(105)\qquad l\sin\psi = \text{const.}, \quad l = OP.$$

c) Să se arate că geodezicele lui S au ecuaţi intrinsecă

$$(105')\qquad \rho/\tau = as + b \quad (a, b \text{ — constante}).$$

R. a) Fie S: $\bar{r} = u\,\bar{a}(v)$ cu $\bar{a}^2 = 1$. Ecuaţia geodezicelor e

$$(105'')\qquad \dot{\bar{a}}^2u^2v'' + 2\dot{\bar{a}}^2uv' + \bar{a}.\ddot{\bar{a}}u^2v'^2 + (\dot{\bar{a}}^2)^2u^3v'^3 = 0\left(\dot{\bar{a}} = \frac{d\bar{a}}{dv}v' = \frac{dv}{du}, \ldots\right).$$

Cu $V' = |\bar{a}|v'$; ecuația (105″) se scrie $uV'' + 2V' + u^2V'^3 = 0$ sau $(1/u^4V'^2)' + (1/u^2)' = 0$; deci $V' = C_1/u\sqrt{u^2 - C_1^2}$, adică

(105‴) $$\int |\dot{\bar{a}}|\,dv = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{u^2 - C_1^2}/C_1\right) + C_2 \text{ sau } u\cos\left(\int |\dot{\bar{a}}|dv - C_2\right) = C_1.$$

b) În coordonate polare: $l = u$, $\theta = \int |\dot{\bar{a}}|\,dv$, geodezica (105‴) e dreapta

(105^{IV}) $$\cos(\theta - C_2) = C_1 \quad (m = -\operatorname{ctg}C_2,\ n = C_1/\sin C_2 \text{ și } \eta = m\xi + n).$$

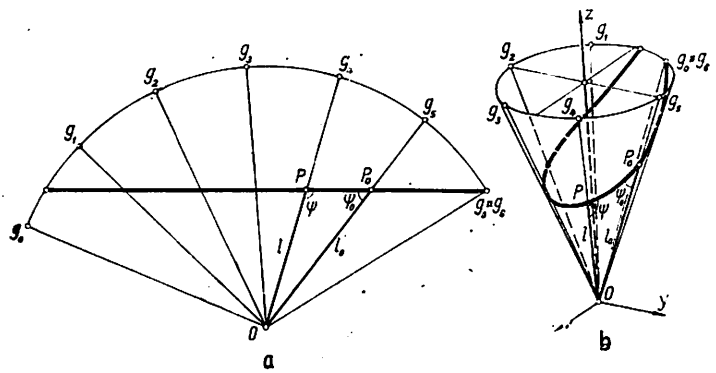


Fig. 69

Deoarece (fig. 69), prin desfășurarea conului S pe un plan, generatoarele lui S se aplică pe un fascicul de raze cu centrul O, iar geodezica C pe dreapta d, avem $m = -\operatorname{tg}\psi_0$, $n = l_0\operatorname{tg}\psi_0$, adică $C_1 = l_0\sin\psi_0$, $C_2 = \pi/2 - \psi_0$; de altfel, din triunghiul OP_0P, avem $l\sin\psi = l_0\sin\psi_0 = \text{const.}$ Reciproca e adevărată. *Obs.* Din (105‴) deducem $C_1 = |\dot{\bar{a}}|\,u^2v'/\sqrt{1 + \dot{\bar{a}}^2u^2v'^2}$; cum $l = u$, $\bar{r}' = \bar{a} + \dot{\bar{a}}uv'$, $\bar{a} \times \bar{r}' = \bar{N}v'$ iar $|\bar{a} \times \bar{r}'| = |\dot{\bar{a}}|\,uv'$, avem $\sin\psi = |\bar{a} \times \bar{r}'|/|\bar{r}'| = C_1/l$. c) Deoarece $\bar{n}$ (în P la S) $= \bar{\nu}$ (în P la C), adică π_t (în P la S) $= \pi_r$ (în P la C), rezultă g(a lui S, prin P) $\in \pi_r$, adică $O \in \pi_r$; deci π_r (de-a lungul lui C) înfășoară pe S, adică desfășuranta rectificantă a lui C e conul S. Atunci (v. probl. 76) rezultă (105′).

187 Fie o suprafață de rotație S; să se arate: a) Ecuația geodezicelor poate fi obținută prin cuadraturi. b) Produsul dintre raza paralelului prin punctul curent al unei geodezice al lui S și cosinusul unghiului geodezicei cu paralelul e constant (*teorema lui Clairaut*). c) Numind *cercuri geodezice de prima speță* curbele (de pe o suprafață S) cu curbura geodezică constantă, atunci paralelii lui S sînt astfel de cercuri.

R. a) Cu forma geodezică (60) a metricii lui S, ecuația geodezicelor e

(106) $$hv'' + 2h'v' + h^2h'v'^3 = 0 \text{ sau } (1/h^4v'^2)' + (1/h^2)' = 0; \quad v = C_1\int \frac{du}{h\sqrt{h^2 - C_1^2}} + C_2.$$

Presupunînd C_1 fix, avem o familie de geodezice Γ ce se obțin una din alta printr-o rotație în jurul axei lui S; pentru C_2' și C_2'', Γ' se obține din Γ'' cu unghiul $C_2'' - C_2'$. Pentru $C_1 = 0$, obținem $v = C_2$, adică: *meridianele lui S sînt geodezice. Obs.* a$_1$) Pentru S de ecuații (6′), ecuația (104) se scrie

(106′) $$u(1 + f'^2)v'' + u^2v'^3 + 2(1 + f'^2) - uf'f''v' = 0, \text{ cu soluția } v = C_2.$$

Deoarece $U = \int\sqrt{1 + f'^2}du$ iar $h(U) = u$, atunci $v = C_1\int\sqrt{(1 + f'^2)/(u^2 - C_1^2)}\ du/u + C_2$·a$_2$) Pentru

sferă, meridianele fiind cercuri mari iar printr-un punct trec o infinitate de cercuri mari, avem: *geodezicele unei sfere sînt cercurile mari.* Geometric: normala principală a unui cerc mare e normala sferei. Analitic: Fie sfera (7); metrica (60′) ia forma geodezică (60) pentru $ru = \theta, v = \varphi$, cînd $h = r\cos\frac{\theta}{r}$. Atunci $\varphi = C_2 + \int\left[\mathrm{d}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)\Big/\sqrt{(r^2 - C_1^2)/C_1^2 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{r}}\right] =$ $= \arcsin\left(C_1\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{r}\Big/\sqrt{r^2 - C_1^2}\right) + C_2$. Deci Γ: $C_1'\,\mathrm{tg}\,u = \sin(v + C_2')$, cu $C_1' = C_1/\sqrt{r^2 - C_1^2}$, $C_2' = -C_2$, se găsesc în planul π: $x\sin C_2' + y\cos C_2' - C_1' z = 0$; căci Γ e curbă sferică, iar în coordonate sferice: $\rho = r\cos u, v, z$ avem S: $x = \rho\cos v, y = \rho\sin v, z = \rho\,\mathrm{tg}\,u$. Deci $\Gamma = S \cap \pi$ iar $0 \in \pi$, adică Γ e un cerc mare. b) Fie $u = \text{const.}$ ($\delta u = 0$, $\delta v \neq 0$) un paralel, de rază $r = h(u)$; deci $\cos V = hv'/\sqrt{1 + h^2v'^2} = C_1/h = C_1/r$. *Obs.* Această relație dă o interpretare geometrică lui C_1 ea permite să urmărim mersul geodezicelor corespunzătoare unei valori a lui C_1. c) Căci $1/\rho_g = (\ln h)_u$.

188 Liniile izotrope ale unei suprafețe S sînt geodezice.

189 Se cer geodezicele suprafeței polare a unei curbe C.

190 Să se arate că o curbă (în spațiu) C e linie geodezică pentru desfășurabila rectificantă a lui C.

191 Dacă o curbă situată pe o suprafață riglată se bucură de 2 din proprietățile: a) e geodezică; b) e izogonală generatoarelor; c) e linie de strictiune, atunci se bucură și de cea de-a treia (*Bonnet*).

192 Să se arate că o geodezică nu poate fi linie de curbură decît dacă ea e o curbă plană.

R. Fie Σ: $\bar{R} = \bar{r}(s) + v\,\bar{n}(s)$, născută de normalele la S de-a lungul lui C. Dacă C e o geodezică: $\bar{n} = \bar{\nu}$. Dacă C e și linie de curbură: Σ e o suprafață desfășurabilă iar $\left(\bar{\tau}\,\bar{n}\frac{\mathrm{d}\bar{n}}{\mathrm{d}s}\right) = 0$; deci $\frac{\mathrm{d}\bar{n}}{\mathrm{d}s} \| \bar{\tau}$, adică $1/\tau = 0$. Reciproc, dacă C e geodezică plană, atunci Σ e un cilindru; deci C e o linie de curbură. *Obs.* Dacă C e o dreaptă d, pentru ca Σ să fie o suprafață desfășurabilă trebuie ca normalele să rămînă în același plan; deci d e o linie de curbură dacă π_t (la S de-a lungul lui C) nu variază. b) Dacă C e plană, C e linie de curbură dacă planul ei face un unghi constant cu planul tangent ($\bar{n}.\bar{\beta} = 0$).

193 Fie suprafața S de ecuație (11); geodezicele sînt date de ecuațiile

(107) $$\mathrm{d}^2x/\mathrm{F}_x = \mathrm{d}^2y/\mathrm{F}_y = \mathrm{d}^2z/\mathrm{F}_z.$$

Apl. S e suprafața de rotație de ecuație $z = \mathrm{f}(r)$ cu $r^2 = x^2 + y^2$.

R. Din $\bar{n}$ (în P la S) $\in \pi_0$ (în P la C) rezultă $\bar{\nu}$ (în P la C) $= \lambda\bar{n}$; însă $\bar{\nu} = \mu\mathrm{d}^2\bar{r}/\mathrm{d}s^2$, $\bar{n} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v/\sqrt{\Delta} = (A/\sqrt{\Delta}, B/\sqrt{\Delta}, C/\sqrt{\Delta})$ iar $A/F_x = B/F_y = C/F_z$. *Apl.* Din (107) rezultă $yx_s'' - xy_s'' = 0$, deci $xy_s' - yx_s'C_1$; în coordonate cilindrice: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, avem $r^2\theta_s' = C_1$ iar $\mathrm{d}s = r^2\mathrm{d}\theta/C_1$, adică $\theta = C_2 + C_1\sqrt{(1 + f'^2)/(r^2 - C_1^2)}\,\mathrm{d}r/r$. Cu această valoare în S: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = f(r)$ obținem ecuația geodezicelor. *Obs.* a) θ dă proiecția geodezicei în coordonate polare, pe planul Oxy. Pentru ca integrala să aibă sens, trebuie ca $r > C_1$, constanta ce corespunde unei anumite geodezice. b) Pentru paralel, avem $\bar{i}(-y/r, x/r, 0)$; deci $r\cos V = C_1$ (v. probl. 187). *Ex.* a) Pentru pseudosfera (10′), avem $f(r) = a[\ln((a + \sqrt{a^2 - r^2})/r) \pm \pm\sqrt{a^2 - r^2}]$, $\mathrm{d}s^2 = a^2\mathrm{d}r^2/r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$ iar $\theta = C_2 + a\sqrt{r^2 - C_1^2}/rC_1$. *Obs.* că $(\theta - C_2)^2 + a^2/r^2 = a^2/C_1^2$ încît, punînd $r = a/y$, $\theta = x$, geodezicele pseudosferei se reprezintă prin semicercuri cu centrul pe Ox, în planul Oxy. b) Fie conul $x^2 + y^2 = z^2$; deci $f(r) = r$. Avem $\theta = \sqrt{2}\arccos(C_1/r) + C_2$; luînd originea pentru $C_1 = r$, $C_2 = 0$ obținem spicul $r\cos(\theta/\sqrt{2}) = C_1$. Pentru $C_1 = 0$: $\theta = \text{const.}$ (drepte prin O).

194 Fie date, într-un punct P al unei suprafețe S, o direcție tangentă $\bar{e}$ și un versor $\bar{v}$; cînd $\bar{v}$ e deplasat din P într-un punct apropiat $P' \in S$,

dacă variația $d\theta$ a unghiului aceleași direcții $\bar{e}$ cu vectorul $\bar{v}' = \bar{v} + d\bar{v}$ din P' e nulă, se spune că *vectorii* $\bar{v}$ și $\bar{v}'$ *sînt paraleli pe* S. Se cere: a) Să se afle *ecuațiile de paralelism pe* S (*ale lui Levi-Civita*). b) Să se demonstreze că paralelismul pe S închide paralelogramele infinitezimale. c) Numind *curbe autoparalele* pe S curbele al căror vector tangent se transportă prin paralelism de-a lungul curbei, să se arate că aceste curbe sînt geodezicele lui S.

R. a) Cu $\bar{e}^2 = 1$, deci $\cos\theta = \bar{v}.\bar{e}$ și $-\sin\theta\, d\theta = \bar{e}.d\bar{v}$, dacă $d\theta = 0$, atunci

$$\bar{e}.d\bar{v} = 0. \tag{108}$$

Obs. În R^3, condiția (108) nu poate fi verificată, oricare ar fi direcția $\bar{e}$, decît dacă $d\bar{v}$ e nul ($\bar{v}$ constant în orice punct din R^3); în acest caz, $\bar{v}$ și $\bar{v}'$ sînt paraleli și egali, condiția (108) fiind *ecuația de paralelism în* R^3. Fie S de ecuație (13); deci $\bar{e} = \lambda\bar{r}_u + \mu\bar{r}_v$. Pentru orice λ, μ, condiția (108) dă

$$\bar{r}_u .d\bar{v} = 0, \quad \bar{r}_v .d\bar{v} = 0. \tag{108'}$$

Deci $d\bar{v} \parallel \bar{n}$, adică $\bar{v} \in \pi_t$, iar $\bar{v} = a\bar{r}_u + b\bar{r}_v$, încît condițiile (108') se scriu

$$\begin{aligned} &E\,da + F\,db + a(|11,1|\,du + |12,1|\,dv) + b(|21,1|\,du + |22,1|\,dv) = 0 \\ &F\,da + G\,db + a(|11,2|\,du + |12,2|\,dv) + b(|21,2|\,du + |22,2|\,dv) = 0 \end{aligned} \tag{108''}$$

sau încă

$$\begin{aligned} &da + a\left(\left|\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right|du + \left|\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right|dv\right) + b\left(\left|\begin{matrix}1\\2\ 1\end{matrix}\right|du + \left|\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right|dv\right) = 0 \\ &db + a\left(\left|\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right|du + \left|\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right|dv\right) + b\left(\left|\begin{matrix}2\\2\ 1\end{matrix}\right|du + \left|\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right|dv\right) = 0 \end{aligned} \tag{108'''}$$

Obs. Fie pe S, vectorul $\bar{v} = (a, b)$. Notînd $a = v^1$, $b = v^2$, $u = u^1$, $v = u^2$, $E = a_{11}$, $F = a_{12} = a_{21}$, $G = a_{22}$ ($\Delta = |a_{ij}|$), condițiile (108'') și (108''') se scriu

$$a_{ij}\,dv^j + |jk,\ i|\,v^j\,du^k = 0, \quad dv^i + \left|\begin{matrix}i\\j\ k\end{matrix}\right| v^j\,du^k = 0. \tag{108^{IV}}$$

b) Dat fiind $P(u, v) \in S$, fie $Q(u + du, v + dv)$ și $R(u + \delta u, v + \delta v)$; deci $\overline{PQ} = (du, dv)$ și $\overline{PR} = (\delta u, \delta v)$. Dacă deplasăm pe $\overline{PR}$ (respectiv $\overline{PQ}$) prin paralelism de-a lungul lui $\overline{PQ}$ (respectiv $\overline{PR}$), R (respectiv Q) vine în S (respectiv T). Deci

$$S\,[u + \delta u + d(u + \delta u),\ v + \delta v + d(v + \delta v)],\ T\,[u + du + \delta(u + du),\ v + dv + \delta(v + dv)],$$

în care $d\delta u$, $d\delta v$ și δdu, δdv satisfac ecuațiile (108'''); rezultă $d\delta u = \delta du$ și $d\delta v = \delta dv$, încît $S = T$. Figura $PQRS$ se numește *paralelogram infinitezimal* construit în P pe vectorii $\overline{PQ}$ și $\overline{PR}$. c) Fie $C: u = u(t), v = v(t)$ pe S; deci $a = du/dt$, $b = dv/dt$, încît *curbele autoparalele* au ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + \left|\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\left|\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right|\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \left|\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right|\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0, \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + \left|\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\left|\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right|\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \left|\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right|\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{109}$$

Luînd arcul s al curbei C ca parametru, ecuațiile (109) admit integrala primă $E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \text{const.}$ Luînd pe u ca parametru pe C, deci $v' = \frac{dv}{du}u'$, $v'' = \frac{d^2v}{du^2}u'^2 + \frac{dv}{du}u''$ etc., ecuațiile (109) sînt ale geodezicelor:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{du^2} + \left|\begin{matrix}2\\1\ 1\end{matrix}\right| + \left(2\left|\begin{matrix}2\\1\ 2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right|\right)\left(\frac{dv}{du}\right) - \left(2\left|\begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}2\\2\ 2\end{matrix}\right|\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \\ &- \left|\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right|\left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0. \end{aligned} \tag{109'}$$

Obs. c_1) Ecuațiile (109) se pot pune sub forma tensorială

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right| \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d^2u^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt},\ \Gamma^i_{jk} = -\left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right|\right). \tag{109''}$$

c_2) Cînd S e raportată la o rețea ortogonată, geodezicele au ecuațiile

$$\frac{du}{dt} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{E}},\ \frac{dv}{dt} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{G}},\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\alpha - \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\alpha; \tag{109'''}$$

cu primele ecuații în (109), se obține ultima ecuație (109'').

195 Să se arate că o curbă C care realizează minimul distanței pe o suprafață S, între 2 puncte (suficient de apropiate), e o geodezică. *Apl.* a) Să se afle geodezicele suprafețelor desfășurabile. b) Să se realizeze axioma paralelelor în geometria Lobacevski-Bolyai folosind semiplanul Klein-Poincaré. c) Să se arate, θ fiind unghiul dintre o geodezică și $v = \text{const.}$, că ecuația geodezicelor are *forma lui Gauss*:

$$d\theta = -\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\left(\left|\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right| du + \left|\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right| dv\right). \tag{110}$$

R. Fie $P_0(s_0)$ și $P_1(s_1)$ pe $C: u = u(s),\ v = v(s)$; lungimea arc P_0P_1 (pe C) e $l = \int_{s_0}^{s_1} ds$. Fie $\bar{C}: \bar{u} = u(s) + \delta u(s),\ \bar{v} = v(s) + \delta v(s)$ cu $\delta u(s_0) = \delta u(s_1) = 0,\ \delta v(s_0) = \delta v(s_1) = 0$; lungimea arc P_0P_1 (pe C) e $\bar{l} = l + \delta l$. Rezultă $\delta l = \int_{s_0}^{s_1} \delta ds$. Aplicînd operatorul δ metricii ds^2 și împărțind cu $2ds$, obținem $\delta l = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2}(\delta E u'^2 + 2\delta F u'v' + \delta G v'^2)\,ds + \int_{s_0}^{s_1} [Eu'\delta du + F(u'\delta dv + v'\delta du) + Gv'\delta v]$; integrînd prin părți a doua integrală, fiind nulă partea integrată:

$$\delta l = -\int_{s_0}^{s_1} A\delta u + B\delta v \text{ cu } A = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{6u},\ B = \frac{d}{ds}\left(\frac{\delta T}{\partial v}\right),\ T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2).$$

Pentru ca δl să fie zero, oricare ar fi δu, δv, trebuie să avem $A = B = 0$; de unde rezultă (108''') cu $a = u'$, $b = v'$. *Obs.* a) Geodezicele lui S sînt drumurile cele mai scurte și cele mai drepte pe S. b) Pentru $C: v = v(u)$, găsim

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0,\ \Phi = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}. \tag{111}$$

Apl. a) Fie $S: \bar{r} = \bar{r}_0(u) + v\bar{r}_0'(u)$ cu $\bar{r}_0'^2 = 1$. Luînd $\Phi = \sqrt{(1 + v')^2 + v^2/\rho^2}$ și introducînd variabila auxiliară σ astfel ca $\frac{\partial \Phi}{\partial v'} = \cos\sigma$, rezultă $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \sin\sigma/\rho$; din (111), obținem $\sigma = C_1 - \int du/\rho$. Din $\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\Big/\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, avem $\frac{v}{\rho}\operatorname{ctg}\sigma - 1 = \frac{dv}{du}$; însă $du = -\rho\,d\sigma$, încît $\frac{dv}{d\sigma} + v\operatorname{ctg}\sigma = \rho$ cu soluția $v = (C_2 - \int \sin\sigma\,du)/\sin\sigma$. Geometric: geodezicele pe S sînt acele curbe C care au normala principală paralelă cu binormala curbei de întoarcere C_0, în punctele de pe aceeași generatoare g; căci β_0 (a lui C_0 în $P \in g$) $= \bar{n}$ (în P la S). Deci π_r (al lui C) $= \pi_0$ (al lui C_0), g fiind caracteristica lui π_r. b) Fie semiplanul Klein-Poincaré, de metrică (60^{IV}b). Conform cu $A = B = 0$, avem

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{y^2}\frac{dx}{ds}\right) = 0,\ \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{y^2}\frac{dy}{ds}\right) + \frac{1}{y^3}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = 0. \tag{112}$$

Prima ecuație dă $\frac{dx}{ds} = cy^2$. Dacă $c = 0$, rezultă $x = \text{const.}$; deci paralelele la Oy (corespunzînd meridianelor pseudosferei). Dacă $c \neq 0$, avem cercurile

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1, \text{ adică } (x - x_0)^2 + y^2 = r^2.$$

Realizarea axiomei paralelelor: prin A și B trece un singur semicerc cu centrul pe Ox; prin P, nesituat pe semicercul AB, se pot duce 2 semicercuri cu centrele pe Ox, care întîlnesc semicercul AB pe Ox, celelalte semicercuri care trec prin P împărțindu-se în semicercuri secante și nesecante celui dat. Or, geodezicele planului Klein-Poincaré sînt drepte în geometria Lobacevski-Bolyai, iar Ox joacă rolul de infinit (fig. 70). c) $d\bar{r} = \bar{r}_u\,du + \bar{r}_v dv$ pe $C: u = u(s)$, $v = v(s)$, iar $\delta\bar{r} = r_u\delta u$ pe $\Gamma: v = \text{const.}$; atunci $\cos\theta = (Eu' + Fv')/\sqrt{E}$, $\sin\theta = \sqrt{\Delta/E}\,v'$, $T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)$

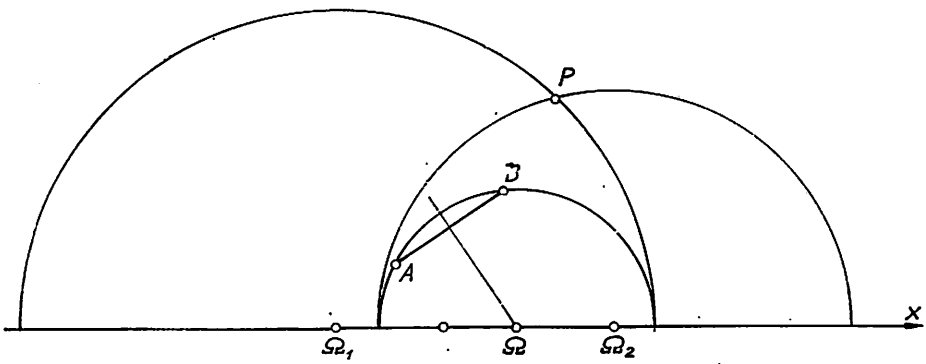


Fig. 70

încît $\frac{d}{ds}(T_{u'}) - T_u = 0$ devine $d\theta = [(E_v + FE_u/E - 2F_u)\,du + (FE_v/E - G_u)\,dv]/2\sqrt{\Delta}$. *Obs.* Pentru forma geodezică a metricii ($E = 1$, $F = 0$, $G = G(u)$): $d\theta = -(\sqrt{G})_u\,dv$.

196 Fie M o particulă de masă m, care se mișcă pe o suprafață S cu o accelerație a și fie R reacțiunea (normală în M la S). Dacă asupra particulei M nu acționează forțe exterioare, atunci M descrie o curbă C, care e o geodezică a suprafeței S.

197 O suprafață S raportată la un sistem de coordonate geodezice și ortogonale e o suprafață desfășurabilă.

198 Să se arate că, prin schimbări de coordonate curbilinii, putem reduce ecuația geodezicelor (109′) ale lui S la una din formele canonice

$$(113)\quad \frac{d^2v}{du^2} = b\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + c\frac{dv}{du},\quad \frac{d^2v}{du^2} = c\frac{dv}{du} + d,\quad \frac{d^2v}{du^2} = b\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + d \quad (\textit{Gh. Vrănceanu}).$$

R. Notăm $a = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, $b = 2\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, $c = -\left(2\begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$, $d = -\begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Prin

$$(114)\qquad U = f(u, v),\ V = g(u, v) \text{ cu } \Delta = f_u g_v - f_v g_u \neq 0,$$

avem $(f_u + f_v v')\frac{dV}{dU} = g_u + g_v v'$, $(f_u + f_v v')^2\frac{d^2V}{dU^2} = g_{uu} + 2g_{uv}v' + g_{vv}v'^2 + g_v v'' - \frac{dV}{dU}(f_{uu} + 2f_{uv}v' + f_{vv}v'^2 + f_v v'')$; deci (109′) se transformă în

$$(113')\qquad \frac{d^2V}{dU^2} = \alpha\left(\frac{dV}{dU}\right)^3 + \beta\left(\frac{dV}{dU}\right)^2 + \gamma\frac{dV}{dU} + \delta,$$

cu $\Delta^2\alpha = -(f_{uu}f_v^2 - 2f_{uv}f_uf_v + f_{vv}f_u^2 - af_u^3 + bf_u^2f_v - cf_uf_v^2 + df_v^3)$, $\Delta^2\beta = 2f_{uu}f_vg_v + 2f_{vv}f_ug_u + g_{uu}f_v^2 + g_{vv}f_u^2 - 2f_{uv}f_ug_v - f_{uv}f_vg_u - 2g_{uv}f_uf_v - 3af_u^2g_u + 2bf_uf_vg_u + bf_u^2g_v - 2cf_uf_vg_v - cf_v^2g_u + 3df_v^2g_v$, $\Delta^2\gamma = -(2g_{uu}f_vg_v + 2g_{vv}f_ug_u + f_{vv}g_u^2 - 2g_{uv}f_vg_u - 2g_{uv}f_ug_v - 2f_{uv}g_ug_v - 3af_ug_u^2 +$

$+ 2bf_u g_u g_v + bf_v g_u^2 - 2cf_v g_u g_v - cf_u g_v^2 + 3df_v g_v^2)$ $\Delta^2\delta = g_{uu} g_v^2 - 2g_{uv} g_u g_v + g_{vv} g_u^2 - ag_u^3 + bg_u^2 g_v - cg_u g_v^2 + dg_v^3$.

Dacă f e o soluție a ecuației cu derivate parțiale de-al doilea ordin

(115) $\qquad rq^2 - 2spq + tp^2 - ap^3 + bp^2 q - cpq^2 + dq^3 = 0 \quad (p = z_u, \ldots, t = z_{vv}),$

putem anula pe α. De asemenea, putem anula pe δ cînd g e o altă soluție a ecuației (115), independentă de f; rezultă (113_1), păstrată prin

(114′) $\qquad U = f(u), \quad V = g(v).$

În acest caz, S e raportată la o rețea geodezică de coordonate; căci

(114″) $\qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = 0.$

Prin (114′), ecuația canonică devine $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}U^2 = (V''/V'^2 + b/V')\,(\mathrm{d}V/\mathrm{d}U)^2 + (-U''/U'^2 + c/U')(\mathrm{d}V/\mathrm{d}U)$; dacă $b = b(v)$ sau $c = c(u)$, putem anula pe b sau pe c. Fie $\alpha = 0$; în acest caz, u e invariant, deci și $\alpha = 0$, prin

(114‴) $\qquad U = u, \quad V = g(u, v),$

iar $g_v^2\,\beta = g_{vv} + bg_v$, $g_v^2\,\gamma = 2g_{uv}g_v - 2g_{vv}g_u - 2bg_u g_v + cg_v^2$. Putem anula fie pe β, fie pe γ, obținînd formele (113_2) sau (113_3); atunci g e o soluție a ecuației cu derivate parțiale $t + bq = 0$ sau $sq - tp - bpq + cq^2/2 = 0$. *Obs.* Dacă $F = 0$, atunci $a = 0$ numai dacă $G = G(v)$, cînd putem face ca $G = 1$. Avem $b = 0$ sau $c = 0$ dacă $E = E(u)$; deci S e o suprafață desfășurabilă. Avem $c = 0$ dacă $E = E(v)$; deci S e o suprafață de rotație, iar $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}u^2 = (E_v/E)\,(\mathrm{d}v/\mathrm{d}u)^2 + E_v$.

199 Fie, printr-un punct (ordinar) P al unei suprafețe S de ecuație (13), o geodezică $C : v = v(u)$; punctul P se numește *punct caracteristic* al lui C dacă — în acest punct — derivata secundă $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}u^2$ e nulă. Se cere: a) Să se arate că, prin fiecare punct $P \in S$, trec 3 geodezice care au pe P ca punct caracteristic, *direcțiile caracteristice* $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ fiind

(116) $$\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} \mathrm{d}u^3 + \left(2\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix}\right) \mathrm{d}u^2\mathrm{d}v - \left(2\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v^2 - \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} \mathrm{d}v^3 = 0.$$

b) Numind *curbe caracteristice* ale lui S curbele (de pe S) care-s tangente în fiecare punct al lor uneia din direcțiile caracteristice relative la acel punct, avem o clasificare a lor în *caracteristice de prima, a doua sau a treia speță* după cum ecuația (116) are rădăcinile distincte, o rădăcină dublă sau o rădăcină triplă $\left(\text{în } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)$; să se găsească transformarea (114) care păstrează speța curbelor caracteristice. c) Spunem că *suprafața S e cu caracteristice drepte* dacă ecuația (116) admite soluție liniară (în u, v), familia respectivă de curbe caracteristice fiind constituită din caracteristice drepte; să se arate că, dacă S e cu caracteristice drepte paralele, printr-o transformare afină de coordonate curbilinii, S poate fi raportată (cel puțin) la o rețea semigeodezică de coordonate, luînd congruența de caracteristice drepte ca curbe coordonate. *Apl.* a) Să se afle speța caracteristicelor unei suprafețe S raportată la o rețea izotermă de coordonate. b) Să se arate că suprafețele riglate sînt cu caracteristice drepte.

R. a) Rezultă din (109′). Ecuația (116) admite 3 soluții, una (cel puțin) fiind reală. b) Transformările liniare de coordonate curbilinii; ele sînt *transformările preferate* de conservare a speței caracteristicelor. *Obs.* Cînd ecuația (116) e identic verificată, S e *planul protectiv* cu

(117) $\qquad \mathrm{d}s^2 = 2[(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)/(1 + u^2 + v^2) - (u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v)^2/(1 + u^2 + v^2)^2].$

c) Considerînd că $\alpha\,du + \beta\,dv = 0$ (respectiv $\frac{dv}{du} = m$, deci $\alpha = m, \beta = -1$) e o soluție a ecuației (116) și că definește o familie de caracteristice drepte:

$$\beta^3 d^2v/du^2 = -\beta^2\alpha_u + \alpha\beta(\alpha_v + \beta_u) - \alpha^2\beta_v = 0 \text{ (respectiv } d^2v/du^2 = m_u + mm_v = 0).$$

În particular, pentru $\alpha = k\alpha_0, \beta = k\beta_0$ sau $\alpha = k(v - v_0), \beta = -k(u - u_0)$, respectiv $m = -\alpha_0/\beta_0$ sau $m = (v - v_0)/(u - u_0)$, unde $k = k(u, v)$ și $\alpha_0, \beta_0, u_0, v_0$ constante, obținem o *congruență de caracteristice drepte paralele* direcției m: $\alpha_0 u + \beta_0 v = C$ sau un *fascicul de caracteristice drepte* de centru (u_0, v_0): $v - v_0 = C(u - u_0)$. Dacă soluția $f(u, v)$ a ecuației (115) e liniară în u, v, e suficient să căutăm soluțiile liniare ale ecuației

$$(115') \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} p^3 - \left(2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} \right) p^2 q - \left(2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} \right) pq^2 + \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} q^3 = 0.$$

Fie $\alpha u + \beta v = C$ (α, β, C-const.) o soluție a ecuației (116); deci $dv/du = -\alpha/\beta$. Comparînd ecuația (115′) cu ecuația (116), deducem că ecuația (115′) se divide prin $-\beta p + \alpha q$, adică admite integrala $f(u, v) = \alpha u + \beta v$. Deci, prin afinitatea (114) cu $f = \alpha u + \beta v$, $g = v$, raportăm pe S la o rețea semigeodezică astfel încît caracteristicele drepte sînt paralele cu Ov. *Obs.* Dacă S e raportată la un sistem semigeodezic, familia de coordonate constituită din geodezice e o familie de caracteristice drepte; căci, fie $ds^2 = E(u, v)du^2 + dv^2$, cînd ecuația (116) se scrie $(EE_v du^2 + E_u du\,dv + 2E_v dv^2)du = 0$. Dacă $E_v = 0$, S e o *suprafață desfășurabilă*, caracteristicele fiind de speța a doua; dacă $E_u = 0$, S e o *suprafață de rotație*, caracteristicele fiind de prima speță. *Apl.* a) Fie $E = G, F = 0$; ecuația (116) devine $(E_v du - E_u dv)(du^2 + dv^2) = 0$. Deci S e cu caracteristice drepte imaginare, de prima speță. Folosind formele canonice

$$(118) \qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{1 + \frac{K}{4}(u^2 + v^2)} \text{ (Riemann)}, \quad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{-Kv^2} \text{ (Beltrami)},$$

obținem: *o suprafață cu curbură constantă, raportată la o rețea izotermă, admite numai caracteristice drepte*; cele reale sînt $u = Cv$ sau $u = C$. b) Fie S de ecuație (34) cu $\bar{a}^2 = 1$; ecuația (116) se scrie (v. probl. 82 și 100)

$$\left[\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} du^2 - \left(2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} \right) du\,dv - 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} dv^2 \right] du = 0.$$

Deci: *generatoarele rectilinii $u = const.$ ale lui S sînt caracteristice drepte paralele. Obs.* b_1) Dacă $L = 0$, deci și $M = 0$, cînd putem avea $P = 0$, S e un *con* cu caracteristice de prima speță. Dacă $N = 0$, deci și $M = 0$, S e un *cilindru*; cînd Δ nu e o constantă, putem avea $P = 0$, S fiind cu caracteristice de speța a doua, iar cînd $\Delta = const.$, S e cu caracteristice de a treia speță. b_2) Cuadricele nedegenerate admit 2 familii de caracteristice drepte paralele; căci sînt suprafețe dublu riglate, iar generatoarele aceleiași familii nu se intersectează.

200 Numim *fascicul regulat de geodezice* pe o porțiune Σ a lui S o familie de geodezice care depind de un parametru, astfel încît prin fiecare punct al lui Σ trece o singură geodezică a fasciculului. Raportînd pe S la un astfel de fascicul și la traiectoriile sale ortogonale, se obține o *rețea semigeodezică de coordonate* (sin.: *coordonate normale*) pe S. Se cere: a) Dacă S e raportată la o rețea semigeodezică, metrica lui S are forma canonică (forma geodezică a metricii)

$$(119) \qquad ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2, \text{ cînd } K = -(\sqrt{G})_{uu}/\sqrt{G};$$

atunci, θ fiind unghiul pe care — în P la S — o geodezică $\Gamma: v = v(u)$ îl face cu linia geodezică coordonată, avem *formula lui Gauss*

$$(119') \qquad (\sqrt{G})_u = -\theta_v.$$

b) Spunem că *două curbe* C_1 și C_2 sînt *geodezic paralele* dacă fiecare e tăiată ortogonal de un același fascicul regulat de geodezice; să se arate că 2 astfel

de curbe determină arce egale pe toate geodezicele fasciculului respectiv. c) Dacă C_1 și C_2 sînt 2 curbe (pe S) care nu-s geodezic paralele, curbele ce sînt geodezic paralele cu ele formează o rețea gaussiană (u, v) pe S, unde u și v sînt respectiv distanțele lor geodezice la C_1 și C_2; ce devin curbele rețelei (u, v) prin schimbarea de variabile $u' = (u + v)/2$, $v' = (u - v)/2$? d) Să se arate că, într-un sistem de coordonate normale asociate lui $P_0 \in S$, într-o vecinătate a lui P_0, suprafața S se comportă euclidian. *Apl.* Integrala

$$(120)\quad \Omega = \iint_D K \, d\sigma = \iint_D \sqrt{\triangle} K \, du \, dv \quad (D\text{-domeniu simplu conex pe } S)$$

se numește *curbură totală* (sin.: *curbură integrală*) *a lui S în D*. Un *triunghi geodezic* fiind triunghiul de pe S format din arce de geodezică astfel încît fasciculul geodezic cu centrul în unul din vîrfuri e regulat, să se afle *curbura totală a unui triunghi geodezic ABC* (sin.: *excesul triunghiului ABC*).

R. a) Fie $v = \text{const}$, un fascicul regulat de geodezice iar $u = \text{const}$. traiectoriile sale ortogonale; deci $\begin{vmatrix} \cdot 2 \\ 1 \; 1 \end{vmatrix} = 0$, $F = 0$, adică $E_v = 0$. Prin $dU = \sqrt{E(u)}\, du$, obținem (119). Avem $\cos^2\theta\,(1+Gv'^2)=1$, iar prin diferențiere și din ecuațiile geodezicelor, rezultă (119'). b) Conform definiției, *traiectoriile ortogonale ale unui fascicul regulat de geodezice sînt linii geodezic paralele.* Folosind metrica (119) și notînd $P_i(u_i, v) = C_i(u = u_i) \cap \Gamma(v = \text{const.})$, obținem $P_1P_2 = \int_{u1}^{u2} ds = u_2 -$

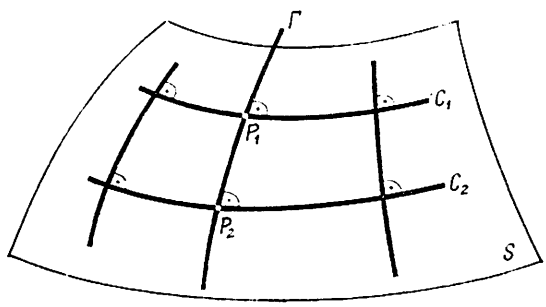
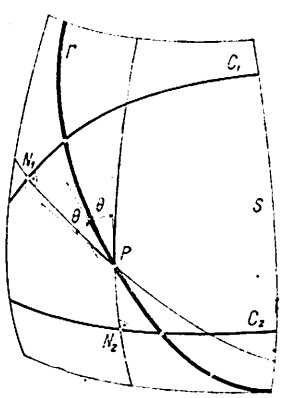
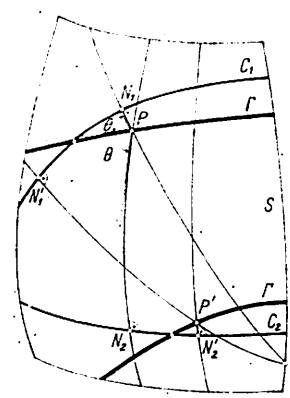


Fig. 71



a $\widehat{PN_1} + \widehat{PN_2} = \text{const.}$



b $|\widehat{PN_2} - \widehat{PN_1}| = |\widehat{P'N_2'} - \widehat{P'N_1'}| = \text{const.}$

Fig. 72

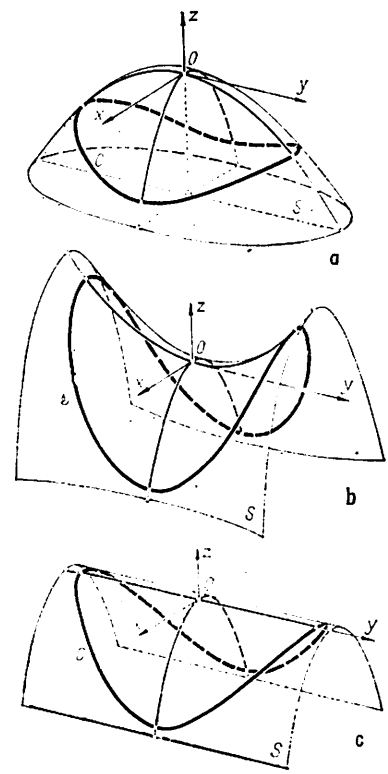


Fig. 73

$-u_1 = \text{const.}$ (fig. 71). Reciproc: dacă prin $P_1 \in C_1$ se duce geodezica ortogonală Γ și se ia $P_2 \in \Gamma$ astfel ca $P_1P_2 = l(\text{const.})$, locul lui P_2 e o curbă C_2 ortogonală lui Γ. c) Se numesc *elipse și hiperbole geodezice* curbele (de pe S) pentru care suma, respectiv diferența, distanțelor geodezice de la punctele lor la două curbe date C_i ($i = 1, 2$) de pe S (care nu-s geodezic paralele) e constantă (fig. 72). Dacă C_i se reduc la un același punct P_0, obținem locul punctelor lui S ale căror distanțe geodezice de P_0 sînt egale, numit *cerc geodezic de speța a doua* (simplificat: *cerc geodezic*; fig. 73). *Obs.* Tangenta într-un punct P al elipsei geodezice (hiperbole geodezice) e bisectoarea unghiului format de una din normalele geodezice PN_i și de prelungirea celeilalte (respectiv, normalele geodezice) (fig. 74). Curbele $u' = \text{const.}$ și $v' = \text{const.}$ sînt elipse și hiperbole geodezice. *Obs.* O rețea gaussiană formată din elipse și hiperbole geodezice e o rețea ortogonală. d) Un sistem semigeodezic se determină astfel: I) Se consideră geodezica C_0: $u = u_0$. Prin $P \in C_0$ trece o geodezică în direcție ortogonală tangentei în P la C_0. Acest fascicul regulat de geodezice e luat ca familie $v = \text{const.}$, v fiind arcul pe C_0 (de la $P_0(\text{fix}) \in C_0$); $u = \text{const.}$ sînt traiectoriile

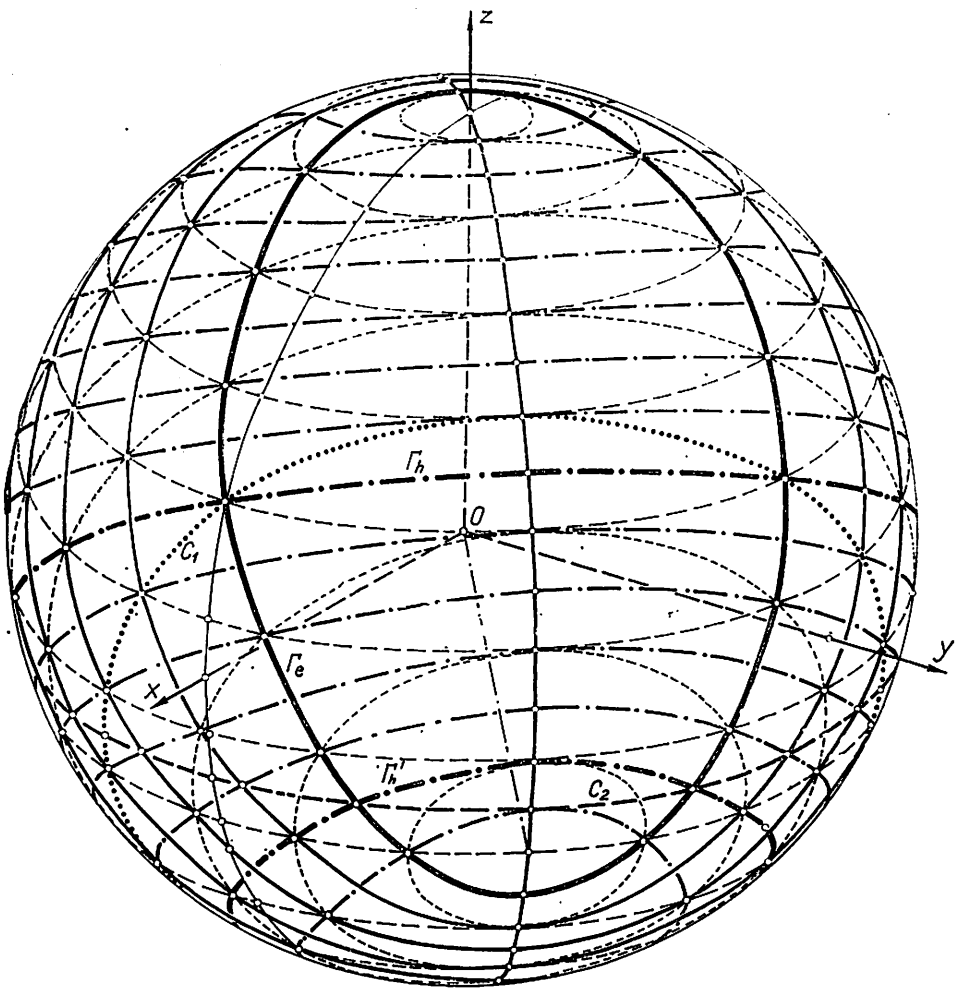


Fig. 74 a

→

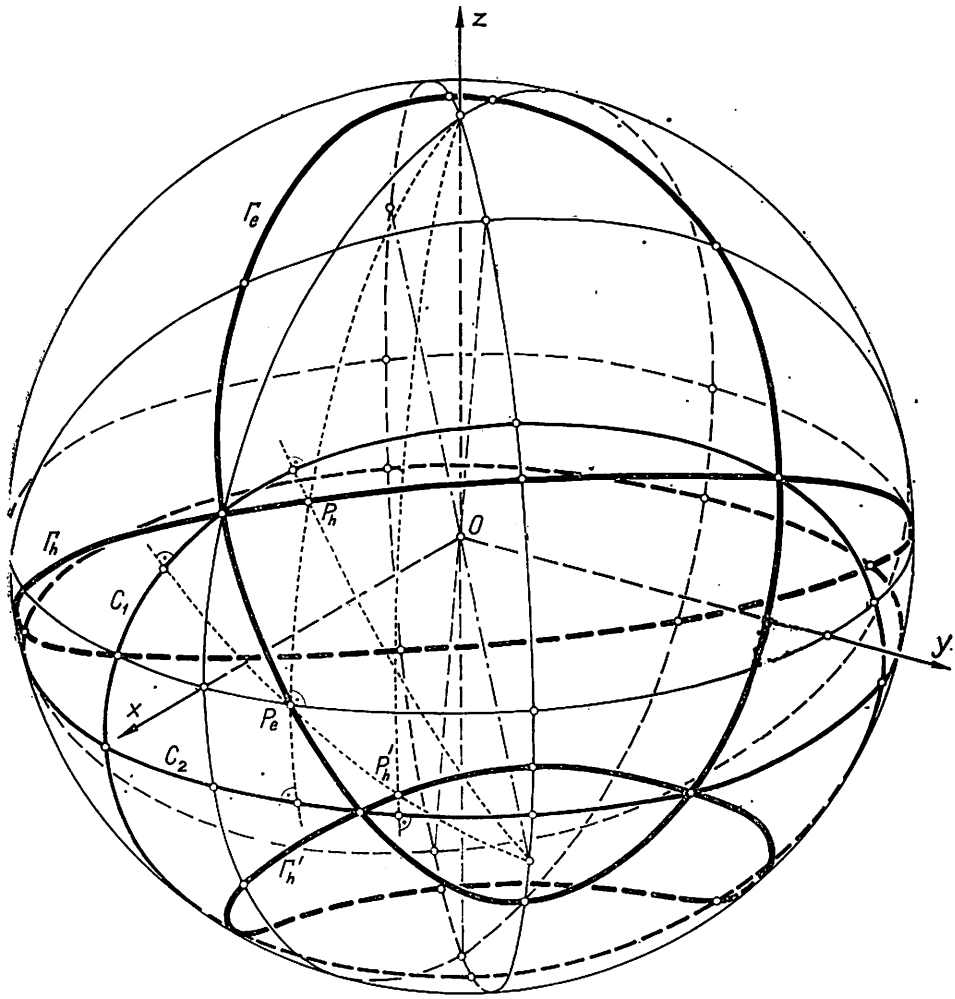


Fig. 74 b

ortogonale lui $v = \text{const.}$, u fiind arcul pe $v = \text{const.}$ Este o *rețea semigeodezică carteziană de coordonate pe S* (fig. 75). Luînd $u_0 = 0$, conform ipotezelor și că $(1/\rho_\varphi)_{u=0} = 0$, atunci

$$(119'') \qquad (\sqrt{G})_{u=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\right)_{u=0} = -(K)_{u=0}.$$

Dezvoltînd pe $\sqrt{G}$ după puterile lui u și cu (119''), obținem

$$\sqrt{G} = 1 - \frac{u^2}{2!} K_0 + \ldots, \text{ deci } ds^2 = du^2 + dv^2 - K_0 u^2 dv^2 + \ldots;$$

ds^2 diferă de metrica euclidiană $du^2 + dv^2$ (în coordonate carteziene ortogonale (u, v)) începînd cu termenii de ordin 2. *Obs.* d_1) Cînd S are în P_0 o curbură totală pozitivă, arcele cu originea în P_0

sînt mai scurte decît în planul euclidian tangent; lungimile sînt mai lungi pe o suprafață de curbură totală negativă. d_2) Cînd S e cu curbură constantă, din (119') obținem $\left(\frac{\partial^{2p+1}\sqrt{G}}{\partial u^{2p+1}}\right)_{u=0} = 0$, $\left(\frac{\partial^{2p}\sqrt{G}}{\partial u^{2p}}\right)_{u=0} = (-K)^p$, încît $\sqrt{G} = \cos\sqrt{K}u$; cînd $K<0$, rezultă $\cos\sqrt{K}u = \operatorname{ch}\sqrt{-K}u$.

II) Dacă P_0(ordinar) $\in \Sigma$, se consideră pe $\Sigma - \{P_0\}$ fasciculul regulat de geodezice care trec prin

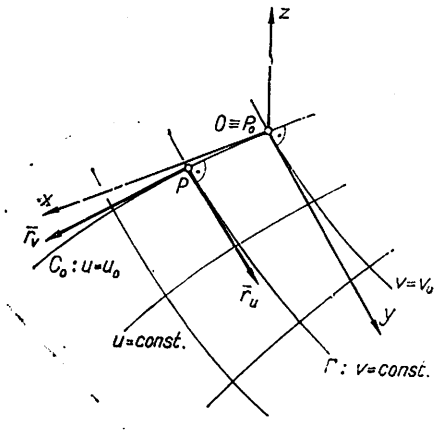


Fig. 75

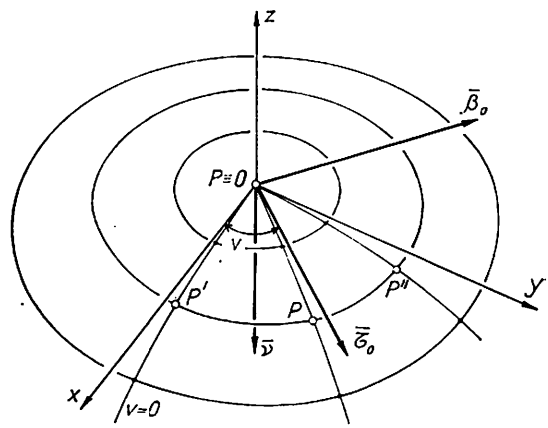


Fig. 76

P_0, traiectoriile ortogonale fiind cercuri geodezice de centru P_0; v e *unghiul polar* (față de o geodezică inițială $v = 0$, numită *axă polară*), iar u e arcul pe v = const., originea arcelor fiind $P_0(u = 0,\ v$ — arbitrar), numit *polul* sistemului de coordonate. E o *rețea semigeodezică polară de coordonate pe S* (fig. 76). Fie $C : v$ = const.; în $P \in C$: $\bar{r}_u = \bar{\tau}$, $\bar{r}_{uu} = d\bar{\tau}/du = \bar{\nu}/\rho = \bar{n}/\rho, \ldots$ iar în $P_0 \in C$: $(\bar{r}_u)_0 = \bar{\tau}_0 = \cos v\,\bar{i} + \sin v\,\bar{j}$, $(\bar{r}_{uu})_0 = \bar{k}/\rho, \ldots$ Deoarece $\bar{r}_0 = \bar{r}(0, v)$, atunci $\bar{r}(u, v) = \bar{r}_0 + \frac{u}{1!}(\bar{r}_u)_0 + \ldots = u(\cos v\,\bar{i} + \sin v\,\bar{j}) + \ldots$; deci $r_v = u(-\sin v\,\bar{i} + \cos v\,\bar{j}) + \ldots$ iar $\sqrt{G} = |\bar{r}_v| = u + \ldots$ și *formulele lui Gauss*:

$$(119''')\qquad (\sqrt{G})_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_0 = 1,\quad \left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial u^3}\right)_0 = -K_0.$$

Obs. $\sqrt{G}$ din (119) joacă rolul razei vectoare în rețeaua semigeodezică polară. Obținem $\sqrt{G} = u - \frac{u^3}{3!}K_0 + \ldots$, deci $ds^2 = du^2 + u^2dv^2 - \frac{u^4}{3}K_0 + \ldots$; ds^2 diferă de metrica euclidiană $du^2 + u^2\,dv^2$ în coordonate polare (u, v) începînd cu termenii de ordin 4. *Obs.* d_1) se menține. d_2) se schimbă astfel: deoarece $\left(\frac{\partial^{2p+1}\sqrt{G}}{\partial u^{2p+1}}\right)_0 = (-K)^p$, $\left(\frac{\partial^{2p}\sqrt{G}}{\partial u^{2p}}\right)_0 = 0$, rezultă $\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}u$; cînd $K<0$, se știe că $\sin\sqrt{K}u = i\,\operatorname{sh}\sqrt{-K}u$, iar cînd $K = 0$, avem $\lim_{K\to 0}\frac{\sin\sqrt{K}u}{\sqrt{K}} = u$.

Apl. Fie rețeaua semigeodezică polară de pol A, axa polară: $v = 0$ fiind geodezica AB (fig. 77). Cu (119), (119'') și $u = u(v)$ din ecuația geodezicei BC:

$$\Omega = -\int_{v=0}^{v=A} dv \int_0^u (\sqrt{G})_{uu}du = \int_0^A dv - \int_0^A (\sqrt{G})_u\,dv = A - \int_0^A (\sqrt{G})_u\,dv.$$

Cu $\theta = (\widehat{\Gamma, BC})$ și (119'): $\int_0^A (\sqrt{G})_u \, dv = -\int_{\pi-B}^{C} d\theta = \pi - (B + C)$, încît

(120') $$\Omega = A + B + C - \pi \quad (Gauss).$$

Obs. a) Cînd $K = \text{const}$, fie $\Sigma =$ aria triunghiului $ABC = \iint d\sigma$; atunci

(120'') $$K\Sigma = A + B + C - \pi.$$

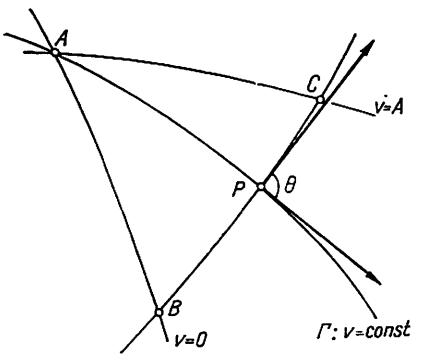


Fig. 77

Deci: *suma unghiurilor unui triunghi geodezic al unei suprafețe cu curbură constantă e mai mare, mai mică sau egală cu 2 unghiuri drepte după cum suprafața e sferică, pseudosferică sau desfășurabilă.* Pentru o sferă S de rază r, excesul sferic al triunghiului ABC e $\varepsilon = A + B + C - \pi$. Dacă $A'B'C'$ e triunghiul polar al triunghiului ABC, excesul său sferic e $\varepsilon' = 2\pi - (l_A + l_B + l_C)$, unde l_A, l_B, l_C sînt lungimile laturilor triunghiului ABC; ε' e *defectul sferic* al triunghiului ABC. b) Fie C un cerc geodezic de centru O și rază r. Elementul de arc al lui C e $\sqrt{G}dv$ iar $u = r$, $v = r\theta$. Deci: un cerc geodezic are lungimea $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dv =$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - r^2 K_0/2 + \ldots) r d\theta = 2\pi(r - r^2 K_0/6 + + \ldots)$$ și aria $a = \iint_D \sqrt{G}\, d\sigma = \int l\, du = 2\pi \int_0^{\pi} (r - r^3 K_0/3 + \ldots) dr = \pi(r^2 - r^4 K_0/12 + \ldots)$.

Rezultă *formula lui Bertrand*: $K_0 = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - l}{r^3}$ și *formula lui Monge*: $K_0 = \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - a}{r^4}$, care dau o interpretare intrinsecă curburii totale.

201 Fie, pe suprafața $S(u^1, u^2)$, paralelogramul infinitezimal $PQRS$, construit în P pe vectorii $\overrightarrow{PQ} = (du^1, du^2)$ și $\overrightarrow{PR} = (\delta u^1, \delta u^2)$; de asemenea, fie vectorul $\bar{v} = (v^1, v^2)$ în P. Să se arate: a) Diferența între valorile componentelor lui $\bar{v}$ în S, cînd acest vector e transportat prin paralelism de-a lungul drumurilor PQS și PRS, e

(121) $$Dv^i = \delta\, dv^i - d\, \delta v^i = R^i_{jkl}\, v^j\, du^k\, du^l \qquad (i, j, k, l = 1, 2),$$

numind *simbolurile lui Riemann de-a doua speță* expresiile

(121') $$R^i_{jkl} = -\frac{\partial \left| \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right|}{\partial u^l} + \frac{\partial \left| \begin{matrix} i \\ j\ l \end{matrix} \right|}{\partial u^k} + \left| \begin{matrix} i \\ r\ k \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} r \\ j\ l \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} i \\ r\ l \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} r \\ j\ k \end{matrix} \right| \text{ cu } R^i_{jkl} + R^i_{jlk} = 0,$$

simbolurile lui Riemann de prima speță fiind

$$R_{ijkl} = a_{si}\, R^s_{jkl} = -\frac{\partial\, |jk, i|}{\partial u^l} + \frac{\partial\, |jl, i|}{\partial u^k} + \left| \begin{matrix} r \\ j\ k \end{matrix} \right| |il, r| - \left| \begin{matrix} r \\ j\ l \end{matrix} \right| |ik, r| =$$

(121'') $$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u^j\, \partial u^k} + \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial u^i\, \partial u^l} - \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial u^i\, \partial u^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u^j\, \partial u^l} + a^{rs}(|jk, r|\, |il, s| - |jl, r|\, |ik, s|)\right] \text{ cu } R_{ijkl} + R_{jikl} = 0.$$

b) Curbura totală K a lui $S(u^1, u^2)$ se exprimă prin una din formulele

(121''') $\quad K = R_{1212},\ EK = R^2_{121},\ FK = R^1_{112} = R^2_{221},\ GK = R^1_{212}$

$$(R_{ijkl} = K(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}),\ R^i_{jkl} = K(\delta^i_k a_{jl} - \delta^i_l a_{jk}))$$

sau

(121^{IV}) $$K = \frac{1}{2\sqrt{\triangle}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FE_v}{\sqrt{\triangle}E} - \frac{\partial G_u}{\sqrt{\triangle}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2F_u}{\sqrt{\triangle}} - \frac{E_v}{\sqrt{\triangle}} - \frac{FE_u}{\sqrt{\triangle}E}\right)\right].$$

R. a) Transportul paralel conduce la componentele $v^i + dv^i + \delta(v^i + dv^i)$ și $v^i + \delta v^i + d(v^i + \delta v^i)$; cu (108^{IV}), adică $dv^i + \begin{vmatrix} i \\ j\ k \end{vmatrix} v^j du^k = 0$, $\delta v^i + \begin{vmatrix} i \\ j\ k \end{vmatrix} v^j \delta u^k = 0$ iar $\delta du^k = d\delta u^k$. Cu (67'), se deduc (121). *Obs.* R^i_{jkl} se mai numesc *componentele* tensorului de curbură *al suprafeței* $S(u^1, u^2)$. b) În R_{1212} se ține seama de (66) și expresia lui K (v. [40], p. 203):

(122) $$K = (DD'' - D'^2)/(EG - F^2) = [2\triangle(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + E(G_u^2 + E_v G_v - 2F_u G_v) + F(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2E_v F_v - 2F_u F_v) + G(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v)]/4\triangle^2.$$

Observăm că $R^i_{jkl} = a^{ir}R_{rjkl}$, $|a^{ij}| = \begin{vmatrix} G/\triangle & -F/\triangle \\ -F/\triangle & E/\triangle \end{vmatrix} = 1/\triangle$; căci $a^{ir}a_{rj} = \delta^i_j$ iar $\triangle = |a_{ij}|$. Pentru (121'^{V}), se fac calculele și se compară cu K.

202 Se numește *suprafață Liouville* o suprafață S a cărei metrică poate fi adusă la forma

(123) $$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2) \text{ cu } U = U(u),\ V = V(v).$$

Se cere: a) Să se dea exemple. b) Să se arate că geodezicele au ecuațiile

(123') $$du/\sqrt{U + a} = \pm\, dv/\sqrt{V - a} + b \quad (a, b\text{-const. de integrare}).$$

c) Să se calculeze unghiurile geodezicelor cu curbele $v = \text{const.}$ d) Să se demonstreze că S admite o rețea izotermă formată din elipse și hiperbole geodezice, și reciproc.

R. a) Planul, suprafețele de rotație, elipsoidul cu axe inegale raportat la liniile sale de curbură. b) Liniile geodezice:

(123'') $$du\,d^2v - dv\,d^2u + \frac{du^2 + dv^2}{2(U + V)}(U'dv - V'du) = 0, \text{ deci } \frac{du^2}{U - a} - \frac{dv^2}{V + a} = a.$$

Obs. Ecuația ($109_3'''$): $d\alpha = (V'du - U'dv)/2(U + V)$ iar ($109_{1,2}'''$): $dv/du = \operatorname{tg}\alpha$, $d^2v/du^2 = (1/\cos^2\alpha)\frac{d\alpha}{du}$; eliminăm pe α. c) $\cos\theta = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}$, $\sin\theta = \sqrt{E}\,\frac{dv}{ds}$, încît din ($123_2''$): $\operatorname{tg}^2\theta = (V + a)/(U - a)$. *Obs.* ($123_2''$) se scrie $U\sin^2\theta - V\cos^2\theta = a$; de unde *teorema Clairaut*: pentru o linie geodezică a unei suprafețe de rotație, sinusul unghiului pe care-l face — într-un punct al suprafeței — o geodezică cu meridianul e invers proporțional cu raza paralelului corespunzător (căci $\sqrt{U}\sin\theta = k$, $k^2 = a > 0$). d) Căci, prin $u_1 = \int\sqrt{U}\,du$, $v_1 = \int\sqrt{V}\,dv$, $\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{U/(U + V)}$, $\cos\frac{\omega}{2} = \sqrt{V/(U + V)}$, metrica lui S devine

(123''') $$ds^2 = du_1^2/\sin^2\frac{\omega}{2} + dv_1^2/\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

Obs. Această proprietate poate fi luată ca definiție.

203 Se numește *aplicabilitate* (sin.: *reprezentare izometrică*) bijecția punctuală între 2 suprafețe S și S' astfel încît, pe 2 curbe corespondente oarecari C și C' (situate respectiv pe S, S'), arcele determinate de 2 perechi de puncte corespondente P_1, P_2 și P_1', P_2' sînt egale; despre S și S' se zice că sînt *suprafețe aplicabile* (sin.: *suprafețe izometrice*) una pe alta. Să se arate: a) Condiția necesară și suficientă ca $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ și $S' : \bar{r}' = \bar{r}'(u', v')$ să fie izometrice e să existe

$$u' = u'(u, v),\ v' = v'(u, v) \text{ cu } J = D(u', v')/D(u, v) \neq 0, \tag{124}$$

soluții ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$E'u_u'^2 + 2F'u_u'v_u' + G'v_u'^2 = E,\ E'u_v'^2 + 2F'u_v'v_v' + G'v_v'^2 = G,$$
$$E'u_u'u_v' + F'(u_u'v_v' + u_v'v_u') + G'v_u'v_v' = F. \tag{124'}$$

b) O suprafață desfășurabilă S se reprezintă izometric pe un plan S'. c) O suprafață S cu curbură constantă e aplicabilă pe ea însăși în o triplă infinitate de moduri. d) O suprafață de rotație S se reprezintă izometric pe ea însăși într-o infinitate de moduri. *Apl.* a) Să se arate, prin calcul, că suprafața S născută de tangentele cubicei $C : x = u, y = u^2, z = 2u^3/3$ e aplicabilă pe plan. b) Să se găsească geodezicele conului $S : x^2 + y^2 - z^2 = 0$, făcînd aplicarea conului pe plan.

R. a) Din $ds'^2 = ds^2$, obținem $E'(u_u'du + u_v'dv)^2 + 2F'(u_u'du + u_v'dv)(v_u'du + v_v'dv) + G'(v_u'du + v_v'dv)^2 = Edu^2 + 2Fdv\ dv + Gdv^2$; cum du, dv sînt arbitrari, deducem (124'). Reciproca e adevărată. *Obs.* a_1) Sistemul (124') e, în general, incompatibil; deci, în general, S și S' nu-s izometrice. a_2) S și S' izometrice au aceeași geometrie intrinsecă, asociindu-li-se același spațiu al lui Riemann V_2. a_3) Dacă S și S' sînt izometrice, avem $K(u, v) = K'(u', v')$; cînd $K = K' \neq 0$, putem defini pe S. S' cîte o familie de curbe α, de-a lungul cărora să avem $K = K' = \alpha$. Luînd traiectoriile ortogonale acestora ca a doua familie β, (124) și (124') devin

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta'(\beta) \text{ și } E' = E,\ F = F' = 0,\ G'\beta_\beta'^2 = G. \tag{124''}$$

Dacă S și S' sînt, inițial, raportate la aceleași coordonate u, v, ele sînt izometrice dacă $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$. a_4) Într-o corespondență de aplicabilitate între S și S', unei curbe C de pe S îi corespunde o curbă C' a lui S', care — în general — nu e congruentă cu C. O relație de congruență între C și C' e posibilă numai cînd C e o linie asimptotică. În general, nu există o pereche de suprafețe aplicabile ale căror linii de curbură să se corespundă în corespondența de aplicabilitate. Există 3 cazuri de excepție: α) *Suprafețele desfășurabile* cu generatoarele în corespondență, liniile de curbură fiind generatoarele și traiectoriile lor ortogonale. Putem realiza aceasta, considerînd 2 curbe arbitrare C, C' în spațiu și stabilind o corespondență între punctele lor astfel încît curburile să fie egale în puncte corespondente; C, C' sînt muchiile de întoarcere ale lui S, S'. β) *Suprafețe Monge*, definite ca loc geometric al pozițiilor unei curbe arbitrare C situată într-un plan tangent la un cilindru, cînd planul tangent se rostogolește fără alunecare pe cilindru (v. probl. 162). γ) *Suprafețele Bonnet*, care sînt suprafețe avînd linii de curbură cu aceeași imagine pe sfera lui Gauss ca și liniile de curbură ale unei suprafețe cu curbură constantă; dacă 2 suprafețe Bonnet sînt aplicabile (cu corespondența liniilor de curbură), imaginea sferică a liniilor de curbură ale uneia din ele coincide cu imaginea sferică a liniilor de curbură ale unei suprafețe de curbură constantă pozitivă, iar imaginea sferică a liniilor de curbură ale celeilalte suprafețe coincide cu imaginea sferică a liniilor de curbură ale unei suprafețe de curbură constantă negativă. Pe două suprafețe riglate S și S' în corespondență de aplicabilitate își corespund în mod necesar, afară de cazul cînd ambele suprafețe sînt aplicabile pe o aceeași cuadrică Q, cînd se poate ca generatoarele lui S să corespundă unei familii de generatoare de pe Q, iar generatoarele lui S' să corespundă celeilalte familii de generatoare de pe Q; liniile de strictiune se corespund. b) Fie $S(u, v)$: $\bar{r} = \bar{r}_0(u) + v\bar{r}_0'(u)$, u fiind arcul curbei de întoarcere $C_0 : v = 0$; S are metrica

$$ds^2 = v^2\,du^2/\rho^2 + (du + dv)^2,\ 1/\rho(u) \text{ fiind curbura lui } C_0.$$

Fie $S'(u', v')$, născută de tangentele la C_0'; dacă C_0' are aceeași curbură $1/\rho$ ca și C_0, S și S' sînt izometrice. În particular, putem considera o curbă plană C_0'; atunci S', cu care e izometrică S, e o porțiune a planului curbei C_0'. Reciproca e adevărată. *Obs.* b_1) (124) se deduce astfel: Luînd $U = \int du/\rho$, $V = u + v$ iar $u(U) = -\alpha$, avem $du'^2 + dv'^2 = (\alpha + V)^2\, dU^2 + dV^2$, adică $du' + i\, dv' = i[(\alpha + V)dU + i\, dV]$, $du' - i\, dv' = [(\alpha + V)dU - i\, dV]/i$; primele părți ale egalității fiind diferențiale totale, avem $[i(\alpha + V)]_V = i\, i_U$, $[(\alpha + V)/i]_V = -i(1/i)_U$, adică $i_V = 0$, $i_U = -ii$ și deci $i = e^{iU}$, încît

$$u' = V \sin U + \int \alpha \cos U\, dU,\ v' = V \cos U - \int \alpha \sin U\, dU.$$

b_2) Geodezicele planului sînt dreptele lui; atunci, determinarea geodezicelor lui S se reduce la determinarea geodezicelor unui plan: se determină geodezicele în desfășurare și se revine la poziția inițială. c) Un punct arbitrar P al lui S și o direcție arbitrară d, asociată lui P, se aplică pe figura formată de un punct arbitrar P' al lui S și o direcție arbitrară d', asociată lui P', iar mulțimea acestor corespondențe de aplicabilitate formează un grup cu 3 parametri. O figură F a unei astfel de suprafețe se poate transporta, prin flexiune, dintr-o regiune Ω a lui S într-o altă regiune Ω' a ei. Reciproca e adevărată. *Obs.* 2 suprafețe S, S' cu aceeași curbură constantă sînt izometrice una alteia; căci ele pot avea metrica și curbura totală (119). Cînd rețeaua semigeodezică e carteziană, deci avem condiția (119'), atunci — după semnul curburii S — e izometrică cu suprafața de metrică $ds^2 = du^2 + dv^2$ (plan), $ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{a}\, dv^2$ (sfera), $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}\, dv^2$ (pseudosfera); căci, pentru $K = 0$: $G = u\, f(v) + g(v)$, pentru $K = 1/a^2 > 0$: $G = f(v) \cos \frac{u}{a} + g(v) \sin \frac{u}{a}$ iar pentru $K = -1/a^2 < 0$: $G = f(v) \operatorname{ch} \frac{u}{a} + g(v) \operatorname{sh} \frac{u}{a}$. d) Fie S de ecuații (6'). Rotind pe S de un unghi α în jurul lui Oz, $P(u, v) \in S$ se rotește în $P'(u', v') \in S$ iar $u' = u$, $v' = v + \alpha$; aceste relații definesc o aplicabilitate, a lui S pe ea însăși, depinzînd de un parametru. *Obs.* d_1) Orice suprafață de rotație admite o simplă infinitate de suprafețe cu care se află în corespondență de aplicabilitate, acestea fiind tot suprafețe de rotație. Căci $ds^2 = [1 + \dot{f}^2(u)]\, du^2 + u^2 dv^2 = [1 + \dot{f}'^2(u')]\, du'^2 + u'^2\, dv'^2 = ds'^2$. Presupunînd că aplicabilitatea păstrează paralelii și meridianele, deci $u' = \varphi(u)$, $v' = \psi(v)$, avem $1 + \dot{f}^2(u) = [1 + \dot{f}'^2(u')]\, \dot{\varphi}(u)$, $u = \dot{\psi}(v)\, u'$; din ultima relație rezultă $u/u' = \dot{\psi} = 1/a$ (const.), adică $u' = au$, $v' = v/a + \alpha$ iar $f'(u') = \int \sqrt{1 + \dot{f}^2(u) - a^2}\, du$. Dacă $a = 1$, obținem aplicabilitatea lui S pe ea însăși. Dacă $a \neq 1$, atunci $\dot{f}^2(u) > a^2 - 1$; de exemplu, cînd $a > 1$ iar P descrie un paralel pe S, corespondentul său P' de pe S' va descrie numai o porțiune din paralelul său și S' se obține din S prin dilatare. d_2) Dacă curbura totală a unei suprafețe S nu e constantă, S poate admite cel mult un grup continuu cu un parametru de aplicabilitate în ea însăși; în acest caz, S e aplicabilă pe o suprafață de rotație ale cărei cercuri paralele corespund unei familii de geodezice paralele de curbură geodezică constantă de pe S. De altfel, suprafețele izometrice cu cele de rotație sînt suprafețe Liouville. *Apl.* a) Ecuațiile lui S fiind $x = u + v/(1 + 2u^2)$, $y = u^2 + 2uv/(1 + 2u^2)$, $z = 2u^3/3 + 2u^2 v/(1 + 2u^2)$, prin $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}$, $V = u + 2u^3/3 + v$, obținem $ds^2 = (V + \alpha)\, dU^2 + dV^2$ cu $\alpha = -\sqrt{2} \operatorname{tg} (\sqrt{2}U)\, [1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 (\sqrt{2}U)]$. b) $ds^2 = 2dr^2 + r^2 d\theta^2 = (\sqrt{2}\, dr + i\, r\, d\theta).(\sqrt{2}\, dr - i\, r\, d\theta)$. Căutînd un factor integrant i încît $i(\sqrt{2}\, dr + ir\, d\theta) = d\Phi$, găsim $i = e^{i\theta/\sqrt{2}}$. Atunci $ds^2 = d(\sqrt{2} re^{i\theta/\sqrt{2}})\, d(\sqrt{2}\, re^{-i\theta/\sqrt{2}}) = d(\sqrt{2}\, r \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} + i\sqrt{2}\, r \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}}) d(\sqrt{2}\, r \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\, r \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}}) = du^2 + dv^2$, cu $u = \sqrt{2}\, r \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}$, $v = \sqrt{2}\, r \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}}$.

Dreapta $v = mu + n$ din planul (u, v) va deveni, pe con, geodezica $\sqrt{2}\, r \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, mr \cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} + n$, deci $r \cos \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2}} = k$.

204 Fiind dată o suprafaţă S, se spune că o suprafaţă S^* e *deformata lui* S dacă S^* e izometrică cu S. Să se determine deformatele lui S. *Apl.* a) Să se determine deformatele planului. b) Să se afle deformatele unei suprafeţe riglate, cînd generatoarele se menţin.

R. Deformatele S^*: $\bar{r}^* = \bar{r}^*(u, v)$ depind de integrarea sistemului

$$\bar{r}_u^{*2} = E,\ \bar{r}_u^* \cdot \bar{r}_v^* = F,\ \bar{r}_v^{*2} = G, \tag{125}$$

care admite soluţii (3 ecuaţii cu o funcţie vectorială necunoscută $\bar{r}^*$). *Apl.* a) S(plan): $ds^2 = du^2 + dv^2$. Ecuaţiile (125) — pentru simplificare, fără asterics —:

$$\bar{r}_u^2 = 1,\ \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0,\ \bar{r}_v^2 = 1, \text{ adică } |jk, i| = 0, \text{ deci şi } \begin{vmatrix} i \\ j \quad k \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţiile (69); $\bar{r}_{uu} = D\bar{n}$, $\bar{r}_{uv} = D'\bar{n}$, $\bar{r}_{vv} = D''\bar{n}$; deci $K = 0$, adică S^* e o suprafaţă desfăşurabilă. *Obs.* ◻ reciproca proprietăţii b) de la problema 203. b) Fie S de ecuaţie (34) şi de metrică (59); putem presupune $L = 1$, încît $P = \cos\theta$. Problema revine la determinarea lui $\bar{r}_0^*$ şi $\bar{a}^*$ prin relaţiile ce definesc pe M, N, P. Renunţînd la asterics şi luînd $\bar{a}(\sin\omega\cos\varphi, \sin\omega\sin\varphi, \cos\omega)$, rezultă $N = \omega'^2 + \sin^2\omega\varphi'^2$, adică $\varphi = \int \sqrt{N - \omega'^2}\, du/\sin\omega$ cu $\omega = \omega(u)$ arbitrar; ceea ce implică alegerea arbitrară a conului director al lui S^*. Însă $\bar{r}_0' = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}' + \nu(\bar{a} \times \bar{a}')$; alegînd $\lambda = \cos\theta$, $\mu = M/N$, $\nu = (\bar{r}_0' \bar{a}\, \bar{a}')/N$ iar $(\bar{r}_0' \bar{a}\, \bar{a}') = \varepsilon\sqrt{N \sin^2\theta + M^2}$ ($\varepsilon = \pm 1$),... Rezultă: fiind date S şi un con director, obţinem 2 deformate S^* şi S_2^*. *Obs.* b_1) S se poate deforma astfel încît liniilor asimptotice ale uneia dintre familii să corespundă liniile asimptotice ale uneia din familii pe S^*, numai dacă S e o suprafaţă riglată, iar asimptotele invariante sînt generatoarele ei. Astfel, realizîndu-se un model flexibil pentru S, e suficient ca acest model să fie îndoit fără întindere şi rupere, menţinînd rigidă o singură generatoare, ca toate celelalte generatoare să rămînă drepte. b_2) Dacă S e suprafaţa riglată generată de binormalele unei curbe în spaţiu, prin deformare, curba însăşi se deformează, păstrîndu-şi torsiunea. b_3) Orice suprafaţă riglată se poate deforma astfel încît generatoarele ei să devină normalele principale ale unei traiectorii ortogonale bine determinate. b_4) O suprafaţă riglată se poate deforma în $0\ \infty^1$ de moduri pentru ca o curbă dată a ei să devină plană.

205 Două suprafeţe S şi $\bar{S}$ sînt *reprezentabile geodezic* una pe cealaltă (sin.: *în corespondenţă geodezică*) dacă punctele lor sînt în corespondenţă biunivocă astfel încît unei geodezice situate pe una din ele să-i corespundă o geodezică pe cealaltă. Să se arate: a) Suprafeţele $S: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ şi $\bar{S}: \bar{\bar{r}} = \bar{\bar{r}}(u, v)$ sînt în corespondenţă geodezică dacă avem *formulele lui Weyl*:

$$\overline{\begin{vmatrix} i \\ j \quad k \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} i \\ j \quad k \end{vmatrix} + \delta_j^i \psi_k + \delta_k^i \psi_j,\quad \psi_k = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\ln\left(\frac{\overline{\Delta}}{\Delta}\right)^{1/6}\right),\ \Delta = EG - F^2,$$

$$\overline{\Delta} = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2. \tag{126}$$

Dacă $\psi_k = 0$, *corespondenţa geodezică* (126) se zice că e *trivială*. b) Dacă S şi $\bar{S}$ sînt în corespondenţă geodezică, atunci putem avea

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,\ d\bar{s}^2 = \rho^2\, ds^2 \text{ cu } \rho = \text{const.}, \tag{126'}$$

cînd *suprafețele* S *și* $\bar{S}$ *sînt omotetice*, sau

$$ds^2 = \alpha\frac{B-A}{B}du^2 + \beta\frac{A-B}{A}dv^2,\quad d\bar{s}^2 = \alpha A^2(B-A)du^2 + \beta B^2(A-B)dv^2, \tag{126''}$$

cu α și A funcții numai de u, iar β și B funcții numai de v.

R. Luînd $u^1 = u$, $u^2 = v$, geodezicele lui S și $\bar{S}$ sînt date de

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right| \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = 0,\quad \frac{d^2u^i}{d\bar{t}^2} + \overline{\left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right|} \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Prin schimbarea de parametru $\bar{t} = \varphi(t)$ în ecuațiile geodezicelor lui S, cînd $\frac{du^i}{dt} = \frac{du^i}{d\bar{t}}\varphi'$, $\frac{d^2u^i}{dt^2} = \frac{d^2u^i}{d\bar{t}^2}\varphi'^2 + \frac{du^i}{dt}\varphi''$, aceste ecuații sînt aceleași cu ale lui $\bar{S}$ dacă avem $\left(\overline{\left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right|} - \left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right|\right)\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} - \frac{\varphi''}{\varphi'^2}\frac{du^i}{d\bar{t}} \equiv 0$; primul termen al acestei relații nu poate fi proporțional cu $\frac{du^i}{d\bar{t}}$ decît dacă avem (126_1) iar $2\varphi_k\,du^k - d\ln\varphi' = 0$. Deci, dacă se ia un φ_k, putem determina pe fiecare geodezică a lui S un nou parametru $\bar{t}$ astfel ca ele să coincidă cu ale lui $\bar{S}$. Cum $\left|\begin{matrix} i \\ i\ k \end{matrix}\right| = \frac{\partial}{\partial u^k}(\ln\sqrt{\Delta})$, $\overline{\left|\begin{matrix} i \\ i\ k \end{matrix}\right|} = \frac{\partial}{\partial u^k}(\ln\sqrt{\bar{\Delta}})$, din (126_1) — făcînd $i = j$ și sumînd—rezultă (126_2), adică $\varphi_k = \ln\left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^{1/6}$ (derivă dintr-un potențial). *Obs.* Dacă $S \equiv \bar{S}$, după *H. Weyl*, transformarea (126) se numește *transformarea proiectivă a conexiunii* $\Gamma^i_{jk} = -\left|\begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix}\right|$ a lui S. În acest caz, dacă $\varphi_k = 0$, atunci $\bar{t} = at + b$ $(a, b$ — const.); se spune că t e *parametrul afin* al conexiunii Γ^i_{jk} (asociat prin ecuațiile geodezicelor, abstracție făcînd de o afinitate). b) Pe S și $\bar{S}$ se introduce o rețea ortogonală comună; atunci sistemul (126_1) se scrie

$$\bar{E}_u/2\bar{E} = E_u/2E + 2\psi_1,\quad \bar{E}_v/2\bar{E} = E_v/2E + \psi_2,\quad \bar{G}_u/2\bar{E} = G_u/2E,$$

$$\bar{E}_v/2\bar{G} = E_v/2G,\qquad \bar{G}_u/2\bar{G} = G_u/2G + \psi_1,\quad \bar{G}_v/2\bar{G} = G_v/2G + 2\psi_2. \tag{126'''}$$

Din ecuațiile $(126'''_{2,5})$ obținem $\bar{E} = AEe^{2\psi}$, $\bar{G} = BGe^{2\psi}$ cu $\psi = \ln(\bar{\Delta}/\Delta)^{1/6}$; deci $\bar{\Delta}/\Delta = ABe^{4\psi}$, adică $\psi = \ln(AB)^{1/2}$ iar $\psi_1 = A'/2A$, $\psi_2 = B'/2B$, încît $\bar{E} = A^2BE$, $\bar{G} = AB^2G$. Din $(126'''_{3,4})$ rezultă $AB'E + B(A-B)E_v = 0$, $A'BG + A(B-A)G_u = 0$. Dacă $A = B = k$ (const.), luînd $\rho^2 = k^3$ obținem (126'); caz banal, corespondența geodezică fiind trivială. Dacă $A \neq B$, obținem (126''). *Obs.* În ambele cazuri, restul ecuațiilor $(126'''_{1,6})$ sînt verificate.

Spunem că o *suprafață* S e *de categoria* m $(0 \leqslant m \leqslant 2)$ dacă printre componentele ψ_i, pe rețeaua ortogonală comună lui S și S, $2 - m$ sînt nule. Fie S *de a doua categorie*; schimbînd variabilele astfel încît $\psi = -\frac{1}{2}\ln(uv)$, rezultă *teorema lui U. Dini*: *Dacă 2 suprafețe* S *și* $\bar{S}$ *sînt în corespondență geodezică și* S *e de a doua categorie, putem avea*

$$ds^2 = (v-a)[a_1(u)du^2 + a_2(v)dv^2],\quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\left[\frac{1}{u}a_1(u)du^2 + \frac{1}{v}a_2(v)dv^2\right],$$

S și $\bar{S}$ *fiind suprafețe Liouville. Obs.* b_1) Dacă $\bar{S}$ admite o reprezentare geodezică netrivială pe S raportată la o rețea izotermă, S și $\bar{S}$ sînt suprafețe Liouville; căci $E = G$ conduce la $\alpha = -1/A$,

$\beta = 1/B$. b_2) S e cu curbură constantă dacă $a_1 = c/u^3$, $a_2 = -c/v^3$ (c-const.), cînd $K = 1/4c$, $\overline{K} = 0$. Presupunem că S *e de prima categorie*; de exemplu, fie $\psi_2 = 0$, adică $B = k$ (const.). Schimbînd variabilele, rezultă *teorema*: *Dacă 2 suprafețe S și $\overline{S}$ sînt în corespondență geodezică și S e de prima categorie, putem avea*

$$ds^2 = du^2 + \lambda(u)dv^2, \quad d\bar{s}^2 = k^3[du^2 + \lambda(1 - \lambda)dv^2]/(1 - \lambda)^2,$$

S și $\overline{S}$ fiind suprafețe de rotație. Obs. b_3) Dacă S admite o reprezentare geodezică netrivială pe S raportată la o rețea semigeodezică, S și $\overline{S}$ sînt suprafețe de rotație; căci $E = 1$ dacă $B = k\varphi = k/(k - A)$. b_4) S e cu curbură constantă dacă $\lambda = \cos^2 \frac{u}{a}$ $\lambda = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}$ sau $\lambda = u^2$; în primele cazuri: $K = 1/a^2$ sau $K = -1/a^2$ iar $\overline{K} = 0$, în ultimul caz: $K = 0$ iar $\overline{K} = -1/k^3$. Să considerăm că S *e de categoria zero*; deci $A = k_1$, $B = k_2$. Avem *teorema*: *Dacă S și $\bar{S}$ sînt 2 suprafețe în corespondență geodezică trivială, metricele lor pot fi aduse la formele canonice* (126), *cînd S și $\overline{S}$ sînt omoletice, sau la formele canonice*

$$ds^2 = a_1(u)du^2 + a_2(v)dv^2, \quad d\bar{s}^2 = k_1k_2[k_1a_1(u)du^2 + k_2a_2(v)dv^2],$$

cînd S și $\overline{S}$ sînt suprafețe desfășurabile. Rezultă: *Suprafețele cu curbură constantă sînt reprezentabile geodezic pe plan*; de asemenea: *Dacă S admite o reprezentare geodezică pe o suprafață S cu curbură constantă, S e tot o suprafață cu curbură constantă (teorema lui Beltrami).*

206 Fie S elicoidul (15''). Se cere: a) Să se calculeze curburile totală și medie. b) Să se arate dacă liniile coordonate pot fi linii de curbură. c) Să se demonstreze că un elicoid e izometric cu o suprafață de rotație (*teorema lui Bour*). d) Să se afle elicoizii pentru care una sau ambele familii de linii asimptotice sînt linii coordonate; în aceste cazuri, să se arate că S e riglat, fiind generat de o dreaptă care se sprijină pe axa de rotație. e) Să se găsească elicoidul desfășurabil. În acest caz: e_1) să se afle curba de întoarcere; e_2) să se calculeze razele de curbură principale și curbura medie ale lui S. f) Să se determine elicoidul riglat care e suprafață minimă. În acest caz: f_1) să se arate că S e generat de normalele principale la elicea circulară (18); f_2) să se găsească a treia formă fundamentală a lui S; f_3) să se calculeze razele principale de curbură; f_4) să se găsească tangentele principale și liniile de curbură, aflîndu-se razele de curbură ale liniilor de curbură care trec prin origine; f_5) să se calculeze curbura geodezică de-a lungul elicelor $u =$ = const.; f_6) să se arate că de-a lungul unei geodezice

(127) $\sqrt{u^2 + a^2} \sin \alpha = \text{const.}$, α — unghiul geodezicei cu generatoarea;

f_7) să se determine o suprafață de rotație pe care S e aplicabilă.

R. a) $E = 1 + f'^2, F = kf', G = u^2 + k^2, D = uf''/\sqrt{\triangle}, D' = -k/\sqrt{\triangle}$, $D'' = u^2f'/\sqrt{\triangle}$; deci

$$K = \frac{u^3f'f'' - k^2}{[u^2(1 + f'^2) + k^2]^2}, \quad H = \frac{(1 + f'^2)u^2f' + 2k^2f' + (u^2 + k^2)uf''}{2[u^2(1 + f'^2) + k^2]^{3/2}}. \tag{128}$$

b) Nu; căci $F = D' = 0$ cînd $k = 0$ (S suprafață de rotație). *Obs.* Liniile de curbură pot fi luate ca linii coordonate, însă ecuațiile lui S nu mai sînt (15''). c) Deoarece $ds^2 = \triangle du^2/G + G(dv + Fdu/G)^2$ și luînd

$$U = \sqrt{G} = \sqrt{u^2 + k^2}, \quad V = v + \int (F/G)du = v + \int kf'du/(u^2 + k^2), \tag{129}$$

metrica lui S se scrie

$$ds^2 = [U^2 + (U^2 - k^2)f'^2]\, dU^2/(U^2 - k^2) + U^2\, dV^2. \tag{129'}$$

Deci S e aplicabil pe suprafața de rotație $\bar{S}$:

(130) $\quad x = U\cos V, y = U\sin V,\ z = \psi(U) = \int \sqrt{[k^2 + (U^2 - k^2)f'^2]/(U^2 - k^2)}\,dU.$

Obs. Elicele $u = \text{const.}$ de pe S au drept corespondente paralele $U = \text{const.}$ ale lui $\bar{S}$. d) Liniile asimptotice: $uf''du^2 - 2k\,du\,dv + u^2f'dv^2 = 0$. $\Gamma: v = \text{const.}$ sînt linii asimptotice dacă $f'' = 0$, adică $f(u) = mu + n$. $\Gamma': u = \text{const.}$ sînt linii asimptotice dacă $f' = 0$, adică $f(u) = n$; în acest caz, avem și $v = \text{const.}$ Însă Γ sînt dreptele $x/\cos v = y/\sin v = [z - (n + kv)]/m = u$; deci S e riglată. În poziția corespunzătoare unghiului $v = 0$, generatoarea Γ_0 are ecuațiile $z = mx + n$, $y = 0$, fiind în planul Oxz. Reciproc, $\Gamma_0: v = 0$ de pe S, deci $\Gamma_0: r(u) = u\bar{i} + f(u)\bar{k}$, e o dreaptă (în Oxz) dacă $f(u) = mu + n$. *Obs.* d_1) Putem avea $0 \in \Gamma_0$, deci $n = 0$, printr-o translație de-a lungul lui Oz. d_2) $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sînt linii asimptotice cînd generatoarele sînt perpendiculare pe axa de rotație; ceea ce înseamnă $m = 0$, S fiind *elicoidul Kästner*. e) Din $K = 0$, cu $g = f'$, obținem $g\,dg = k^2\,du/u^3$, adică $g^2 = -k^2/u^2 + C$; rezultă $f = \int \frac{t}{u}\frac{t\,dt}{Cu} = t - k\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{k}$. Luînd $C = k^2/a^2$, găsim

(130 a) $\quad x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = k\left(\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} + v\right);$

prin transformarea

(130′) $\quad U = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a},\ V = v - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a},$

obținem că S are ecuațiile

(130 b) $\quad x = a(\cos V - U\sin V),\ y = a(\sin V - U\cos V),\ z = k(U + V).$

e_1) Generatoarele g sînt liniile asimptotice (confundate), date de ecuația diferențială $dv = adu/u\sqrt{u^2 - a^2}$; obținem g: $V = v - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} = C$, adică $g: x = a(\cos C - U\sin C)$, $y = a(\sin C + U\cos C)$, $z = k(U + C)$, fiind tangente la elicea Γ_0: $U = 0$ $(u = a)$ de pe S, care e curbă de întoarcere. *Obs.* $\bar{N}$ e paralel cu o direcție fixă dacă $\sin v - \sqrt{u^2 - a^2}\cos v/a = \alpha u$, $\cos v + \sqrt{u^2 + a^2}\sin v/a = \beta u$; însă $\alpha^2 + \beta^2 = 1/a^2$, încît putem lua $\alpha = \sin C/a$, $\beta = \cos C/a$, deci $(a\operatorname{tg} v - \sqrt{u^2 - a^2})/(a + \sqrt{u^2 - a^2}\operatorname{tg} v) = \operatorname{tg} C$, adică $\operatorname{tg}(v - C) = \sqrt{u^2 - a^2}/a$ (generatoarele lui S). Deci $\bar{N} = u(k\sin C\,\bar{i} - k\cos C\,\bar{j} + a\bar{k})/a.a_2$) Cum $K = 0$, rezultă $1/R_1 = 0$, $1/R_2 = 2H = k/\sqrt{(a^2 + k^2)(u^2 + k^2)}$. f) Avem $H = 0$ dacă $(1 + f'^2)f'u^2 + 2k^2f' + (u^2 + k^2)uf'' = 0$. Fie elicoidul riglat pentru care $f'' = 0$; deci $f' = m$; atunci $m[(1 + m^2)u^2 + 2k^2] = 0$, care nu admite decît soluția reală $m = 0$, adică $f = n$. Obținem elicoidul Kästner (16′); căci, printr-o translație, putem avea $n = 0$. f_1) Pentru elicea (18) avem $\bar{\tau} = \bar{r}'$, $\bar{\beta} = \bar{r}' \times \bar{r}''$, $\bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}$, încît ecuațiile normalei principale: $x/\cos v = y/\sin v = (z - kv)/0$ generează elicoidul (16′). f_2) $K = -k^2/(u^2 + k^2)^2$, $H = 0$; după (87): $ds^{*2} = -K ds^2$. f_3) După (75): $1/R_1 = -1/R_2 = k/(u^2 + k^2)$. f_4) Ecuația (90): $du^2 - (u^2 + k^2)dv^2 = 0$; de unde $\frac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2 + k^2}$. Direcția tangentei: $d\bar{r} = \left(\bar{r}_u\frac{du}{dv} + \bar{r}_v\right)dv$; deci vectorul director al tangentei principale: $\bar{r}_u\frac{du}{dv} + \bar{r}_v = \left(\pm\sqrt{u^2 + k^2}\cos v - u\sin v\right)\bar{i} + \left(\pm\sqrt{u^2 + k^2}\sin v + u\cos v\right)\bar{j} + k\bar{k}$. Liniile de curbură: $v = \pm\ln\left(u + \sqrt{u^2 + k^2}\right) + C$ sau $u = \pm k\operatorname{sh}(v - v_0)$. Cele 2 linii de curbură, care trec prin $O(u = v = 0)$, se obțin pentru $v_0 = 0$; deoarece $1/\rho^2 = (1 + \operatorname{ch}^2 \varepsilon v)/2k^2\operatorname{ch}^2 \varepsilon v$, ele au aceeași rază de curbură, egală cu k. f_5) Cum $\begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = -u$, găsim (v. probl. 182) $1/\rho_2 = u/(u^2 + k^2)$. f_6) Pentru g: $v = \text{const.}$: $\bar{t}_g = \bar{r}_u$ iar pentru geodezica G: $v = v(u)$: $\bar{t}_G = (\bar{r}_u + \bar{r}_v v')/|\bar{r}_u + \bar{r}_v v'|$; deci $\sin\alpha = |\bar{t}_g \times \bar{t}_G| = \sqrt{\triangle v'}/\sqrt{E + Gv'^2}$. Cum

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = -u,\ \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = \frac{u}{u^2 + k^2},\ \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuația (109′) se scrie: $v'' + 2uv'/(u^2+k^2) + uv'^3 = 0$ sau $(w = 1/v'^2): \dfrac{dw}{du} - 4uw/(u^2+k^2) = 2u$ cu $w = C(u^2+k^2)^2 - (u^2+k^2)$. Scoțînd de aici pe v' și introducîndu-l în sinα, obținem (127). *Obs.* Cu $w = \lambda(u^2+k^2): \dfrac{d\lambda}{du} = 2u/(u^2+k_1^2)^2$, adică $\lambda = -1/(u^2+k^2) + a$; deci $dv = du/\sqrt{w} = du/\sqrt{(u^2+k^2)[a(u^2+k^2)-1]}$; punînd $\rho^2 = (u^2+k^2)/k^2$, avem $du/\sqrt{u^2+k^2} = -d\rho/\rho\sqrt{1-\rho^2}$, adică ($C_1 = 1/ak^2$)

$$dv = -C_1\, d\rho/\sqrt{(1-\rho^2)(1-C_1^2\rho^2)} \text{ sau } C_2 - v/C_1 = \int_0^\rho d\rho/\sqrt{(1-\rho^2)(1-C_1^2\rho^2)}.$$

Deci: integrarea ecuației geodezicelor se face cu ajutorul funcțiilor eliptice. f₇) Deoarece $f(u) = 0$, obținem pentru S de ecuații (130) că $\psi(U) = k \ln\left(U + \sqrt{U^2-k^2}\right)\bar{S}$, adică e un *catenoid*. *Obs.* α) Generatoarelor lui S le corespund meridianele lui $\bar{S}$, iar elicelor lui S corespunzîndu-le paralele lui $\bar{S}$. β) Elicoidul riglat S e izometric cu 2 suprafețe de rotație $\bar{S}$: hiperboloidul cu o pînză (generatoarelor lui S corespunzîndu-le generatoarele lui $\bar{S}$) și catenoidul (ale cărei meridiane sînt transformatele afine ale lănțișorului într-o afinitate omologică ortogonală a cărei axă e directoarea lănțișorului; transformata $y = ka \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$, $k > 1$, e *lănțișorul alungit*), după cum S e oblic sau drept.

207 Să se demonstreze *teorema lui Bonnet* (sin.: *problema formelor*): Două forme pătratice, dintre care una e definită pozitiv,

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad (\triangle = EG - F^2), \tag{131}$$

$$\Phi_2 = \mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + G\,dv^2,$$

pot fi considerate ca prima și a doua formă fundamentală ale unei suprafețe S, abstracție făcînd de o transformare ortogonală, dacă coeficienții lor satisfac *ecuația lui Gauss*

$$\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2 = K(EG - F^2) \tag{131′}$$

și *ecuațiile lui Codazzi*

$$\mathrm{D}_v - \mathrm{D}'_u = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \mathrm{D} + \left(- \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \mathrm{D}' - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{D}'',$$

$$\mathrm{D}'_v - \mathrm{D}''_{u_2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \mathrm{D} + \left(- \begin{vmatrix} 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \mathrm{D}' - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{D}'', \tag{131″}$$

și invers. *Apl.* a) Curbura totală a pînzei Σ_i a evolutei unei suprafețe S, raportată la liniile de curbură, e

$$K_i = -\frac{1}{R_i - R_j} \frac{\partial R_j/\partial u}{\partial R_i/\partial u} \; (i \neq j;\ i, j = 1, 2); \text{ deci } K_1 K_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \; (\textit{Halphon}).$$

b) Pentru o suprafață W, asimptoticele pe cele 2 pînze ale evolutei se corespund și reciproc (*Ribaucour*), iar fiecare pînză a evolutei e aplicabilă pe o suprafață de rotație (*Weingarten*).

R. Fiind date formele (131), există un vector $\bar{r}(u, v)$ satisfăcînd

$$\text{a) } E = \bar{r}_u^2,\ F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v,\ G = \bar{r}_v^2;\ \text{b) } \bar{n} = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)/\sqrt{\triangle};$$

$$\text{c) } D = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uu})/\sqrt{\triangle},\ \mathrm{D}' = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uv})/\sqrt{\triangle},\ \mathrm{D}'' = (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vv})/\sqrt{\triangle}. \tag{131‴}$$

Folosind derivatele ecuației $(131'''_a)$, sistemul se rezolvă în raport cu derivatele de ordin 2, obținînd ecuația (69); prin derivarea ecuației $(131'''_b)$, se obțin ecuațiile (69'). (69) + (69') constituie un sistem de ecuații cu derivate parțiale liniare în $\bar{r}$ și $\bar{n}$, care e complet integrabil dacă

$$(131'^{V}) \qquad \bar{r}_{uuv} = \bar{r}_{uvu},\ \bar{r}_{uvv} = \bar{r}_{vvu},\ \bar{n}_{uv} = \bar{n}_{vu}.$$

Obținem astfel un sistem de 9 relații între coeficienții celor 2 forme fundamentale, numite *condiții de integrabilitate* ale ecuațiilor fundamentale (69)+(69'). De exemplu, ecuația (131^{IV}_1) arată că $(\bar{r}_{uu})_v = (\bar{r}_{uv})_u$ cu $\bar{r}_{uu}$, $\bar{r}_{uv}$, $\bar{r}_{vv}$ din (69); efectuînd calculele, apar iar $\bar{r}_{uu}$, $\bar{r}_{uv}$, $\bar{r}_{vv}$, $\bar{n}_u$, $\bar{n}_v$; ținînd seama de (69) + (69'), obținem $\alpha\bar{r}_u + \beta\bar{r}_v + \gamma\bar{n} = 0$; de unde, triedrul T: $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{n}$ fiind nedegenerat, rezultă 3 condiții de integrabilitate: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Cele 9 condiții de integrabilitate nu sînt independente; ele se reduc la ecuațiile (131') și (131''). *Obs. a)* Ecuațiile (131'') se pot pune sub forma (*E. Study*)

$$(131^{V}) \qquad D_v - D'_u = H(E_v - F_u) - \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} E & E_u & D \\ F & F_u & D' \\ G & G_u & D'' \end{vmatrix},\quad D'_v - D''_u = H(F_v - G_u) -$$

$$- \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} E & E_v & D \\ F & F_v & D' \\ G & G_v & D'' \end{vmatrix},$$

iar, cînd S e raportată la liniile de curbură:

$$(134^{VI}) \quad \text{a)} \quad \begin{aligned} D_v &= \left(D + \frac{F}{G}D''\right)(\ln\sqrt{E})_u \\ D''_v &= \left(\frac{G}{E}D + D''\right)(\ln\sqrt{G})_u \end{aligned} \qquad \text{sau b)} \quad \begin{aligned} &\left(\frac{1}{R_1}\right)_v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(\ln E)_v = 0 \\ &\left(\frac{1}{R_2}\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(\ln G)_u = 0 \end{aligned}$$

Pentru o suprafață minimă, raportată la liniile de curbură, ecuațiile Codazzi devin $D_v = 0$, $D''_u = 0$. b) Ținînd seama în $D_v - D'_u$ și $D''_u - D'_v$ de (68), (69') și (66), rezultă (131''); căci $D_v - D'_u = (\bar{n}\cdot\bar{r}_{uu})_v - (\bar{n}\cdot\bar{r}_{uv})_u = \bar{n}_v\cdot\bar{r}_{uu} - \bar{n}_u\cdot\bar{r}_{uv}$, ... Cînd (69) + (69') sînt complet integrabile, integrala generală depinde de 4 constante arbitrare; căci putem lua arbitrar într-un punct valorile lui $\bar{r}$, $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ și $\bar{n}$. Astfel, putem face ca S definită de soluția $\bar{r}(u, v, C_1, \ldots, C_4)$ să treacă prin $P_0(u_0, v_0)$ dat; atunci $\bar{r}_{u_0}$, $\bar{r}_{v_0}$ satisfac condițiile $E_0 = \bar{r}^2_{u_0}$, $F_0 = \bar{r}_{u_0}\cdot\bar{r}_{v_0}$, $G_0 = \bar{r}^2_{v_0}$ iar $\bar{n}$ e dat de $\bar{n}_0 = \bar{r}_{u_0} \times \bar{r}_{v_0}/\sqrt{\Delta_0}$. Deci: *o suprafață integrală S a sistemului* (69) + (69'), *care trece prin* P_0, *depinde de 3 constante arbitrare*. Făcînd încă o transformare liniară de coordonate u, v, putem face ca să avem $E_0 = G_0 = 1$, $F_0 = 0$ astfel încît, luînd ca axe ortogonale x, y tangentele la $v = v_0$ și $u = u_0$ iar ca axă z normala în P_0 la S, să avem $\bar{r}_{u_0} = \bar{i}$, $\bar{r}_{v_0} = \bar{j}$, $\bar{n}_0 = \bar{k}$; atunci

$$S: \bar{r}(u, v) = u\,\bar{i} + v\,j + \ldots,$$

fiind complet determinată. *Obs.* Ecuațiile fundamentale (69) + (69') sînt, pentru o suprafață S în spațiul euclidian R^3, ceea ce sînt ecuațiile Serret-Frenet pentru o curbă plană sau în spațiu. Dacă se consideră dată numai prima formă Φ_1, coeficienții D, D', D'' ai formei a doua Φ_2 sînt dați de ecuațiile (131') și (131''). Scoțînd pe D'' din (131') și înlocuindu-l în (131''), rezultă că D și D' sînt dați de 2 ecuații cu derivate parțiale de primul ordin, admițînd soluții; deci: *o formă pătratică definită pozitiv poate fi considerată totdeauna ca metrica unei suprafețe S. Apl.* a) Fie S de ecuație (13); conform formulelor lui Redrigues, avem $\bar{r}_u + R_1\bar{n}_u = 0$ de-a lungul lui C_1: $v = \text{const.}$ și $\bar{r}_v + R_2\bar{n}_v = 0$ de-a lungul lui C_2: $u = \text{const.}$ Fie (v. probl. 174) pînza Σ_1: $\bar{r}_1 = \bar{r} + R_1\bar{n}$. Atunci $\bar{r}_{1u} = R_{1u}\bar{n}$, $\bar{r}_{1v} = (1 - R_1/R_2)\bar{r}_v + R_{1v}\bar{n}$ încît $E_1 = R^2_{1u}$, $F_1 = R_{1u}\cdot R_{1v}$, $G_1 = R^2_{1v} + G(1 - R_1/R_2)^2$, deci $ds^2_1 = dR^2_1 + G(1 - R_1/R_2)^2\,dv^2$; $\bar{n}_1 = \bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v}/\sqrt{\Delta_1} = -\bar{r}_u/\sqrt{E}$, $\bar{n}_{1u} = -r_{uu}/\sqrt{E} + E_u\bar{r}_u/2E\sqrt{E}$, $\bar{n}_{1v} = -r_{uv}/\sqrt{E} + E_v\bar{r}_u/2E\sqrt{E}$ încît, cu $(134^{VI}\ b_2)$, $D_1 = \sqrt{E}R_{1u}/R_1$, $D' = 0$, $D'' = -GR_{2u}/\sqrt{E}$. Pentru pînza Σ_2 înlocuim pe u și v între ei. b) În condițiile aplicației a), avem $D_1/D_2 = D''_1/D''_2$ (căci $D'_i = 0$; $i = 1, 2$) dacă și numai dacă $D(R_1, R_2)/D(u, v) = 0$, deci $R_i = R_i(R_j)$; atunci metrica lui Σ_i e de forma $ds^2_i = dR^2_i + f_i(R_i)dv^2$ a unei suprafețe de rotație.

208 Să se arate că metrica unei suprafeţe S cu curbură medie constantă, raportată la liniile de curbură, e

$$ds^2 = e^{2\lambda}\,(du^2 + dv^2), \tag{132}$$

unde $\lambda = \lambda(u, v)$ e o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\Delta\lambda + a^2e^{2\lambda} - b^2e^{-2\lambda} = 0 \quad \left(\Delta \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \text{ } \textit{operatorul Laplace}; \text{ } a, b \text{ const.}\right) \tag{132'}$$

Apl. a) Condiţia necesară şi suficientă ca S să fie o suprafaţă minima e ca matrica

(133) $ds_1^2 = \sqrt{-K}\,ds^2$ (K-curbura totală, ds^2 — metrica relative la S) să fie o metrică euclidiană. b) Să se găsească condiţia ca o suprafaţă riglată S să fie o suprafaţă minimă.

R. Fie $E = G = e^{2\lambda}$, $F = D' = 0$; atunci $K = -e^{-2\lambda}\,\Delta\lambda$, $H = (D + D'')/2e^{2\lambda} = a$ (const.). Ecuaţiile (131^v): $D_v = 2ae^{2\lambda}\lambda_v$, $D_u'' = 2ae^{2\lambda}\lambda_u$; integrînd şi cum $D + D'' = 2ae^{2\lambda}$, rezultă $D = ae^{2\lambda} + b$, $D'' = ae^{2\lambda} - b$ (b—const.). Atunci (131') ia expresia (132'). *Obs.* Printr-o schimbare de variabile, putem presupune $b = 1$; căci $D \neq D''$. *Apl.* a) S e o suprafaţă minima dacă $a = 0$; ecuaţia (132'): $\Delta\lambda = b^2e^{-2\lambda}$. Însă $K = -b^2e^{-4\lambda}$, adică $e^{2\lambda} = b/\sqrt{-K}$; deci $ds_1^2 = b\,(du^2 + dv^2)$. *Obs.* a_1) Ecuaţia (132'): $\Delta \ln \sqrt{-K} + 2b\sqrt{-K} = 0$. a_2) Dacă $a \neq 0$, prin $\bar{u} = \sqrt{|a|}\,u$, $\bar{v} = \sqrt{|a|}\,v$, a vem $a = 1$; ecuaţia (132'): $\Delta\lambda = 2 \operatorname{sh} 2\lambda$. b) Dacă S de ecuaţie (34) are metrica (59''), atunci $K = (M^2 - N)/(1 + 2Mv + Nv^2)^2$. Deci metrica (133) are coeficienţii $E_1 = \sqrt{M^2 - N}$, $F_1 = 0$, $G_1 = \sqrt{M^2 - N}/(1 + 2Mv + Nv^2)$, încît $K_1 = -G_{1u}[\ln(G_{1u}/\sqrt{\Delta_1})]_u/2\Delta_1$. Însă $K_1 = 0$ numai dacă M şi N sînt constante, cînd S e elicoidul lui Kästner. De altfel, generatoarele g şi traiectoriile lor ortogonale C sînt linii asimptotice ale lui S; deci, planul osculator în P la C fiind tangent la S şi conţinînd pe g (din P), g e normala principală în P la C; rezultă că una oarecare din curbele C e o curbă Bertrand, cu o infinitate de curbe asociate (toate celelalte curbe C); înseamnă că C sînt elice circulare, încît (v. şi probl. 206 f_1): *dintre toate suprafeţele riglate, singura suprafaţă minima (diferită de un plan) e elicoidul drept cu plan director (teorema Meusnier-Catalan).* *Obs.* b_1) Toate suprafeţele riglate aplicabile pe elicoidul riglat de arie minimă sînt formate cu binormale de curbe cu torsiune constantă. b_2) Suprafeţele riglate care sînt aplicabile pe suprafeţe de rotaţie sînt fie deformate ale elicoidului riglat de arie minimă, fie deformate ale hiperboloidului de rotaţie cu o pînză.

209 Se spune că o reţea de curbe coordonate ale unei suprafeţe S e o *reţea Cebîşev* dacă vectorul tangent al unei curbe coordonate se transportă prin paralelism de-a lungul celeilalte curbe coordonate. Să se demonstreze: a) Pentru ca o reţea de curbe coordonate să formeze o reţea Cebîşev, e necesar şi suficient să avem

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{134}$$

sau ca metrica suprafeţei S să fie de forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2. \tag{134'}$$

b) Curbura totală a suprafeţei S de metrică (134') e dată de

$$K = -\theta_{uv}/\sin\theta. \tag{134''}$$

c) Pentru ca o reţea conjugată să fie o reţea Cebîşev, e necesar şi suficient ca reţeaua să fie situată pe o suprafaţă de translaţie; atunci

$$(D_v\ /D'')_v = (D_u''/D)_u. \tag{134'''}$$

R. a) Conform aplicației (108'''), versorul $\bar{u}$ ($u^1 = 0$, $u^2 = 1/\sqrt{G}$) tangent lui $u = \text{const.}$, respectiv versorul $\bar{v}$ ($v^1 = 1/\sqrt{E}$, $v^2 = 0$) tangent lui $v = \text{const.}$, se transportă prin paralelism de-a lungul curbei $v = \text{const.}$, respectiv $u = \text{const.}$, dacă

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} du = 0, \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ respectiv } \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) + \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} dv = 0;$$

de unde rezultă (134). De asemenea, rezultă că

$$E_v = 0, \quad G_u = 0. \tag{134^{IV}}$$

Luînd $U = \int \sqrt{E(u)}\, du$, $V = \int \sqrt{G(v)}\, dv$ iar $\cos\theta = u.v = F/\sqrt{EG}$, obținem (134'). *Obs.* a_1) $2\triangle \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = GE_v - FG_u = 0$, $2\triangle \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = -FE_v + EG_u = 0$ admite numai soluția (134^{IV}). a_2) Interpretarea geometrică a lui θ: e unghiul dintre coordonate. a_3) Fie patrulaterul ABCD determinat de $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$ și $v = v_2$ (fig. 78); cum pentru $u = \text{const.}$: $ds = \sqrt{G}\, dv$ iar pentru $v = \text{const.}$: $ds = \sqrt{E}\, du$, obținem arc AB = arc CD = $= v_2 - v_1$ și arc AC = arc $BD = u_2 - u_1$. Considerînd metrica (134'), obținem

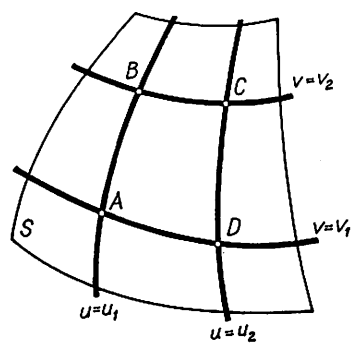


Fig. 78

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = \operatorname{ctg}\theta\,\theta_u, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = -\theta_v/\sin\theta,$$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = -\theta_u/\sin\theta, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} = \operatorname{ctg}\theta\,\theta_v;$$

de unde rezultă că avem (134). În acest caz, ecuațiile (108''') se scriu

$$da + a\begin{vmatrix} 1 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} du + b\begin{vmatrix} 1 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} dv = 0, \quad db + a\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} du + b\begin{vmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{vmatrix} dv = 0.$$

Dacă $(a, b) = \bar{u}$, rezultă $dv = 0$, $G = \text{const.}$, iar dacă $(a, b) = \bar{v}$, atunci $du = 0$, $E = \text{const.}$ b) Se folosește formula (122). c) În ecuațiile (69) + (69') : D, D', D'' sînt arbitrari. Cu $D' = 0$ și (134), ecuația (69$_2$) : $\bar{r}_{uv} = 0$ și $\bar{r} = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v)$; ecuațiile (131'') : $D_v - D''\theta_u/\sin\theta = 0$, $D''_u - D\theta_v/\sin\theta = 0$, condiția de compatibilitate $\theta_{uv} = \theta_{vu}$ punîndu-se sub forma (134''').

13. METODA TRIEDRULUI MOBIL

210 Dacă, în punctul (ordinar) P al unei curbe $C : u = u(s)$, $v = v(s)$ de pe o suprafață $S : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$, θ e unghiul dintre normala principală la C și normala la S iar $1/T$ e torsiunea lui C, cantitatea

$$\frac{1}{\tau_g} = -\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{T} \tag{135}$$

se numește *torsiunea geodezică* (sin. : *torsiunea relativă*) a lui C în P. Se cere : a) Să se calculeze torsiunea geodezică a lui C în P. b) Să se arate că 2 curbe C_i ($i = 1, 2$), în contact în P, au aceeași torsiune geodezică în P.

c) Să se determine curbele de pe S în lungul cărora torsiunea geodezică e nulă. *Apl.* a) Să se calculeze curbura, torsiunea și torsiunea geodezică a unei curbe C situată pe o sferă de rază 1. b) Dacă ω e unghiul format de tangenta în P la curba C de pe o suprafață S și tangenta în punctul corespunzător P^* la indicatoarea ei sferică C^*, atunci $\operatorname{tg}\omega = -\rho_n/\tau_g$.

R. a) Pentru triedrul $D - R$ (triedrul Darboux-Ribaucour): $\bar{\tau}, \bar{g}, \bar{n}$ (fig. 79) avem

$$(136)\qquad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{g}/\rho_g + \bar{n}/\rho_n,\ \frac{d\bar{g}}{ds} = -\bar{\tau}/\rho_g - \bar{n}/\tau_g,\ \frac{d\bar{n}}{ds} = -\bar{\tau}/\rho_n + \bar{g}/\tau_g.$$

Din (136_3) obținem $1/\tau_g = \bar{g}\cdot\frac{d\bar{n}}{ds} = (\bar{n}\times\bar{\tau})\cdot\frac{d\bar{n}}{ds} = \left(\bar{n}\times\frac{d\bar{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d\bar{n}}{ds}$, adică

$$(135')\qquad ds^2/\tau_g = (\bar{n}\ d\bar{r}\ d\bar{n}).$$

Însă $(\bar{n}\,d\bar{r}\,d\bar{n}).(\bar{n}\,\bar{r}_u\,\bar{r}_v) = -\mathrm{D}(ds^2, \Phi)/\mathrm{D}(u, v)$; deci

$$(135'')\qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{\tau_g} = \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} : (E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

Deoarece $(\bar{n}\,d\bar{r}\,d\bar{n})^2 = ds^2\,ds^{*2} - \Phi^2$, avem și

$$(135''')\qquad ds^2/\tau_g = \sqrt{ds^2\,ds^{*2} - \Phi^2}.$$

Luînd originea în P și raportînd pe S la liniile de curbură, atunci

$E = 1,\ F = 0,\ G = 1,\ \mathrm{D} = r = 1/R_1,\ \mathrm{D}' = 0,\ \mathrm{D}'' = t = 1/R_2$ iar $1/\tau_g = \frac{dx\,dy}{ds^2}(1/R_1 - 1/R_2)$;

dacă tangenta în P la C face unghiul φ cu o direcție principală, atunci $dx/ds = \cos\varphi$, $dy/ds = \sin\varphi$, încît obținem *formula lui Bonnet*

$$(135^{IV})\qquad 1/\tau_g = \frac{1}{2}(1/R_2 - 1/R_1)\sin 2\varphi.$$

b) Din (135'') rezultă că torsiunea geodezică depinde numai de direcția tangentei în P la C. c) Sînt liniile de curbură ale lui S; în acest caz, din (135) deducem $\theta = \int_{s_0}^{s} ds/T + \text{const.}$, adică (v. probl. II, 156): *normalele la S în lungul unei linii de curbură admit înfășurătoare* (generează o suprafață desfășurabilă). *Obs.* Valorile extreme (maximă, minimă) ale lui τ_g se numesc *torsiuni principale*; ele corespund valorilor $\varphi = \pi/4$ și $\varphi = 3\pi/4$. Avem: *torsiunile principale sînt opuse și corespund bisectoarelor unghiurilor formate de tangentele principale.* Numind *linie de torsiune* o curbă în lungul căreia torsiunea geodezică e extremă, avem: *liniile de torsiune formează o rețea ortogonală care bisectează rețeaua liniilor de curbură.* *Apl.* a) Din $1/\rho_n = \cos\theta/R$ și $\rho_n = 1$ rezultă $R = \cos\theta$. Cum C e linie de curbură (fiind pe o sferă), din (135) obținem $1/T = d\theta/ds$. Deoarece $1/\rho_g = \sin\theta/R$, deducem $1/\rho_g^2 = 1/R^2 - 1$. b) C^* se găsește pe sfera $S^*: \bar{r}^* = \bar{n}$. Dar $\cos\omega = d\bar{r}.\,d\bar{n}/|d\bar{r}|\,|d\bar{n}| = -\Phi\,ds\,ds^*$, deci $\operatorname{tg}\omega = -\sqrt{ds^2 ds^{*2} - \Phi^2}/\Phi$ iar $1/\rho_n = \Phi/ds^2$, $1/\tau_g$ din (135''').

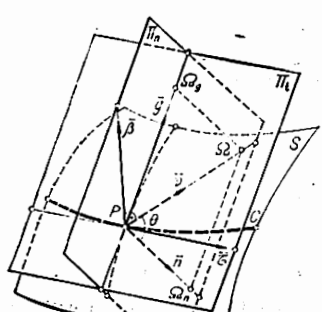


Fig. 79

211 Să se demonstreze: a) Locul punctelor inflexionare ale geodezicelor unei suprafețe S sînt liniile asimptotice ale lui S. b) Dacă o geodezică e totodată linie asimptotică, ea e o dreaptă. *Apl.* Să se găsească condițiile ca o suprafață S să fie riglată.

R. a) Cum $d\bar{\tau}/ds = \bar{\nu}/R$, ecuația (136_1) : $\bar{\nu}/R = \bar{g}/\rho_g + \bar{n}/\rho_n$; dacă P e punct staționar $(1/R = 0)$ pentru geodezice C $(1/\rho_g = 0)$, avem — în P — $1/\rho_n = \Phi/ds^2 = 0$, adică : *pentru geodezica prin P tangentă unei direcții asimptotice (din P) punctul P e un punct de inflexiune. Obs.* $P \in C$ e punct de inflexiune dacă $d^2\bar{r} \times d\bar{r} = 0$; de unde obținem ecuațiile geodezicelor sau ecuațiile liniilor asimptotice, după cum această condiție e înmulțită scalar cu $\bar{N}$, respectiv cu $\bar{r}_u$ (sau $\bar{r}_v$). b) Dacă $1/\rho_g = 0$ (C e geodezică) și $1/\rho_n = 0$ (C e linie asimptotică), atunci $d\tau/ds = \bar{\nu}/R = 0$, adică C e o dreaptă. *Obs.* Dacă $\theta = 0$ (C e geodezică) și $1/\tau_g = 0$ (C e linie de curbură), din (135) rezultă $1/T = 0$, adică C e o curbă plană. c) Luînd generatoarele drept curbe $v = \text{const.}$, atunci obținem condițiile $D = 0$, $\begin{vmatrix} 2 \\ 1\ 1 \end{vmatrix} = 0$.

212 Să se stabilească pentru curbura normală o formulă analoagă cu formula lui Bonnet, iar pentru torsiunea geodezică o formulă analoagă cu formula lui Euler.

213 Pe elipsoidul de rotație $S : x^2 + y^2 + z^2/4 - 1 = 0$ se consideră curba $C : x = \frac{1}{2} \sin 2u,\ y = \sin^2 u,\ z = 2 \cos u$. Se cere, în punctul curent P al lui C : a) să se determine versorii triedrului $D-R$; b) să se calculeze curbura normală, curbura geodezică și torsiunea geodezică.

214 Să se determine torsiunea geodezică a liniilor coordonate.

215 Fie o curbă C pe o suprafață S; dacă, în $P \in C$, φ e unghiul tangentei lui C cu o direcție principală, se cere : a) Cînd C e o linie asimptotică pe S, să se deducă formula lui Enneper (89) cu ajutorul formulei lui Bonnet (135^{IV}). b) Să se demonstreze că între curbura normală, curbura medie și torsiunea geodezică avem relația $1/\rho_n = H + \operatorname{ctg} 2\varphi/\tau_g$.

216 Într-un punct al suprafeței S se consideră $n \geqslant 2$ drepte tangente, unghiul a 2 drepte consecutive (oarecari) fiind egal cu π/n. Să se arate că suma torsiunilor geodezice corespunzătoare celor n drepte e nulă.

217 Se cere unghiul ω a 2 linii conjugate de pe o suprafață S.

218 În spațiul euclidian $R^3(x, y, z)$, trei familii de suprafețe depinzînd (fiecare familie) de un parametru constituie un *sistem triplu ortogonal* dacă prin fiecare punct al lui R^3 trece o singură suprafață din fiecare familie și două suprafețe oarecare (aparținînd la familii diferite) se taie ortogonal. Să se arate : a) Dacă prin $P \in R^3$ trec 3 suprafețe S_i iar $C_i = S_j \cap S_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq k)$, atunci C_i are aceeași torsiune geodezică $1/\tau_{g_i}$ în raport cu ambele suprafețe S_j și S_k. b) Curbele după care se taie suprafețele unui sistem triplu ortogonal sînt linii de curbură pentru aceste suprafețe (*teorema Dupin*). c) Fiind dată o suprafață S, ea poate aparține într-o infinitate de feluri unui sistem triplu ortogonal. d) Printr-o inversiune, liniile de curbură se păstrează. *Apl.* Se cere condiția necesară și suficientă ca familiile

$$S_i : F_i(x, y, z) = u_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{137}$$

să formeze un sistem triplu ortogonal. b) Cuadricele homofocale formează un sistem triplu ortogonal. c) Fie familia de suprafețe $S_1 : x(x^2 + y^2 + z^2) + C_1 y^2 = 0$. Să se arate că există o familie de sfere S_2 care taie ortogonal, în fiecare din punctele sale, pe S_1 ce trece prin acel punct. Să se găsească familia de suprafețe S_3 care să formeze cu S_1 și S_2 un sistem triplu ortogonal. d) Să se determine liniile de curbură ale suprafeței $S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2/a + y^2/b + z^2/c$ $(a > b > c)$.

R. a) Cînd S_j și S_k se taie de-a lungul lui C_i sub unghiul ω, atunci $\varphi_k - \varphi_j = \omega$, adică $d\varphi_j = d\varphi_k$; încît, din (135), rezultă $(1/\tau_{\sigma i})_{S_j} = (1/\tau_{\sigma i})_{S_k}$. *Obs.* Dacă C_i e linie de curbură pe S_i, deci dacă $(1/\tau_{\sigma i})_{S_j} = 0$, atunci $(1/\tau_{\sigma i})_{S_k} = 0$, adică C_i e linie de curbură și pe S_k (*teorema Joachimisthal*). b) Cînd $\omega = \pi/2$, după (135[IV]) cu $\varphi_k = \varphi_j + \pi/2$, rezultă și $(1/\tau_{\sigma i})_{S_k} = -(1/\tau_{\sigma i})_{S_j}$; deci $1/\tau_{\sigma i} = 0$, adică C_i e linie de curbură pe S_j și S_k. c) Se ia pentru una din familiile sistemului triplu ortogonal familia de suprafețe paralele cu cea dată S (v. probl. 173), iar pentru celelalte 2 familii ale sistemului se consideră cele 2 familii de suprafețe desfășurabile generate de normalele la S în lungul liniilor de curbură ale lui S. d) Rezultă în virtutea faptului că inversiunea păstrează unghiurile; deci: *într-o transformare prin inversiune, un sistem triplu ortgonal se transformă în alt sistem triplu ortogonal, iar* (după teorema Dupin) *liniile de curbură ale acestor suprafețe în liniile de curbură ale suprafețelor transformate.* *Apl.* a) Fie

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2, u_3) \tag{137'}$$

o soluție a sistemului (137). Cînd $S_i \ni P_0$, atunci $u_i = F_i(P_0)$; invers, pentru $u_i = u_i^0$, avem cîte o suprafață din fiecare familie, trecînd prin P_0 dat de $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$. Deci: *parametrii* u_1, u_2, u_3 *sînt coordonate ale punctelor din spațiul* R^3, *numite coordonate curbilinii în spațiu*; trecerea de la coordonatele carteziene ($x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$) la cele curbilinii ($u^1 = u$, $u^2 = v$, $u^3 = w$) și invers e dată de (137) și (137'). Fie 2 puncte $P(x, y, z)$ și $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$; distanța dintre ele e

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = a_{ij}\, du^i\, du^j, \text{ cu } a_{ij} = \bar{r}_{ui} \cdot \bar{r}_{uj} \ (a_{ij} = a_{ji}). \tag{137''}$$

Dacă luăm $u_i = \text{const.}$ (i fix), relația (137'') ne dă metrica lui $S_i : F_i(x, y, z) = \text{const.}$, u_j și u_k fiind *coordonatele curbilinii pe* S_i. Deci u_j și u_k sînt coordonate ortogonale pe S_i dacă și numai dacă

$$a_{jk} = 0 \ (j \neq k). \tag{137'''}$$

Obs. Din $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} = 0$ și $S\left(\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\right) = 2(\bar{r}_{u_1 u_2} \cdot \bar{r}_{u_3} + \bar{r}_{u_2 u_3} \cdot \bar{r}_{u_1} + \bar{r}_{u_3 u_1} \cdot \bar{r}_{u_2}) = 0$, rezultă $\bar{r}_{ui\,uj} \cdot \bar{r}_{uk} = 0$. Din sistemul $a_{ik} = \bar{r}_{ui} \cdot \bar{r}_{uk}$, $a_{jk} = \bar{r}_{uj} \cdot \bar{r}_{uk} = 0$, $\bar{r}_{ui\,uj} \cdot \bar{r}_{uk} = 0$, deoarece $\bar{r}_{uk} \neq 0$, obținem $D_k' = |\bar{r}_{ui}\, \bar{r}_{uj}\, \bar{r}_{ui\,uj}| = 0$. Deci, pe S_k: $u_k = \text{const.}$, avem $D_k' = 0$; adică: u_i și u_j formează pe S_k o rețea ortogonală și conjugată (rețeaua liniilor de curbură). b) Fie cuadricele homofocale (99). Prin P_0 trec 3 cuadrice din familie, perpendiculare 2 cîte 2. Căci, din $P_0 \in$ (99), obținem

$$f(\lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) - x_0^2(b - \lambda)(c - \lambda) - y_0^2(a - \lambda)(c - \lambda) - z_0^2(a - \lambda)(b - \lambda) = 0;$$

presupunînd $c < b < a$, avem $f(-\infty) > 0$, $f(c) < 0$, $f(b) > 0$, $f(a) < 0$, adică ecuația $f(\lambda) = 0$ are 3 rădăcini reale: $\lambda_1 < c$, $c < \lambda_2 < b$, $b < \lambda_3 < a$. Cum π_i (planul tangent în P_0 la S_i): $x_0 x/(a - \lambda_i) + y_0 y/(b - \lambda_i) + z_0 z/(c - \lambda_i) - 1 = 0$, iar din $\pi_i - \pi_j = 0$ rezultă $x_0^2/(a - \lambda_i)(a - \lambda_j) + y_0^2/(b - \lambda_i)(b - \lambda_j) + z_0^2/(c - \lambda_i)(c - \lambda_j) = 0$, obținem că $\pi_i \perp \pi_j$. Cu teorema Dupin: *liniile de curbură ale unei cuadrice sînt intersecțiile ei cu cuadricele confocale.* c) Diferențiind ecuația lui S_1 și eliminînd pe C_1, obținem ecuația cu diferențiale totale a lui S_1: $\bar{N}_1 \cdot d\bar{r} = y(3x^2 + y^2 + z^2)\,dx - 2x(x^2 + z^2)\,dy + 2xyz\,dz = 0$, unde $\bar{N}_1$ e normala la S_1 (C_1 fiind eliminat) iar $d\bar{r}(dx, dy, dz)$ e o direcție tangentă la S_1. Suprafețele ortogonale lui S_1 sînt definite prin ecuația cu derivate parțiale $y(3x^2 + y^2 + z^2)\,p - 2x(x^2 + z^2)\,q - 2xyz = 0$ ($p = z_x$, $q = z_y$) și generate de curbele Γ: integralele sistemului diferențial $dx/y(3x^2 + y^2 + z^2) = -dy/2x(x^2 + y^2) = dz/2xyz$; integrale prime: $x^2 + y^2 + z^2 = Cz$, $2x^2 + y^2 = C'z^2$. Deci: ecuația generală a suprafețelor care taie ortogonal pe S_1 e $x^2 + y^2 + z^2 = z\Phi((2x^2 + y^2)/z^2)$, Φ fiind funcție arbitrară. Cînd $\Phi = \text{const.}$, obținem sfere S_2: $x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z$; ele sînt suprafețele integrale ale ecuației cu diferențiale totale $\bar{N}_2 \cdot d\bar{r} = 2xz\,dx + 2yz\,dy + (z^2 - x^2 - y^2)\,dz = 0$. S_3, avînd normala $\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$, sînt definite de ecuația cu diferențiale totale $\bar{N}_3 \cdot d\bar{r} = 2x(x^2 - z^2)\,dx + y(y^2 + 3x^2 - z^2)\,dy + 2z)(2x^2 + y^2)\,dz = 0$; luînd $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, această ecuație se scrie $(2dX + dY)/(2X + Y) = 2(dX + dY + dZ)/(X + Y + Z)$, admițînd integrala generală $(X + Y + Z)^2 = C_3(2X + Y)$. Deci S_3: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = C_3(2x^2 + y^2)$. d) Fie familia de suprafețe $F(\lambda) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^2 - [x^2/(a + \lambda) + y^2/(b + \lambda) + z^2/(c + \lambda)]$. Prin orice $P_0 \in R^3$ trec 3 suprafețe reale; căci ecuația $F(\lambda) = 0$ admite 3 rădăcini: $-a \leq \lambda_1 < -b < \lambda_2 < -c < \lambda_3 < +\infty$. Suprafețele $F(\lambda) = 0$ și $F(\mu) = 0$ sînt ortogonale, adică $N(\lambda) \cdot N(\mu) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^3 - (x^2 + y^2 + z^2)\,\Sigma[x^2/(a + \lambda) + x^2/(a + \mu)]/2 + \Sigma[x^2/(a + \lambda)(a + \mu)]/4 = 0$; căci în punctul P comun avem $F(\lambda) - F(\mu) = k\,\Sigma\, x^2/(a + \lambda)(a + \mu) = 0$ iar $\Sigma\, x^2/(a + \lambda) = \Sigma\, x^2/(a + \mu) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$. Aplicăm teorema Dupin. În particular, liniile de curbură ale lui S sînt intersecțiile ei cu conurile pătratice $x^2/a(a + \lambda) + y^2/b(b + \lambda) + z^2/c(c + \lambda) = 0$.

14. PROBLEME DIVERSE

219 Fie suprafaţa $S: x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$. Se cere: a) Să se calculeze lungimea arcului curbei $v = au$, cuprins între intersecţiile acestei curbe cu curbele $u = 1$ şi $u = 2$. b) Să se calculeze curbura secţiunii normale duse prin $P(u = v = 1)$ corespunzătoare tangentei în P la curba $v = u^2$. c) Să se afle curburile secţiunilor principale în P şi să se scrie ecuaţiile tangentelor principale (în P). d) Să se determine curburile totală şi medie ale lui S.

220 Fie S elicoidul riglat (16'). Se cere: a) Să i se determine linia de strictţiune, parametrul de distribuţie şi formula lui Chasles. b) Să se afle perimetrul şi unghiurile triunghiului curbiliniu format de curbele $v = 1$, $u = \pm kv^2/2$. c) Să se găsească familia traiectoriilor ortogonale familiei de curbe $C: \mathrm{d}u = \sqrt{u^2 + k^2}\,\mathrm{d}v$. d) Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu determinat de curbele $u = \pm kv$ şi $v = 1$. e) Să se afle curba Γ (de pe S) loc al punctelor de contact ale planelor tangente la S, paralele cu bisectoarea triedrului format de părţile pozitive ale axelor de coordonate. f) Să se scrie metrica suprafeţei Σ generată prin rotirea curbei Γ în jurul axei Oz.

221 Se consideră paraboloidul $S: xy = az$. Se cere: a) Să se determine muchia de întoarcere a suprafeţei desfăşurabile Σ circumscrisă lui S în lungul intersecţiei lui cu cilindrul $x^2 = by$. b) Să se găsească liniile conjugate curbelor C situate pe S de-a lungul cărora produsul razelor principale de curbură e constant. c) Să se afle, în vîrful lui S, curburile totală şi medie ale lui S.

222 Să se determine linia de strictţiune, parametrul de distribuţie şi formula lui Chasles pentru suprafaţa riglată S: a) $\bar{r} = u(\cos v\,\bar{i} + \sin v\,\bar{j}) + (u + \cos v)\,\bar{k}$; b) $x = a\cos v - u\sin v$, $y = a\sin v + u\cos v$, $z = hv$.

223 Să se determine punctele de pe $S: x = u^2$, $y = uv$, $z = 2u + v^2$ ale căror plane tangente trec prin dreapta $\mathrm{d}: x/2 = y/5 = (z-1)/14$.

224 Fie punctele $P_1(2, 6)$, $P_2(-1, 3)$ şi $P_3(0, 2)$ situate pe suprafaţa $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 2u^{3/2}/3$. Să se calculeze unghiurile triunghiului curbiliniu $P_1P_2P_3$, ştiind că P_1P_2 e un arc de pe curba $v = u + 4$, P_2P_3 arc pe curba $v = -u + 2$ iar P_3P_1 arc pe curba $v = u^2 + 2$.

225 Fie suprafaţa elicoidală $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + av$. Se cere: a) Unghiul liniilor coordonate care trec prin $P_0(u = 1, v = \pi/2)$. b) Expresia analitică a versorului normalei în P_0. c) Liniile conjugate de-a lungul cărora $2/u + v = k$. d) Simbolurile lui Christoffel. e) Curburile totală şi medie ale suprafeţei S.

226 Fie suprafaţa $S: x = u$, $y = uv$, $z = v^2$. Se cere: a) Să se determine punctul de contact al planului tangent perpendicular pe direcţia $\triangle$ (2, 2, 1). b) Să se găsească curba, de pe S, loc geometric al punctelor de contact al planelor tangente paralele cu direcţia $\triangle$. c) Să se arate că S e o suprafaţă cubică riglată şi să se afle linia de strictţiune. d) Să se găsească liniile de curbură ale lui S.

227 Pe suprafaţa $S: x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au$ se consideră familia de curbe $v = u^2 + \lambda$. Se cere: a) Să se determine curbele ortogonale

acestei familii. b) Să se afle curbura secţiunilor normale în $P \in S$. c) Să se arate că curbura secţiunilor normale în punctele situate pe curba $u = k$, după tangentele la această curbă, e constantă. d) Să se calculeze curburile principale în $P_0(1, 0)$ şi să afle ecuaţiile tangentelor principale. e) Să se arate că, în orice $P \in S$, una din secţiunile principale e o dreaptă. f) Să se găsească liniile de curbură ale lui S. g) Să se arate că S e o suprafaţă desfăşurabilă. h) Să se afle geodezicele.

228 Cînd P descrie planul $\pi : x + y + z - 1 = 0$, înfăşurătoarea planului ABC, unde A, B, C sînt proiecţiile lui P pe axele de coordonate (triortogonale), e o suprafaţă Steiner.

229 Fie $S : \bar{r} = (u + v^2)\,\bar{i} + (v + u^2)\,\bar{j} + uv\,\bar{k}$. Să se afle : a) Planul tangent în origine. b) Liniile asimptotice şi liniile de curbură ale suprafeţei.

230 Să se găsească curburile totală şi medie ale suprafeţei obţinută prin rotirea astroidei în jurul axei de simetrie ce trece prin unul din punctele ei de întoarcere. Suprafaţa are puncte singulare?

231 Se consideră reprezentarea sferică în care se înlocuiesc normalele suprafeţei S prin normalele la secţiunile normale C_n. Fie $\triangle s$ lungimea unui arc PP' al curbei C_n, $\triangle\theta$ unghiul normalelor lui C_n în P şi P', iar $\triangle\varphi$ unghiul planului secţiunii cu un plan de secţiune fix ; atunci (după formula lui Euler) : $\frac{d\theta}{ds} = \sin^2\varphi/R_1 + \cos^2\varphi/R_2$. Se trasează un cerc geodezic în jurul lui P, deci $ds = \Sigma d\varphi$, ε fiind raza cercului (foarte mică, presupusă constantă). Aproximînd aria domeniului de pe S prin aria unui cerc de rază ε, aria imaginii de pe sferă, de rază unitate, e o calotă de arie $2\pi h$, iar $h = 1 - \cos\theta \to d\theta^2/2$. Numind *curbura lui Bacaloglu* (1859) :

$$K_B = \frac{\text{aria imaginii}}{\text{aria calotei lui } S} = \int \frac{1}{2}\,d\theta^2 \Big/ \int \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi/R_1 + \cos^2\varphi/R_2)\,d\varphi,$$

atunci $K_B = 3/8R_1^2 + 1/4R_1R_2 + 3/8R_2^2 = (3H^2 - K)/2$.

232 Să se afle perimetrul şi unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele $C_1 : u = 1$, $C_2 : v + 1 = 0$ şi $C_3 : v = u$ pe suprafaţa $S : x = u$, $y = u + v$, $z = u + v^2$. Să se arate că S e o suprafaţă desfăşurabilă.

233 Fie $S : x = f_1(u, v)/f_4(u, v)$, $y = f_2(u, v)/f_4(u, v)$, $z = f_3(u, v)/f_4(u, v)$, unde f_i sînt polinoame de grad egal sau inferior lui $2 (i = 1, 2, 3, 4)$. Să se arate că, în general : a) S e o suprafaţă algebrică de grad 4 ; să se studieze cazurile cînd conicele $f_i(u, v) = 0$ au unul, două sau trei puncte comune, respectiv n-au nici un punct comun. b) Orice plan taie pe S după o cuartică unicursală ; cînd planul e tangent la S, cuartica degenerează în 2 conice. *Apl.* a) Fie $S : x = u^2$, $y = uv$, $z = v^2 + 2u$. Atunci : a_1) S e o suprafaţă cuartică ; b) orice plan tangent la S taie pe S după 2 parabole. b) Fie S cu $f_i = a_iuv + b_iu + c_iv + d_i$; atunci S e cuadrică riglată, fiind un paraboloid cînd $a_4d_4 - b_4c_4 = 0$.

234 Normala în P la $S : x^2 + y^2 + z^2 = x\,f(y/x)$ intersectează planul Oxy într-un punct egal depărtat de origine şi de P.

235 Să se arate că suprafeţele $xy - az = \alpha$, $\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = \beta$ şi $\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = \gamma$ formează un sistem triplu ortogonal.

236 Să se determine *linia singulară* (locul punctelor singulare) a suprafeţei S : a) $x = a\cos^3 u \cos v, y = a\cos^3 u \sin v, z = a\sin^3 u$; b) $4x^3z - 3x^2y^2 - 6xyz + 4y^3 + z^2 = 0$; c) $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a\left(\cos u + \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)$.

237 Lungimile α, β, γ ale segmentelor determinate pe axele de coordonate de planul tangent în punctul curent al suprafeţei Lamé (48″) verifică relaţia $(\alpha/a)^{m'} + (\beta/b)^{m'} + (\gamma/c)^{m'} = 1$ cu $m' = m/(1 - m)$.

238 Să se determine înfăşurătoarea familiei de suprafeţe Lamé (48″), ştiind că parametrii a, b, c sînt coordonatele punctului curent al suprafeţei Lamé $(x/\alpha)^n + (y/\beta)^n + (z/\gamma)^n = 1$ (α, β, γ — constante).

239 Fie o familie de plane $\pi_\alpha : \bar{r} \cdot a(\alpha) = p(\alpha)$ depinzînd de un parametru α ; presupunem că această familie nu e un fascicul de plane paralele. Să se arate : a) Dacă $(\bar{a}\ \bar{a}'\ \bar{a}'') \neq 0$, înfăşurătoarea familei π_α e o suprafaţă generată de tangentele unei curbe strîmbe sau un con ; dacă însă $(\bar{a}\ \bar{a}'\ \bar{a}'') = 0$, înfăşurătoarea e un cilindru sau, cînd familia e un fascicul de plane concurente, degenerează într-o dreaptă (axa fasciculului π_α). b) Raza de torsiune a curbei de întoarcere a înfăşurătoarei e dată de $\frac{a^2}{\tau} = \frac{(a\ a'\ a'')}{\Delta}$ cu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}$ iar $\bar{a}(A, B, C)$ şi $p = -D$. *Apl.* $\pi_\alpha : x\cos\alpha + y\sin\alpha + az = f(\alpha)$; să se arate că înfăşurătoarea taie sub un unghi constant planul Oxy.

240 Fie înfăşurătoarea S a familiei $z + vy = (v - x)[f'(v) - g'(v)] - 2[f(v) + g(v)]$, unde v e un parametru. Se cere : a) Să se determine $f(v)$ şi $g(v)$ astfel încît curbele $vx = \lambda$, $v + x = \mu(1 - vx)$ să fie conjugate pe S. b) Pentru S astfel determinată, să se afle liniile asimptotice.

241 Fie concoidul $z = f(y/(x - az))$. Să se arate : a) admite parametrizarea $x = u$, $y = v(u - af(v))$, $z = f(v)$; b) curba de strictiune are ecuaţiile parametrice $x = a(f(v) + vf'(v))$, $y = av^2f'(v)$, $z = f(v)$.

242 Orice direcţie e perpendiculară pe imaginea sferică a direcţiei sale conjugate.

243 Fie familia de curbe $f(u, v) = C$ pe o suprafaţă S ; să se arate că condiţia necesară şi suficientă pentru ca aceste curbe să fie geodezic paralele e ca $f(u, v)$ să satisfacă ecuaţia $Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2 = EG - F^2$.

244 Dacă pe o suprafaţă există 2 fascicule de geodezice astfel ca geodezicele unui fascicul să taie sub un unghi constant pe cele ale celuilalt fascicul, suprafaţa e desfăşurabilă (*Liouville*).

245 Să se găsească, plecînd de la ecuaţiile lui Codazzi, suprafeţele care au liniile de curbură izoterme.

246 Condiţia necesară şi suficientă ca liniile asimptotice ale unei suprafeţe S să constituie o reţea Cebîşev e ca S să fie pseudosferică.

247 Fiind dat un sistem de coordonate u, v pe o suprafaţă S, să se găsească condiţiile pe care trebuie să le satisfacă transformarea (2) pentru ca u', v' să fie o reţea Cebîşev.

248 Scriind că tangenta la locul descris de centrul de curbură coincide cu normalele suprafeţei, ecuaţia care dă razele principale de curbură e $(\bar{r}_u - \bar{n}_u\ \bar{r}_v - \bar{n}_v\ \bar{n}) = 0$. *Apl.* pentru elicoidul (16′).

249 Dacă normalele la o suprafaţă S, de-a lungul unei curbe C, sînt paralele, punctele curbei C sînt puncte parabolice ale suprafeţei S.

250 Fie suprafaţa lui Dini (v. probl. 144). Se consideră cazul cînd curbele $v = \text{const.}$ sînt linii de curbură; atunci: a) celelalte linii de curbură sînt $\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + kv = \text{const.}$; b) formula lui Euler se scrie

$$1/\rho_n = 2 \sin (u + \varphi) \sin (u - \varphi)/\sqrt{a^2 + k^2} \sin 2u.$$

251 Dacă cercurile geodezice de speţa a doua ale unei suprafeţe S sînt totodată cercuri geodezice de prima speţă, atunci S e o suprafaţă cu curbură constantă.

252 Să se arate că elicoidul $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = a\left(\ln \frac{u}{a} + v\right)$ e aplicabil pe suprafaţa de rotaţie $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = a\sqrt{2} \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2})$.

253 Suprafaţa generată prin rotirea curbei lui Delaunay în jurul bazei sale e o suprafaţă de rotaţie de curbură medie constantă.

254 Pentru ca o suprafaţă S să fie riglată e necesar şi suficient ca: a) normala în punctul curent al fiecăreia din liniile asimptotice ale uneia din cele 2 familii să rămînă paralelă cu un plan fix (diferit, în general, de la o linie la alta); b) imaginile sferice ale liniilor asimptotice aparţinînd unei familii să fie cercuri mari.

255 Pentru ca suprafaţa S_1 generată de normalele unei suprafeţe S, în lungul unei curbe C, să admită pe C drept linie de strictiune, e necesar şi suficient ca C să fie linie asimptotică a lui S. Să se determine parametrul de distribuţie al suprafeţei S_1.

256 Dacă pentru curbele uneia din familiile unei reţele izoterme curbura geodezică e constantă, aceeaşi proprietate o au şi curbele celeilalte familii şi metrica suprafeţei poate fi adusă la forma

$$ds^2 = (du^2 + dv^2)/[U(u) + V(v)]^2.$$

257 Se numeşte *forma lui Ricci* a unei suprafeţe S forma $K\,ds^2$, unde K e curbura totală iar ds^2 e metrica lui S. Să se determine condiţia pentru ca formele $e^{a-f}(du^2 + dv^2)$, $e^a(du^2 + dv^2)$ să fie respectiv metrica şi forma lui Ricci ale unei suprafeţe.

258 Dacă $1/\tau_g$ e torsiunea geodezică, K şi H reprezintă curburile totale şi medie, iar ds^2 şi Φ sînt formele fundamentale ale unei suprafeţe S, atunci avem relaţia $-ds^2/\tau_g^2 = Kds^2 - 2H\Phi + \Phi^2/ds^2$ (N. Mihăileanu); în particular, pe o asimptotică obţinem formula lui Enneper.

259 Dacă traiectoriile ortogonale ale unui fascicul de geodezice de pe o suprafaţă S au aceeaşi curbură geodezică, constantă nenulă, suprafaţa S e izometrică cu o suprafaţă de rotaţie.

RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII

Capitolul I. 14 Fie $C_n' + kC_n'' = 0$ fasciculul de curbe C_n care trec prin cele $n(n+3)/2 - 1$ puncte de bază ale fasciculului. Însă C_n' şi C_n'' se mai taie în alte $n^2 - (n(n+3)/2 - 1) = (n-1)(n-2)/2$ puncte. *Consecinţă*: *Toate cubicele care trec prin 8 puncte trec printr-un al nouălea punct.* b) Dacă prin $n(n+3)/2$ puncte date trece o singură curbă C_n iar $mn - (m-1)(m-2)/2 + 1$ dintre punctele ei se găsesc pe o curbă $C_m (m<n)$, atunci prin restul de $(n-m)(n-m+3)/2$ puncte (ce determină pe C_n) putem face să treacă o curbă C_{n-m}; aşadar: $C_n = C_m \cdot C_{n-m}$. *Obs.* Se dă numărul minim de puncte ale lui C_n care pot aparţine lui C_m fără ca C_n să fie degenerată. **15** Notăm cu $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$ laturile poligonului. Curbele $C_n' = d_1 d_3 \ldots d_{2n-1}$ şi $C_n'' = d_2 d_4 \ldots d_{2n}$ au $2n$ puncte comune (vîrfurile poligonului) pe conica C_2 şi mai trec prin altele $n^2 - 2n = n(n-2)$ puncte fixe, care se găsesc pe o curbă C_{n-2}; căci, în fasciculul $C_n' - kC_n'' = 0$ există o singură curbă C_n care să treacă printr-un al $(2n+1)$-lea punct al lui C_2. Deci, după problema 14, avem $C_n = C_2 \cdot C_{n-2}$. *Obs.* Pentru $n = 3$, rezultă *teorema lui Pascal*: *Dacă un hexagon e înscris într-o conică, laturile opuse se întîlnesc în puncte situate pe o dreaptă* (*dreapta lui Pascal*). Reciproca e adevărată. **20.** Coordonatele tangenţiale neomogene (u, v) ale tangentelor $ux + vy + 1 = 0$ ale unei curbe Salmon verifică o ecuaţie de forma $f^2(u,v)(u^2+v^2) = F^2(u,v)$ cu $f(u,v)$ şi $F(u,v)$ funcţii raţionale de u, v. Curba algebrică $C_n: F(x,y) = 0$ e o curbă Salmon dacă $F_x^2 + F_y^2 = \Phi^2(x,y)$ cu $\Phi(x,y)$ funcţie raţională de x, y. Cubica C_3 e o curbă Salmon dacă $3A + C = 0$, $B = D = 0$ (sau $A = C = 0$, $B + 3D = 0$); deci $C_3: x^3 - 3xy^2 + a = 0$, adică $\rho^3 \cos 3\theta = a$. **27** a) $\operatorname{tg} V_i = \rho_i/\rho_i'$ şi $\operatorname{tg}(V_2 - V_1) = (\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2')/(\rho_1\rho_2 + \rho_1'\rho_2')$; dacă $V_2 - V_1 = \pi/2$, atunci $\rho_1\rho_2 + \rho_1'\rho_2' = 0$. *Apl.* $b_1 b_2 = 0$. b) Din $\operatorname{tg} V = \rho/\rho' = 1/k$ (const.) obţinem $C: \ln\frac{\rho}{a} = k\theta$ (a — const. de integrare), adică *spirala logaritmică* (44). Cu (44) în (3), deducem că tangenta în P (la C) are panta $m = (ky + x)/(ky - x)$. Dacă $P_0(x_0, y_0)$, avem $m_0 = m_{P_0P} = (y - y_0)/(x - x_0)$; din $m = m_0$ obţinem că P se află pe cercul $x^2 + y^2 + (ky_0 - x_0)x - (kx_0 + y_0)y = 0$. *Obs.* Dacă S e proiecţia lui O pe tangenta în P la (44) şi se consideră S_1 determinat de relaţia $OS_1 = h\,OS$ (h-const.), înălţimea lui S_1 aparţine unei spirale logaritmice egale cu (44). Pentru $h = -1$ (S_1 e simetricul lui S în raport cu O), curba se numeşte *pericaustică*. **34** Fie $c = C_1C_2$. Cubicele care trec prin opt puncte: A_i, B_i, C_1, C_2, de exemplu $\Gamma_1 = adc$, trec printr-un al nouălea punct: C_3; căci $\Gamma \cap \Gamma_2 = \{A_i, B_i, C_i\}$ cu $\Gamma_2 = def$. Cum $C_3 \notin ab$, rezultă $C_3 \in c$; deci $\Gamma = \Gamma_1 - k\Gamma_2$, unde k e o anumită valoare. *Apl.* Dacă $a = b$, atunci $A_i = B_i$, iar d, e, f devin tangente în A_i la Γ. Or tangenta în A la Γ o retaie în C, numit *tangenţialul* lui A; deci lui a i se asociază o dreaptă c (care uneşte tangenţialele lui A_i), numită *dreapta satelit* a lui a. Rezultă: $\Gamma = def - ka^2c = 0$ (k o anumită valoare). **40** Conform problemei 34: tangenta în A_i retaie pe C în C_i; dacă A_1 şi A_2 sînt puncte

de inflexiune, atunci $C_1 = A_1$ și $C_2 = A_2$ iar dreapta satelită a lui a coincide cu a; deci și $C_3 = A_3$. **43** $\Phi(X, Y)$ e de clasă C^2 în P_0', ca și $F(x, y)$, $x(X, Y)$, $y(X, Y)$. Cum $\Phi_{X_0} = F_{x_0}\cos\alpha + F_{y_0}\sin\alpha$, $\Phi_{Y_0} = -F_{x_0}\sin\alpha + F_{y_0}\cos\alpha$, dacă $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$, atunci $\Phi_{X_0} = \Phi_{Y_0} = 0$. Fie transformarea inversă: $X = A_0 + x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $Y = B_0 - x\sin\alpha + y\cos\alpha$. $F(x, y) = \Phi(X(x, y), Y(x, y))$ fiind diferențiabilă de 2 ori în P_0, putem calcula $F_{x_0^2} = \Phi_{X_0^2}\cos^2\alpha - 2\Phi_{X_0Y_0}\cos\alpha\sin\alpha + \Phi_{Y_0^2}\sin^2\alpha, \ldots$; dacă $\Phi_{X_0^2} = \Phi_{X_0Y_0} = \Phi_{Y_0^2} = 0$, atunci, $F_{x_0^2} = F_{x_0y_0} = F_{y_0^2} = 0$, contrazicînd ipoteza. **47** $(x^2 + y^2)(2axy + b(x^2 - y^2)) + 2abxy^2 = 0$; O e punct triplu. **49** Fie Γ de ecuație (77) și inversiunea (28); $C: f(a, b)((X - a)^2 + (Y - b)^2) + 2k^2(f_a(X - a) + f_b(Y - b))((X - a)^2 + (Y - b)^2) + k^4(a_{11}(X - a)^2 + 2a_{12}(X - a)(Y - b) + a_{22}(Y - b)^2) = 0$, fiind o *cuartică bicirculară* sau o *cubică circulară*, după cum $\Omega \notin \Gamma$ sau $\Omega \in \Gamma$. $\Omega \in C$ e *punct dublu izolat*, *nodal sau de întoarcere*, după cum Γ e o elipsă, hiperbolă sau parabolă; căci tangentele (în Ω la C) au ecuația globală $a_{11}(X - a)^2 + 2a_{12}(X - a)(Y - b) + a_{22}(Y - b)^2 = 0$, fiind paralele cu direcțiile asimptotice ale lui Γ. *Obs.* Cînd $\Omega = 0$, $C: a_{33}(x^2 + y^2)^2 + 2k^2(a_{13}x + a_{23}y)(x^2 + y^2) + k^4(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) = 0$. **60** a) $P_i (i = 1, 2)$ fiind punctele duble ale lui C_3, dreapta $C_1 = P_1P_2$ are 4 puncte comune cu C_3 (cîte 2 confundate în P_i). Însă o dreaptă taie o cubică în 3 puncte. Deci $C_3 = C_1C_2$ iar $\{P_i\} = C_1 \cap C_2$. b) Fie C_1 dreapta ce trece prin cele 2 puncte triple ale lui C_5; C_1 taie pe C_5 în 6 puncte, cu unul mai mult decît o poate intersecta; rezultă: $C_5 = C_1C_4$, C_4 avînd 2 puncte duble unde o taie C_1. *Obs.* C_5 poate admite 6 puncte duble fără să degenereze; dacă ele se grupează cîte 3, în 2 puncte triple, C_5 e degenerată. **70** Fie $C_4: f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^4 + a_2x_1^3x_2 + a_3x_1^2x_2^2 + a_4x_1x_2^3 + a_5x_2^4 + x_3(b_1x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + b_3x_1x_2^2 + b_4x_2^3) + x_3^2(c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_2^2) + x_3^3(d_1x_1 + d_2x_2) + ex_3^4 = 0$. a) Alegem vîrfurile $O(0, 0, 1)$ și $Y_\infty(0, 1, 0)$ ale triunghiului fundamental ca puncte tacnodal și biflecnodal ($a_4 = a_5 = b_4 = d_1 = d_2 = e = 0$) iar tangenta tagnodală ca $Oy(c_1 = c_2 = b_1 = 0)$. Tangentele în Y_∞, de forma $x_3 = \mu x_1$ cu μ dat de $c_3\mu^2 + b_3\mu + a_3 = 0$ iar $b_3^2 - 4a_3c_3 > 0$, taie pe C_4 în 4 puncte confundate dacă $a_2 = b_2 = 0$. Luînd $\mu = \pm 1$ (prin alegerea punctului unitate), rezultă $b_3 = 0$, $c_3 = -a_3$. Deci $C_4: x_1^4 + \alpha(x_1^2 - x_3^2)x^2 = 0$ $(\alpha \neq 0)$. *Obs.* Prin afinitatea $x_1' = x_1$, $x_2' = \sqrt{|\alpha|}\,x_2$, $x_3' = x_3$, rezultă $C_4: x_1^4 \pm (x_1^2 - x_3^2)x_2^2 = 0$. b) Triunghiul fundamental dat de: $O(0, 0, 1)$ — punct biflecnodal, $X_\infty(1, 0, 0)$ și $Y_\infty(0, 1, 0)$ — puncte de întoarcere ($a_1 = a_5 = e = 0$ și $a_2 = a_4 = b_1 = b_4 = d_1 = d_2 = 0$). Luînd tangentele în O de forma $x_1 \pm x_2 = 0$, ecuația pantelor lor: $c_3m^2 + c_2m + c_1 = 0$ admite pe $m = \pm 1$ dacă $c_2 = 0$, $c_3 = -c_1$; ele au cu C_4 toate punctele confundate ($b_2 = b_3 = 0$). Prin $x_1 = \alpha x_1'$, $x_2 = \alpha x_2'$, $x_3 = x_3'$ sau $x_1 = \alpha x_2'$, $x_2 = \alpha x_1'$, $x_3 = x_3'$, deci $a_3 = c_1$, găsim C_4 (unicursală): $x_1^2x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)x_3^2 = 0$. *Obs.* Toate cuarticele de acest fel sînt echivalente. c) O, X_∞ și Y_∞ — puncte de întoarcere, tangenta în O (prin alegerea punctului unitate): $x_1 + x_2 = 0$ și transformarea $x_1' = \alpha x_1$, $x_2' = \alpha x_2$, $x_3' = x_3 (a_3 = \alpha^2 c_3)$, obținem $C_4: x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 - x_2) + x_3^2(x_1 + x_2)^2 = 0$. *Obs.* c_1) Astfel de cuartice sînt proiectiv echivalente. c_2) Tangentele în O, X_∞ și Y_∞ sînt $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ și $x_1 - x_3 = 0$, fiind concurente. **82** a) Strofoida dreaptă $2y(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$. b) Cuartica bicirculară $(x^2 + y^2)^2 + ay(x^2 - y^2) = 0$. **85** Tangenta în Ω (la C): $lx + 2ay - 2al = 0$ taie pe Ox în $\Omega'(2a, 0)$, diametralul opus al lui O; deci ea e diagonală în dreptunghiul construit pe $O\Omega$ și $O\Omega'$ (v. fig. 54). Asimptota: $lx + 2ay = 2al^3/(4a^2 + l^2)$ e

paralelă cu tangenta în Ω și taie pe C în $B(2l^2/(4a^2+l^2), l^3/2(4a^2+l^2))$, adică în intersecția diagonalelor dreptunghiului. **108** Se aplică formula (173) : a) $y' = \operatorname{tg} x$ încît $s = \int_0^{\pi/6} dx/\cos x = -\int_0^{\pi/6} d(\pi/2 - x)/\sin(\pi/2 - x) =$ $= -\ln \operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)\Big|_0^{\pi/6} = -\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \ln\sqrt{3}$; b) $s = \int_0^1 dt = 1$; c) $y' =$ $= -1/\operatorname{sh} x$, deci $s = \int_1^2 \operatorname{ch} x\, dx/\operatorname{sh} x = \ln \operatorname{sh} x\Big|_1^2 = \ln\frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \ln(2 \operatorname{ch} 1) = \ln(e +$ $+ 1/e)$; d) $s = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dt/\sin t \cos t = \ln \operatorname{tg} t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln 3$; e) $s = 5\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 6t}\, dt =$ $= 10\int_0^{2\pi} |\sin 3t|\, dt = 10\sum_{n=0}^{5}\int_{n\pi/3}^{(n+1)\pi/3} (-1)^n \sin 3t\, dt = 60\int_0^{\pi/3} \sin 3t\, dt = 40,$ deoarece $2\sin^2 3t = 1 - \cos 6t$ iar integrala o descompunem în 6 integrale, pe intervalele în care $\sin 3t$ își păstrează semnul constant (toate aceste integrale fiind egale între ele); f) cu $a > 0$, $s = a\int_0^{8\pi} \left|\cos^3\frac{\theta}{4}\right| d\theta = a\int_0^{2\pi} \cos^3\frac{\theta}{2} d\theta -$ $- a\int_{2\pi}^{6\pi} \cos^3\frac{\theta}{4}\, d\theta + a\int_{6\pi}^{8\pi} \cos^3\frac{\theta}{4}\, d\theta = 32a/3$; g) $s = \int_1^2 \sqrt{1+\rho^2\theta'^2(\rho)}\, d\rho =$ $= 17/12$. **109** a) Scriind $4x^2 = (a^{2/3} - y^{2/3})(a^{2/3}) + 2y^{2/3})^2$, atunci $s =$ $= 4\int_0^a \frac{1}{2} a^{2/3} y^{-1/3} (a^{2/3} - y^{2/3})^{-1/2} dy = -6a^{2/3}(a^{2/3} - y^{2/3})^{1/2}\Big|_0^a = 6a$; b) $4(a^2 + ab +$ $+ b^2)/(a + b)$; c) $3a\pi/2$; d) $2a\pi$. **110** Ecuațiile lui P_1P_2 : $x = a_1 + t(a_2 - a_1)$, $y = b_1 + t(b_2 - b_1)$, $t \in [0, 1]$; deci $s^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$. **111** Cum $C : x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, deducem $s = 2\pi r$. **112** $x'(t) = y'(t) =$ $= 0$ pentru $t = 0$; deci $s = 3a(t^2 + 2)t^2/2$. **113** Pentru $t = 2 \pm \sqrt{3}$ se obține punctul dublu $A(3/2, -1/2)$; $s = 3\int_{-\infty}^{2-\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{(1-t)^4} dt + 3\int_{2+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1-t)^4} dt =$ $= 3\sqrt{3}$. **120** a) $s = \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}$. Găsim (v. probl. 22) : $P''\left(0, a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)$ și $T_0\left(-a \operatorname{th}\frac{x}{a}, a/\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)$; deci $P''T_0 = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}$. Din triunghiul $OM''T_0$: $M''T_0 = a \operatorname{tg}\theta$. *Obs.* Reciproc : curba plană a cărei lungime a arcului satisface condiția (174) e lănțișorul (52). b) Tangenta în P : $Y - a \operatorname{ch}\frac{x}{a} =$ $= \operatorname{sh}\frac{x}{a}(X - x)$ și dreapta $P'Q$: $Y \operatorname{sh}\frac{x}{a} + X - x = 0$ se taie în $Q\left(x - a \operatorname{tg}\frac{x}{a}, a/\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)$; deci $QP = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}$. c) Eliminînd pe x între coordonatele lui Q și ținînd seama că $2 \operatorname{ch}\frac{x}{a} = 2a/Y$, $2 \operatorname{sh}\frac{x}{a} = 2\sqrt{a^2 - Y^2}/Y$, găsim tractricea $X = a \ln[(a + \sqrt{a^2 - Y^2})/Y] - \sqrt{a^2 - Y^2}$. **125** $d\bar{\rho} = \rho\frac{d\bar{e}}{d\theta} d\theta + d\rho\, \bar{e}$

iar $ds = |d\bar{\rho}|$. Însă $\bar{e}^2 = 1$, deci $\bar{e}.\frac{d\bar{e}}{d\theta} = 0$, adică $\frac{d\bar{e}}{d\theta} \perp \bar{e}$; iar $\left(\frac{d\bar{e}}{d\theta}\right)^2 = 1$. Atunci $ds^2 = \rho^2 d\theta + d\rho^2$. Cînd $C: \rho = \rho(\theta)$, obţinem (173_3). *Apl.* $s = \frac{a}{2}[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2})] = a(2u + \operatorname{sh} 2u)/4$ cu u definit de $\theta = \operatorname{sh} u$. **126** Fie C de ecuaţie (44); $s = \int_0^s ds = a\sqrt{1+k^2}\, e^{k\theta}/k$. a) $s = \rho\sqrt{1+k^2}/k$. b) Conform (55), $P_iT = a\sqrt{1+k^2}\, e^{k_i\theta}/k$ $(i = 1, 2)$ iar arc $P_1P_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds$. **128** a) Din $y_1 = y_2$ deducem că C_i $(i = 1, 2)$ au în $P_0(1, 1)$ un punct comun. Conform (179), ele sînt în contact de ordin 3. b) Cu (179'), găsim un contact de ordin 2 în $P_0(0, 1)$. c) Contact de ordin 5 în O. d) Contact de ordin 3 în $P_0(0, 1)$. **136** Vîrful lănţişorului. *Obs.* a) Singura curbă plană ale cărei puncte sînt sextactice e conica. b) O curbă plană închisă fără puncte de inflexiune, care are în comun cu o dreaptă arbitrară din planul ei cel mult 2 puncte, conţine cel puţin 6 puncte sextactice. **143** Fie C de ecuaţii (145). În $P(t): k = bq(q-p)t^{q-2p}/a^2p^2 + \ldots$. În $P_0(t = 0) \equiv 0$, se deosebesc 3 cazuri: $q > 2p$, cînd $\lim_{t\to 0} k = 0$; $q < 2p$, cînd $\lim_{t\to 0} \frac{1}{k} = 0$ şi $q = 2p$, cînd $\lim_{t\to 0} k = 2b/a^2$. *Obs.* Dacă $P_0 \in C$ e un punct multiplu de ordin m, prin definiţie, o dreaptă prin P_0 e în contact de ordin $m-1$ cu C; tangenta în P_0 la o ramură a lui C e în contact (cel puţin) de ordin m (cu C). **153** Fie curba $C: y = ae^{bx}$; $R = (1 + b^2y^2)^{3/2}/b^2y$, $PN = y\sqrt{1+b^2y^2}$ şi $P'N = by^2$. **155** C are ecuaţia (45), iar $B \equiv N$ şi N e intersecţia normalei (în P la C) cu $Ox \equiv d$ (v. probl. 17); de unde condiţia $R = 2\,PN$, adică $y^2 + y'^2 = 2\,|yy'' - y'^2|$, căci $R = (y^2 + y'^2)^{3/2}/|yy'' - y'^2|$ şi $PN = y\sqrt{x'^2+y'^2}/x' = \sqrt{y^2+y'^2}$. Din $y^2 + y'^2 = -2(yy'' - y'^2)$ rezultă $l = a$ (cicloida normală). *Obs.* Pentru $l = a$: $R = 4a\left|\sin\frac{\theta}{a}\right|$; căci $R = (a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}/l|a\cos\theta - l|$. **160** a) $R = (\rho^2 + a^2)^{3/2}/(\rho^2 + 2a^2)$, $PN = \sqrt{\rho^2+a^2}$. b) $R = a(\theta^2+1)^{3/2}/(\theta^2+2)$; cînd $\theta \to \infty$, $R - \rho = -a(\theta^4 + \theta^2 - 1)/(\theta^2+2)\sqrt{(\theta^2+1)^3 + \theta(\theta^2+2)} \to 0$. **161** a) $PN = \rho\sqrt{\rho^2+a^2}/a$, $OT = a$ şi $ON = \rho^2/a$, iar $k = a^3/\rho(\rho^2+a^2)^{3/2}$, căci $\rho' = -\rho^2/a$, $\rho'' = 2\rho^3/a^3$. b) Cu $\sigma = 1/\rho$: $R = a(1 + 1/\theta^2)^{3/2}/\theta \to 0$ cînd $\theta \to \infty$. c) Se foloseşte (197_2). **162** a) $R = PN = \rho\sqrt{1+k}$. b) $\widehat{OP\Omega} = \widehat{OP'\Omega} = \pi/2 - V$; căci $\operatorname{tg} V = 1/k$ (k-const.). Patrulaterul $OPP'\Omega$ e inscriptibil; cînd P' tinde către P, PP' devine tangenta în P la curbă iar $\widehat{\Omega P'P}$ devine drept, deci $\widehat{\Omega OP} = \pi/2$. Rezultă $\Omega(\rho_1 = ON = k\rho,\ \theta_1 = \theta + \pi/2)$. **165** Cum $k = d\theta/ds$ iar $dm = ak\,ds = a\,d\theta$ (a-const.): $x_0 = \int x\,dm/\int dm = \int x\,d\theta/\int d\theta$, $y_0 = \int y\,dm/\int dm = \int y\,d\theta/\int d\theta$. *Obs.* a) $d\theta$ e egal cu unghiul format de normalele lui C în extremităţile arcului ds. b) Cînd C e o curbă închisă: $x_0 = \frac{1}{2\pi}\int x\,d\theta$, $y = \frac{1}{2\pi}\int y\,d\theta$. **166** a) $(x^2 + y^2)^{n/(n-1)} = (ax)^{n/(n-1)} +$

$+ \varepsilon (\varepsilon by)^{n/(n-1)}$. b) $\varepsilon (y/b)^{n-1} y'/b + (x/a)^{n-1}/a = 0$, $(y/a)^{2n-1} y''/b + (n-1)(x/a)^{n-2}/a^2 = 0$; tangenta (în P) : $(x/a)^{n-1} X/a + \varepsilon (y/b)^{n-1} Y/b - 1 = 0$. *Obs.* b_1) C admite parametrizarea $x = a \cos^{2/n} t$, $y = b \sin^{2/n} t$ (curbă Lamé) sau $x = a \operatorname{ch}^{2/n} t$, $y = b \operatorname{sh}^{2/n} t$, după cum $\varepsilon = \pm 1$. b_2) Dacă 2 curbe C_i $(i = 1, 2)$, de indice m și n, sînt în contact în P, atunci $R_1/R_2 = (n-1)/(m-1) =$ $=$const. **175** Dacă $m = 1$, curba (208) e o spirală logaritmică. În cazul $m \neq 1$ obținem $C : x = \int_0^s \sin [s^{1-m}/(1-m)\, a]\, ds$, $y = \int_0^s \cos [s^{1-m}/(1-m)\, a]\, ds$; de exemplu pentru $m = -1$: C e *clotoida*, iar pentru $m = 1/2$: C e evolventa cercului. **184** Cu $\Omega_0 \in Ox$ și $d \equiv Oy$, fie $\Omega_0 (0, a)$, $\Omega (0, \alpha)$ și latura $y = mx$ cu $\operatorname{tg} \theta = (am + \alpha)/(a - m\alpha)$; deci Γ : $(x + y \operatorname{tg} \theta)^2 - 2a (1 + 2\operatorname{tg}^2 \theta)\, x + 2ay \operatorname{tg} \theta + a^2 = 0$ e o parabolă. *Obs.* Cînd $\theta = \pi/2$, $\Gamma : y^2 = 4ax$. **188** Distanța de la centrul cercului la dreaptă e egală cu raza cercului; deci $(-\alpha a - \beta b + c)^2 = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma)$. **190** Γ : $x = f(\alpha) \sin \alpha + f'(\alpha) \cos \alpha$, $y = -f(\alpha) \cos \alpha + f'(\alpha) \sin \alpha$ are raza de curbură $R = f(\alpha) + f''(\alpha)$.

Din $OP = R$, notînd $f'(\alpha) = u f(\alpha)$, obținem $1 + u^2 + \frac{du}{d\alpha} \sqrt{1 + u^2}$; de unde $-d\alpha = (1/u^2 + 1/u^3 \sqrt{1 + 1/u^2})\, du$, adică $\alpha = 1/u + \sqrt{1 + 1/u^2} + C$ sau $u = 2(\alpha - C)/[(\alpha - C)^2 - 1]$. Rezultă $f = C_1 [(\alpha - C)^2 - 1]$. **192** a) $y = ax/(ax^2 + 1)$; b) $x^3 - ay^2 = 0$; c) $27y^2 (x^2 + y^2) - 4ax^3 = 0$. **194** Înfășurătoarea : $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$; locul focarului : podara elipsei în raport cu centrul ei; locul vîrfului : $(x^{2/3} + y^{2/3})^4 = a^2 x^{2/3} + b^2 y^{2/3}$ e o curbă unicursală, cu un punct dublu izolat în O și cu 4 puncte de întoarcere în vîrfurile elipsei (axele fiind tangente în aceste puncte). **196** Parabola $y^2 = 2(p + q)\, x$. **202** Fie diametrul $\Omega P : x = x_1 + \rho (x_2 - x_1)$, $y = y_1 + \rho (y_2 - y_1)$, care trece prin O cînd $C (\Omega (at, a)$; a) e tangent în O dreptei fixe Ox, P fiind pe cicloida $x = a (t \sin t)$, $y = a (1 - \cos t)$. Înfășurătoarea e cicloida $x = a (2t - \sin 2t)/2$, $y = a (1 - \cos 2t)/2$, descrisă de un punct al cercului de rază $a/2$ care se rostogolește pe Ox. b) Fie $C_0 (O ; a)$. În cercul mobil C, de rază λa, se ia diametrul care trece prin $A (a, 0)$ cînd punctul de contact al lui C cu C_0 e A. Folosindu-se ecuațiile parametrice ale unei curbe ciclice, se obține $x = (1 \pm \lambda/2)\, a \cos \lambda t \mp \frac{\lambda a}{2} \cos (\lambda \pm 2)\, t$, $y = (1 \pm \lambda/2)\, a \sin \lambda t \mp \frac{\lambda a}{2} \sin (\lambda \pm 2)\, t$, o epi- sau hipo-cicloidă după cum C e exterior sau interior lui C_0. **205** a) Fie $AA' = Ox$ și $M (\alpha, \beta) \in \gamma$; parabola $2x^2 - \alpha x + \beta y = 0$. b) Γ : $4x^4 - a^2 (x^2 + y^2) = 0$ sau $2\rho \cos^2 \theta = a$; $\Gamma_1 : 4x^4 (x^2 + y^2) - a^2 (x^2 + y^2)^2 = 0$ sau $2\rho = a (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)$. **208** a) $(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = \sqrt[3]{16a^2}$. b) $32a^2 \left(x - a \arcsin \frac{y - \lambda}{4a}\right)^2 = y^2 (20a^2 - y^2) + \lambda y (4a^2 + y^2)$ cu $\lambda^2 = y^2 + 16a^2$. c) $x = a (\arccos u - (1 - u^2)/u)$ cu $a \ln u = a + y$. d) $81y^2 + 16 (a^2 + 18ax + \sqrt{a}\, (a - 6x)^{3/2}) = 0$. e) $(3y/8)^4 + 6a^2 (3y/8)^2 + 3a^3 x = 0$. f) $x = \alpha - \beta \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, $y = 2\beta$ cu $\beta = a \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}$ sau $x = a \ln [(y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2})/2a] \pm \pm (y + \sqrt{y^2 - 4a^2})/4a$. **214** Se trece la parametrizarea (3). *Apl.* $\rho' = -a^2 \sin 2\theta/\rho$, $\rho'' = -a^4 (1 + \cos^2 2\theta)/\rho^3$ iar $\rho^2 + \rho'^2 = a^4/2$ $\rho'^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 3a^4/2$. Deci $\Gamma : x = 2a \cos^3 \theta/3 \sqrt{\cos 2\theta}$, $y = -2a \sin^3 \theta/3 \sqrt{\cos \theta}$. Cum $\operatorname{tg} \theta = -(y/x)^{1/3}$, $x^{2/3} + y^{2/3} = (2a/3)^{2/3}/\sqrt{\cos 2\theta}$, obținem Γ : $(x^{2/3} +$

$+ y^{2/3})^2 \cdot (x^{2/3} - y^{2/3}) = 4a^2/9$. *Obs* [illegible] înfășurătoarea normalelor lemniscatei $x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = a \sin 2\theta$ [illegible] 2θ.

Capitolul II. 13 În Oxy: $\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{r}.\bar{k})\,\bar{k}$, $z = 0$; în Oyz: $\bar{r}_2 = \bar{r} - (\bar{r}.\bar{i})\,\bar{i}$, $x = 0$; în Oxz: $\bar{r}_3 = \bar{r} - (\bar{r}.\bar{j})\,\bar{j}$, $y = 0$. *Apl.* a) Cuartica $x^4 + y^4 = yx^2$, $z = 0$; cuartica $y^4 + z^4 = yz^2$, $x = 0$ (egală cu proiecția de pe Oxy); lemniscata Bernoulli $(x^2 + z^2)^2 = xz$, $y = 0$. b) $x^2 + y^2 - rx = 0$, $z = 0$; $z^4 = r^2(z^2 - y^2)$, $x = 0$; $z^2 = r(r - x)$, $y = 0$. c) $y^2(x^2 + a^2) = a^2b^2$, $z = 0$; $y^2 + z^2 = b^2$, $x = 0$; $z^2(x^2 + a^2) = b^2x^2$, $y = 0$. **19** a) E pe sfera $S(O; 2)$. b) E pe sfera $S(\Omega(0, 1/2, 0); 1/2)$. c) E intersecția conului $y^2 = xz$ cu cilindrul $yz = 1$. *Obs.* Se găsește pe orice cuadrică a fasciculului $y^2 - xz + \lambda(yz - 1) = 0$. **21** $|a_ib_ic_i| = 0$. *Apl.* a) $x + 10y - 8z - 27 = 0$. b) $(a_1b_2 - a_2b_1)x - b_2y + b_1z = 0$. **26** a) Cercul $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$, $z = 0$. b) parabola $y = 3x^2/4$, $z = 0$. c) Cercul $x^2 + y^2 = 4a^2$, $z = 0$. d) Spirala logaritmică $\rho = e^t$, $z = 0$. **32** $a = 0$, adică în cazul elicei circulare (6); atunci tangentele fac un unghi constant cu Oz. **42** $s = 4a\,(5\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt) = 10\,a$. **48** $\bar{v}\,(-1, 2t, t^3)$ și $\bar{d}\,(7, -2, -12)$. Din $\bar{v}.\bar{d} = 0$: $t_1 = -2$, $t_2 = -1$ și $t_3 = 3$. **50** Planul $4x - 6y - 4z + 5 = 0$, $A\,(1, 1, 3/4)$ fiind punctul de contact. **52** π_0: $t^2x - 2ty + 2z - t^3/3 = 0$. În punctele t_1 și t_2, planele sînt ortogonale dacă $(t_1t_2 + 2)^2 = 0$. **62** $t = 0$; $ax + bz = 0$. **65** Sfera e cu centrul în O dacă $\bar{r}.\bar{r}' = 0$; deci $a(b + c) = 4bc$, $k^2 = 4bc$. **72** $\bar{\beta}\,(2t^3 + t, 1 - t^4, t^3 + 2t)$, $\bar{N}\,(5, 2, -5)$. Din $\bar{\beta}.\bar{N} = 0$: $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$ și $t_3 = 2$. **75** Un singur punct, dat de $t = 0$. **81** a) $P\,(t = 0)$; $x/0 = y/0 = (z - 1)$, $x = y = (z - 1)/0$ și $-x = y = (z - 1)/0$. b) $\rho = \sqrt{2}$. **86** Dacă $a = c$ (elice — v. probl. 49); $k = ab^2$. π_n: $by + cz = 0$ și π_0: $cy - bz = 0$; dacă $b = c$. **87** $\rho = hd$, căci $\rho = e^{kt}(a^2(k^2 + 1) + b^2k^2)/a\sqrt{k^2 + 1}$ și $d = ae^{kt}$. *Obs.* Reformularea problemei: Curbura e proporțională cu distanța de la punct la planul care conține vîrful conului și e perpendicular pe axă. **91** a) Parabola $y^2 + 2ax - 4a^2 = 0$, $z = 0$; cercul $x^2 + z^2 - 2ax = 0$, $y = 0$; cuartica $y^4 = 4a^2(y^2 - z^2)$, $x = 0$. b) din a doua ecuație avem $x = a + \sqrt{a^2 - z^2} = a(1 + \cos t)$, luînd + și punînd $z = a \sin t$; din prima ecuație rezultă $y^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$. c) $1/\rho^2 = \left(3\cos^2\frac{t}{2} + 5\right)/4a^2\left(1 + \cos^2\frac{t}{2}\right)^3$, $1/\tau = -3\cos\frac{t}{2}/a\left(3\cos^2\frac{t}{2} + 5\right)$ **92** $\rho\,\mathrm{sh}\,t = a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2 t$ $1/\tau = -1/a\,\mathrm{ch}^2 t$. $\pi_n \cap Oz = M\,[0, 0, a(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + t)]$; deci $PM = a\,\mathrm{ch}^2 t = |\tau|$. **96** a) Din (52) se obține $t^2f''' + tf'' - f' = 0$, care admite soluția $f(t) = C_1t^2 + C_2 \ln t + C_3$. b) $f(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3$. **97** a) O curbă Țițeica, pentru care $\tau_1d_1^2 = \tau d^2/\Delta$. b_1) $\bar{r}''' = -8\bar{r}$, $\tau d^2 = (\bar{r}\,\bar{r}'\,\bar{r}'')/8$ iar $(\tau d^2)' = 0$; de altfel $\tau d^2 = 3\sqrt{3}/2$. $b_2 - b_3$) $d^2 = 10/3$. b_4) O transformată centroafină a curbei b_2) cu $a = b = 1$. c) $d = k[k^2 + (m - 1)^2]\,t^{m-1}/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $1/\tau = -mk(1 + k^2)[k^2 + (m - 1)^2]t^{m-4}/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; deci $\tau d^2 = -[k^2 + (m - 1)^2]\,t^{m+2}/mk(1 + k^2)$ e independent de t dacă $m = -2$, cînd $\tau = [4(9 + k^2)^2 + k^2(1 + k^2)t^6]/2k(9 + k^2)t^2$. **100** C': $x = (r + l)\cos t$, $y = (r + l)\sin t$, $z = kt$. a) $l = 0$ și $l = k^2/r - r = \rho - 2r$. b) $l = 0$ și $l = -2r$, ultima reprezentînd elicea egală trasată pe același cilindru în sens invers elicei date. **103** $ds = (z^4 + 2)\,dz/2$, $\bar{t} = (z^4\bar{i} + 2z^2\bar{j} + 2\bar{k})/(z^4 + 2)$. Din $d\bar{t}/ds = \bar{n}/\rho$: $1/\rho = \varepsilon(z^4 + 2)^2/8z$ ($\varepsilon = \mathrm{sign}\,z$); deci $\bar{n} = \rho\frac{d\bar{t}}{ds} = \varepsilon(2z^2\bar{i} + (2 - z^4)\bar{j} - 2z^2\bar{k})/(z^4 + 2)$. $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} =$

$= \varepsilon(-2\bar{i} + 2z^2\bar{j} - z^4\bar{k})/(z^4+2)$ iar $1/\tau = \frac{d\bar{b}}{ds} = 8z/(z^4+2)$. **105** Dacă $1/\rho = 0$, (58′) devine, prin integrare, $\bar{t} = \bar{t}_0$ ($\bar{t}_0$ — vector constant); atunci, din $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}$ rezultă $\bar{r} = \bar{t}_0 s + \bar{r}_0$ ($\bar{r}_0$ — vector constant). Deci: *curbele cu curbură nulă sînt drepte.* Fie $1/\tau = 0$; atunci (58″) dă $\bar{b} = \bar{b}_0$ Deoarece $\bar{b}\cdot\bar{t} = 0$ iar $\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}$, deducem $\bar{b}\cdot\bar{t} = \bar{b}_0\cdot\bar{t}$ sau $\bar{b}_0\cdot\frac{d\bar{r}}{ds} = 0$. Prin integrare, obţinem $\bar{b}_0\cdot\bar{r} + d = 0$; deci: *curbele cu torsiune nulă sînt curbe plane.* **106** Fie C de ecuaţie (16) în sistemul $Oxyz$ şi de ecuaţie $\bar{r}^* = \bar{r}^*(t)$ în sistemul $O^*x^*y^*z^*$. Cum $\bar{r} = \bar{O}\bar{O}^* + \bar{r}^*$ ($\bar{O}\bar{O}^*$ translaţia din O în O^*), obţinem $d^k\bar{r}/dt^k = d^k\bar{r}^*/dt^k$ ($k = 1, 2, \ldots$), rezultă afirmaţia. **107** Fie curba (57). $\Omega \in \pi_0 : (\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$ dacă $(\bar{r}_0 - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$, unde $\bar{r}_0 = \overline{O\Omega}$; deci $\bar{r}'\cdot\bar{b} + \bar{r}\cdot\bar{b}' = 0$. Conform cu (58″) şi deoarece $\bar{r}'\cdot\bar{b} = 0$, $\bar{r}\cdot\bar{n} \neq 0$, rezultă $1/\tau = 0$ (curba e plană). **109** Avem $d_0 = \bar{r}\cdot\bar{b}$, $d_n = \bar{r}\cdot\bar{i}$, $d_r = \bar{r}\cdot\bar{n}$; se ţine seama de formulele S—F în derivatele acestor distanţe. **112** $\bar{d}$ = versor d. Derivînd relaţiile $\bar{d}\cdot\bar{i} = \cos\theta$, $\bar{d}\cdot\bar{b} = \cos\omega$, obţinem $\bar{d}\cdot\bar{i}' = -\sin\theta\,\theta'$, $\bar{d}\cdot\bar{b}' = -\sin\omega\,\omega'$; de unde, cu formulele S—F, rezultă (63). **115** Fie $M \in \pi_0$ iar $\bar{R} = \bar{O}\bar{M}$; deci $\bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{t} + \mu\bar{n}$, $\bar{R}' = k\bar{b}$. Înmulţind scalar ultima relaţie cu $\bar{t}$, respectiv cu $\bar{n}$, obţinem $\lambda' = \mu/\rho - 1$, $\mu' = -\lambda/\rho$. Prin schimbarea de parametru $t(s) = \int_0^s d\alpha/\rho(\alpha)$, sistemul devine $d\lambda/dt = \mu - \rho(s(t))$, $d\mu/dt = -\lambda$, care se reduce la $d^2\mu/dt^2 + \mu = \rho$; $t(s)$ se numeşte *curbura integrală* a arcului curbei corespunzător intervalului $[0, s]$. Integrala generală $e\lambda = C_1\sin t + C_2\cos t + \sin t\int_0^s \sin t\,ds - \cos t\int_0^s \cos t\,ds$, $\mu = C_1\cos t - C_2\sin t - \cos t\int_0^s \sin t\,ds + \sin t\int_0^s \cos t\,ds$. Deci: *o curbă C admite o familie cu 2 parametri de evolvente planare.* Figura formată de evolventele planare e invariantă faţă de o deformare a lui C care păstrează curbura. **116** Fie (57) ecuaţia lui C; atunci $C_1 : \bar{r}_1 = \bar{r} + a\bar{n}$ iar $\bar{b}_1 = \bar{n}$. Avem $\bar{t}_1 = d\bar{r}_1/ds_1 = \left[\bar{t} + \frac{da}{ds}\bar{n} + a(-\bar{t}/\rho - \bar{b}/\tau)\right]\frac{ds}{ds_1}$. Înmulţind scalar cu $\bar{b}_1$, obţinem $\frac{da}{ds}\frac{ds}{ds_1} = 0$, adică $a = \text{const.}$ Însă $\bar{b}_1 = \lambda(d\bar{r}_1/ds \times d^2\bar{r}_1/ds^2) \parallel \bar{n}$ dacă $a(1/\rho^2 + 1/\tau^2) = 1/\rho$ (condiţie necesară şi suficientă). *Obs.* $1/\lambda = (a^2/\rho^2)\frac{d\rho}{ds} - [(1 - a/\varphi)\,a/\tau^2]\frac{d\tau}{ds}$. **117** $\pi_0 : (\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$, $\pi_0' : (\bar{R} - (\bar{r} + \Delta\bar{r}))\cdot(\bar{b} + \Delta\bar{b}) = 0$. Însă $\Delta\bar{r} = \bar{t}\Delta s + \ldots$, $\Delta\bar{b} = \bar{n}\Delta s/\tau + \ldots$. $\pi_0 \cap \pi_0' : (\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{b} = 0$, $(\bar{R} - \bar{r})\cdot\bar{n}\Delta s/\tau + \ldots = 0$; deci, la limită, obţinem tangenta în P la C. **122** Traiectoria particulei P, de masă m, e o curbă în spaţiu, de ecuaţie (16). Viteza şi acceleraţia lui P sînt $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\bar{t}$, $v = \frac{ds}{dt}$ fiind mărimea vitezei, $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\bar{t} + v\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$ (care se găseşte în planul osculator). Dacă F_t, F_n, F_b sînt proiecţiile forţei $\bar{F}$ pe versorii fundamentali ai triedului S—F, ecuaţiile lui Euler sînt $m\frac{dv}{dt} = F_t$, $m\frac{v^2}{\rho} = F_n$, $0 = F_b$. *Obs.* a) Pentu ca să nu existe acceleraţie tangenţială

a_t, mărimea vitezei trebuie să rămînă constantă. b) Pentru ca acceleraţia normală să fie nulă, trebuie ca $1/\rho = 0$ (curba se reduce la o dreaptă, mişcarea fiind rectilinie). **125** Ecuaţiile $S-F$ se reduc la $d\boldsymbol{X}/ds = Y/\rho$, $dY/ds = -\boldsymbol{X}/\rho - Z/\tau$, $dZ/ds = Y/\tau$; dacă (X_i, Y_i, Z_i) sînt 3 sisteme fundamentale de soluţii, atunci $X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = \text{const.}$, $X_iX_j + Y_iY_j + Z_iZ_j = \text{const.}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, încît putem lua $\bar{t}(X_1, X_2, X_3)$, $\bar{n}(Y_1, Y_2, Y_3)$, $\bar{b}(Z_1, Z_2, Z_3)$, dacă prima constantă e 1 iar a doua e 0 (ceea ce e posibil). Fie $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ şi $\sigma = (\boldsymbol{X} + iY)/(1 - Z)$, $i^2 = -1$. Derivînd pe σ şi cu ecuaţiile $S-F$, obţinem ecuaţia Riccati $i\frac{d\sigma}{ds} = \sigma/\rho - (1 - \sigma^2)2\tau$. *Obs.* a) Cunoscînd 2 soluţii λ şi μ ale ecuaţiei Riccati care se bucură de proprietatea că λ şi $-1/\mu$ sînt imaginar conjugate (căci, derivînd $(\boldsymbol{X} + iY)/(1 - Z) = (1 + Z)/(X - iY) = \lambda$, $(X + iY)/(1 + Z) = (1 - Z)/(X - iY) = -\mu$ şi cu ecuaţiile $S-F$, rezultă că λ şi μ sînt soluţii ale ecuaţiei Riccati); atunci $X = (1 - \lambda\mu)/(\lambda - \mu)$, $Y = i(1 + \lambda\mu)/(\lambda - \mu)$, $Z = (\lambda + \mu)/(\lambda - \mu)$. b) Dacă $1/\tau = 0$ (curba e plană), deci $Z = 0$, punem $t = \int ds/\rho$ şi avem $\sigma = e^{-it} = \cos t - i \sin t = X + iY = \frac{dx}{ds} - i\frac{dy}{ds}$. **127** Căci (v. probl. 118): a) $(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'^{\mathrm{V}})/(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') = (2K'T + KT')/KT = 3K'/K + K(T/K)'/T = 3(\bar{r}''\cdot\bar{r}''')/\bar{r}''^2 + K(T/K)'/T$; sau se derivează relaţia $T/K = -(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')/|\bar{r}''|^3 = \text{const.}$ b) $(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\bar{r}^{\mathrm{V}}) = -K^5(T/K)'$. **130** Pentru $t = 0$, curbele au un punct comun în O; atunci $C_1: x = a(1 - t^2/2! + t^4/4! - \ldots)$, $y = a(1 - t^3/3! + t^5/5! - \ldots)$, $z = t + 4t^2 + 25t^3/2$, $C_2: x = a(1 - t^2/2)$, $y = a(1 - t^3/6)$, $z = t(1 + t + t^2/2! + \ldots)(1 + 3t + 9t^2 + \ldots) = t + 4t^2 + 25t^3/2 + \ldots$. Contactul e de ordin 3. **134** Curbura e un element diferenţial de ordin 2 (intervin numai derivatele $\bar{r}'$ şi $\bar{r}''$); deci: *curburile a 2 curbe în contact (cel puţin) de ordin 2 sînt egale.* Reciproc: *dacă 2 curbe în contact au curburile egale, atunci ele sînt sigur în contact de ordin 2.* În general, contactul nu poate fi (cel puţin) de ordin 3; căci $\bar{r}''' = -K^2\bar{t} + K'\bar{n} - KT\bar{b}$ şi putem avea $K_1' \neq K_2'$ sau $T_1 \neq T_2$. Torsiunea e un element diferenţial de ordin 3 (intervin numai derivatele $\bar{r}'$, $\bar{r}''$ şi $\bar{r}'''$); deci: *torsiunea a 2 curbe în contact (cel puţin) de ordin 3 sînt egale.* În acest caz, nu numai curburile, ci şi derivatele lor de primul ordin sînt egale. Reciproca nu e adevărată; căci, dacă 2 curbe în contact au torsiunile egale, nu rezultă nici măcar că sînt în contact de ordin 2 (putem avea $K_1 \neq K_2$ sau $K_1 = K_2$ şi $K_1' \neq K_2$). **135** Fie $P_0(s = 0) \in C$; deci $\pi: (\bar{R} - \bar{r}_0)\cdot\bar{a} = 0$. Fie $\bar{b}$ versorul direcţiei proiecţiei paralele. Din intersecţia lui π cu dreapta de proiecţie prin $P(s) \in C$: $\bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{b}$, obţinem $C_1: \bar{r}_1 = \bar{r} - [(\bar{r} - \bar{r}_0)\cdot\bar{a}/\bar{a}\cdot\bar{b}]\cdot\bar{b}$. Or $\bar{r}_1(0) = \bar{r}(0) = \bar{r}_0$, $\bar{r}_1^{(i)} = \bar{r}^{(i)} - [\bar{r}^{(i)}\cdot\bar{a}/\bar{a}\cdot\bar{b}]\cdot\bar{b}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. **138** $ds_c^2 = \bar{a}_c'^2\,ds^2 = [\rho'^2 + (\rho/\tau)^2]\,ds^2$, $ds_s = |\bar{a}_s'|\,ds = [\rho/\tau + (\tau\rho')']ds$. **139** Avem (v. probl. 128): $(1 - l/\rho)(1 + \varepsilon l/\rho_1) = \cos^2\theta$. P, P_1, Ω şi Ω_1 se găsesc pe dreapta $\bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{n}$; deci $(P P_1 \Omega \Omega_1) = (0\, l\, \rho l + \varepsilon\rho_1) = \sec^2\theta = \text{const.} > 0$. **141** a) Dacă $\rho = \text{const.}$, din (79) rezultă $\bar{a}_s = \bar{a}_c$ $(\bar{R}_s = R_c)$; deci $C_0: \bar{r}_0 = \bar{r} + \rho\bar{n}$ cu $\rho = \text{const.}$ Deducem $\bar{t}_0 = \bar{r}_0'\frac{ds}{ds_0} = -\frac{\rho}{\tau}\frac{ds}{ds_0}\bar{b}$; deci $\frac{ds}{ds_0} = \varepsilon\tau/\rho$ ($\varepsilon = \text{sign}\,\tau$) şi $\bar{t}_0 = -\varepsilon\bar{b}$. Din $\bar{n}_0/\rho_0 = \bar{t}_0'\frac{ds}{ds_0} = -\bar{n}/\rho$ obţinem $\bar{n}_0 = -\bar{n}$ şi $\rho_0 = \rho$; atunci $\bar{b}_0 = -\varepsilon\bar{t}_0$. c) Din $\bar{n}_0/\tau_0 = \bar{b}_0'\frac{ds}{ds_0}$ obţinem $\tau\tau_0 = -\rho^2$. d) $C: \bar{r} = \bar{r}_0 + \rho_0\bar{n}_0$. **143** Sfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ e oscu-

latoare (în P la C) dacă curba o intersectează în 4 puncte confundate (în P). Folosind dezvoltările în serie, găsim $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2-6=0$. **145** Luînd $x=1+t$, $y=1+a_1t+a_2t^2+\ldots$, $z=1+b_1t+b_2t^2+\ldots$ şi scriind că verifică ecuaţia curbei, obţinem $a_1=-1$, $b_1=0$, $a_2=-3$, $b_2=-2$, $a_3=-9$, $b_3=-6$, $a_4=-40$, $b_4=-53/2,\ldots$ Determinăm sfera $S(\Omega(a,b,c);R)$ numai cînd contactul e de ordin 4; atunci $a=b=-8$, $c=14$, $R=\sqrt{331}$. **146** Derivînd ultima ecuaţie (79): $\rho'[\rho+\tau(\tau\rho')']=0$. Dacă $\rho'=0$, avem $\rho=$ const.; curba e un cerc strîmb. Dacă $\rho+\tau(\tau\rho')'=0$, atunci $\bar{a}_s'=0$, adică $\bar{a}_s=$ vector constant; curba e situată pe sfera osculatoare. **148** Din (79): $\bar{a}'=[\rho+\tau(\tau\rho')']\bar{b}/\tau$, $R'^2=2\rho'[\rho+\tau(\tau\rho')']$; deci sfera osculatoare are centrul fix şi raza constantă (cînd toate punctele curbei aparţin acestei sfere) dacă şi numai dacă $\rho+\tau(\tau\rho')'=0$. **153** a) În general, admite o înfăşurătoare Γ: $F=0$, $G=0$, $G_\alpha=0$; în particular, cînd F e un polinom de gradul întîi, avem cazul curbelor plane. b) Nu admite; căci prima ecuaţie derivată în raport cu α conduce la o imposibilitate. c) Admite întotdeauna o înfăşurătoare. Condiţia (82″) devine $z_\alpha=0$; de unde $\alpha=\alpha(t)$, încît $\Gamma: x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\alpha(t))$. *Obs.* Fie, în planul *Otz*, familia de curbe plane $C_{0\alpha}: z=z(t,\alpha)$; atunci C_α şi Γ sînt cele care se obţin înfăşurînd planul *Otz* pe cilindrul $K: x=x(t)$, $y=y(t)$. d) Nu; C_α sînt trasate pe cilindrul K, prin orice punct al lui K trecînd cîte o curbă a familiei. e) Nu; C_α sînt situate pe un con cu vîrful în O, prin fiecare punct al lui trecînd cîte o curbă a familei.

Capitolul III. **1** a) Cu egalităţile $x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$, $2uv=(u+v)^2-(u^2+v^2)$, obţinem $x^3-3xy+2z=0$. b) Cu $v=y/u$ în z şi eliminînd pe u, rezultă $(xz-y^2)^2=a^2x^3$. c) Calculăm xyz; găsim $xyz-x^2-y^2-z^2+4=0$. **5** Conice în planele $\lambda^2x-\lambda y-(\lambda^2+2)z+\lambda(-\lambda^4+\lambda+3)=0$. **7** O suprafaţă de rotaţie. **11** a) $F(x,y,z)=C$ ($C=$const.). b) Fie $P_0\in R^3$; atunci $C=F(P_0)$. *Apl.* Suprafaţa $x^3+y^3+z^3=C$ trece prin P_0 dacă $C=27$; $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,3)$. **12** Fie C o curbă pe S; ecuaţiile ei în coordonate curbilinii pe S: $u=f(t)$, $v=g(t)$, iar ecuaţia ei în spaţiul R^3: $\bar{r}=\bar{r}(f(t),g(t))$. Dacă $P_0(u_0,v_0,)\in C$, atunci există o valoare t_0 astfel ca $f(t_0)=u_0$, $g(t_0)=v_0$ încît $f(t)=u_0+(t-t_0)f_1(t)$, $g(t)=v_0+(t-t_0)g_1(t)$. Putem alege pe f şi g astfel încît tangenta în P_0 la C: $\bar{r}_0'=\bar{r}_{u_0}f'(t_0)+\bar{r}_{v_0}g'(t_0)$ să aibă direcţia tangentă $\bar{a}$ dată, cînd $(\bar{r}_{u_0}\bar{r}_{v_0}\bar{a})=0$; căci $(\bar{r}_{u_0}\bar{r}_{v_0}\bar{r}_0')=0$. Deoarece condiţia $\bar{r}_0'=\lambda\bar{a}$ admite soluţia $f'(t_0)=\alpha$, $g'(t_0)=\beta$, obţinem $f_1(t)=\alpha+(t-t_0)f_2(t)$, $g_1(t)=\beta+(t-t_0)g_2(t)$. **14** $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ sînt coordonatele polare în Oxy. Intersecţia cilindrului proiectant (obţinut prin eliminarea lui z între ecuaţia cilindrului şi ecuaţia suprafeţei de rotaţie) cu Oxy e suprafaţa algebrică $f(\theta,\rho)=0$, $z=0$. *Apl.* a_1) Spirala lui Arhimede ($S: x^2+y^2-a^2z^2/k^2=0$ e un con); a_2) spirala hiperbolică; a_3) spirala parabolică. b) Da; spirala logaritmică. c_1) Parabola $y^2=a^2z/k$, $x=0$ (cu vîrful în O şi Oz ca axă), $S: x^2+y^2-a^2z/k=0$ fiind un paraboloid de rotaţie; c_2) parabola $y=a-bz^2/k^2$, $x=0$ (cu vîrful în $(0,a,0)$ şi Oy ca axă); c_3) cubica $y^2z-a^2k=0$, $x=0$; c_4) $yz^p-ak^p=0$, $x=0$; c_5) $k^py-az^p=0$, $x=0$. **16** a) Cele 3 cuadrice $xy=z$, $xz=y^2$, $y=x^2$ au în comun cubica $C_3: x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Intersecţia lui S_4 cu o cuadrică oarecare din fasciculul $xy-z+v(y-x^2)=0$ e curba algebrică $C_8: (y-x^2)[y-x^2-v(xz-y^2)]=0$, $xy-z+v(y-x^2)=0$, care degenerează în 2 cuartice $C_4': y-x^2=0$, $xy-z=0$ şi $C_4'': xy-z+$

$+ v(y - x^2) = 0$, $y - x^2 - v(xz - y^2) = 0$; C_4' degenerează în C_3 și o dreaptă fixă C_1' (dreapta improprie din planul Oyz), iar C_4'' în C_3 și o dreaptă variabilă C_1'' (cînd v variază). Deci $C_8 = C_3^2 \cdot C_1' \cdot C_1''$. b) Dreapta (1) verifică identic ecuațiile lui C_4'' dacă $p = v/(v^3 - 1)$, $q = v^2/(v^3 - 1)$, $a = v/(v^3 - 1)$, $b = 1/v(v^3 - 1)$; curba directoare a suprafeței riglate e intersecția lui S_4 cu Oxy: $(y - x^2)^2 = xy^3$, $z = 0$. **17** Planul tangent π: $2uvx + (u - v^2)y - u^2z + u^3 = 0$ conține dreapta d, care trece prin $A(0, 0, 1)$, dacă $A \in \pi$: $u^2(u - 1) = 0$ și $\bar{N} \perp d$: $5uv - v^2 + u - 7u^2 = 0$. Obținem $P_1(u = v = 0)$ — punct singular al lui S, $P_2(u = 1, v = 2)$ și $P_3(u = 1, v = 3)$; deci π_2: $4x - 3y - z + 1 = 0$ și π_3: $x - 8y - z + 1 = 0$. **18** $P'(x, y, 0)$, $N(x_0 = x + a^2y/2(x^2 + y^2) - xf'$, $y_0 = y - a^2x/2(x^2 + y^2) - yf'$, $z_0 = 0)$; aria triunghiului $ONP' = (x_0x - y_0y)/2 = a^2/4$. **19** a) $3\lambda^2(x + y) - z = 0$; b) $(x + y - \pi/2)\cos\lambda - z = 0$. **21** Pe S sînt 2 puncte $P_1(2, 0, 1)$ și $P_2(-5/2, 5/2, -1)$ ale căror normale sînt comune lui S și π. Cea mai mică depărtare e $d = 1/\sqrt{6}$. **23** Din $P \in S$ și $\bar{N}_S$ (în P) $\| \bar{N}$: $x^2 + y^2 - xy^2 + 2z = 0$, $2x - y^2 = (3y^2 - 2xy)/0 = 2$ cu $(1, 0, -1/2)$, $(3/2, 1, -7/8)$ și $(3, 2, -5/2)$. Sînt 3 normale comune lui S și π. b) Normala din $P(-3, -1, 2) \in S$. **24** $P_0(u = 1, v = -1)$ iar $\bar{N} = -6v\bar{i} + 3u\bar{j} - 2\bar{k}$; deci π_0: $6x + 3y - 2z - 7 = 0$ și $\bar{n}_0$: $(x - 1)/6 = (y - 3)/3 = -(z - 4)/2$. Din $\cos(\widehat{\bar{N}, \bar{i}}) = \pm 1/\sqrt{2}$: punctele căutate aparțin curbei $36v^2 - 9u^2 = 4$ de pe S. **25** Ecuația plan tangent: $x/u \sin v + y/u \cos v + z/\sqrt{a^2 - u^2} = a^2$. **26** π_t(în P_0) taie pe S dacă $\sin(v - v_0)[u_0 \cos(v + v_0) - \cos 2v_0] = 0$. Pentru $\sin(v - v_0) = 0$, obținem curba $v = v_0$, care e generatoare a lui S. Pentru $u = u_0 \cos(v + v_0)/\cos 2v_0$, obținem o elipsă a cărei proiecție pe Oxy e cercul $x^2 + y^2 = u_0 = (y \cos v_0 - x \sin v_0)/\cos 2v_0$, $z = 0$. **28** $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ e vectorul normală în $P(x, y, z) \in S$, care normală taie pe Oxy în N, iar $P'(x, y, 0)$ e proiecția lui P pe Oxy; $NP' = z\sqrt{A^2 + B^2}/C$. a) $\bar{N} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$ încît $NP' = a$. b) $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v$ și $NP' = 1/a$. **29** π_t: $(f - yf'/x)X + f'Y - Z = 0$ trece prin O. **31** a) Suprafața e de rotație. Paralela $u = u_0$ e cercul $x^2 + y^2 = \sin^2 u_0$, $z = u_0$; meridianul $v = v_0$ e sinusoida $x = \cos v_0 \sin z$, $y = x \operatorname{tg} v_0$. Avem $\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0$ (ortogonalitate). b) $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = \sin u(-\cos v\,\bar{i} - \sin v\,\bar{j} + \cos u\,\bar{k})$; punctele $A_k(u = k\pi, v) = (0, 0, k\pi)$ sînt puncte singulare ale lui S. **32** $OT = (1 - n)OP$. **33** Fie conul K (raportat la axe): $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Dacă $P_0 \in R^3$ (de unde se duc normale) iar $P(x, y, z) \in K$ (piciorul normalei), avem $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $(x - x_0)/ax = (y - y_0)/by = (z - z_0)/cz$ care are, în general, 4 soluții distincte. **34** Suprafața e o cuartică S_4, A_i (date) fiind punctele duble ale ei. Conține 15 drepte determinate de A_i și 10 drepte de intersecție ale planelor π_{ijk}, π_{lmn}, unde $(i\,j\,k\,l\,m\,n)$ e o permutare a lui $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$. **35** $(\bar{R} - \bar{r}'\,\bar{r}_{u'}', \bar{r}_{v'}') = (\bar{R} - \bar{r}\,\bar{r}_u\,\bar{r}_v)\cdot\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$. **36** C poate fi definită prin suprafețele $\lambda_1 F + \lambda_2 G = 0$, $\mu_1 F + \mu_2 G = 0$ $(\Delta = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0)$. În noua reprezentare, față de cea veche, parametri directori ai tangentei se înmulțesc cu Δ. **37** Normala $\bar{R} = \bar{r} + t\bar{n}$ trece prin punctul fix P_0 $(\bar{r}_0 = \overline{OP}_0)$ dacă $\bar{r}_0 = \bar{r} + t\bar{n}$. Cum $\bar{r}_u + t_u\bar{n} + t\bar{n}_u = 0$, $\bar{r}_v + t_v\bar{n} + t\bar{n}_v = 0$ iar $\bar{n} \cdot \bar{r}_u = \bar{n} \cdot \bar{r}_v = 0$ și $\bar{n} \cdot \bar{n}_u = \bar{n} \cdot \bar{n}_v = 0$ (căci $\bar{n}^2 = 1$), obținem $t_u = t_v = 0$, adică $t = t_0$ (const.). Deci $|\bar{r}_0 - \bar{r}| = |t_0|$, obținînd sfera $\bar{r} = \bar{r}_0 - t_0\bar{n}$ de centru P_0 și rază $|t_0|$. *Apl.* Sfera $S(O; a)$. **38** Versorul normală $\bar{n}$ e constant; deci $\bar{n}_u = \bar{n}_v = 0$, adică $d\bar{n} = 0$ (cond. nec. și suf.). Însă $\bar{n} \cdot d\bar{r} = 0$ (în orice $P \in S$ și orice $d\bar{r}$); deci $\bar{n} \cdot \bar{r} = p$ (ecuația unui plan). Fie $P_0(\bar{r}_0 \cdot \overline{OP}_0) \in S$; atunci $\bar{n} \cdot \bar{r}_0 = p$. Deci ecuația planului se mai scrie $\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$. *Apl.* a) $\bar{n} =$

$= (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k})/\sqrt{6}$; S e planul $x + 2y - z = 0$; b) $\bar{n} = (\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k})/3\sqrt{2}$; S în $x - y + 4z = 0$. **39** a) În $P_0\,(u_0 = v_0 = 0)$, $\pi_t : 3x + y - 3z + 3 = 0$. b) Fiind intersecţia lui π_t şi π, $d\bar{r}$ ($dx = 1$, $dy = 3$, $dz = 2$). Însă $d\bar{r} = \bar{r}_u\,du + \bar{r}_v\,dv$; deci $du_0 = dv_0 = 1$. **41** Geometric : tangenta în P la d e d. Analitic : fie $d = Oz$; $S : x\,f(x, y, z) + y\,g(x, y, z) = 0$. În $P_0\,(0, 0, z_0) \in S$, $\pi_t : f(0, 0, z_0)\,x + g(0, 0, z_0)\,y = 0$, care conţine pe Oz. **42** a) În cazul sferei (7), avem $\bar{N} = -r\cos u\,\bar{r}$; deci : *planul tangent la sferă e perpendicular pe raza punctului de contact.* $\bar{N}$ e nul pentru $u = -\pi/2$ şi $u = \pi/2$; deci : *polul sud şi polul nord sînt puncte singulare aparente ale reprezentării* (7) *a sferei.* b) Conoidul Plücker se mai scrie sub forma $z(x^2 + y^2) = ay^2 + bxy + cx^2$. $F_x = F_y = F_z = 0$ admite soluţia $x = y = 0$; deci : *Oz e o linie de puncte singulare.* Tangenta în $P_0\,(0, 0, z_0) \in Oz$ e pe conul pătratic $(z_0 - c)\,x^2 - bxy + (z_0 - a)\,y^2 = 0$. **44** Podoida e omotetica podarei lui S în raport cu Ω, raportul de omotetie fiind 2. **53** Fie $P_0 = 0$ şi π_t (în O la S) $= Oxy$; deci $S : z = (ax^2 + 2bxy + cy^2)/2 + (3)$. Sfera (racordată în O la S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2\gamma z = 0$; cilindrul proiectant al lui C pe Oxy : $(1 - a\gamma)\,x^2 - 2b\gamma xy + (1 - c\gamma)\,y^2 + (3) = 0$. Tangentele în O la C sînt confundate dacă $b^2\gamma^2 - (1 - a\gamma)(1 - c\gamma) = 0$. **56** Condiţia că familia de curbe $\bar{r} = \bar{r}\,(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ trece prin $P_0 \in S$ permite determinarea lui $t = t_0\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ şi a 2 parametri; fie α_{n+1} şi α_{n+2}. Punînd $t = t_0 + u$, ecuaţia familiei devine $\bar{r} = \bar{r}\,(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ şi $P_0\,(u = 0)$. Contactul fiind de ordin 2, condiţiile (50″) pentru $u = 0$ determină pe $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. C e *supraosculatoare* în P_0 la S dacă contactul e de ordin $n + 1$. *Apl.* Fie $P_0 = 0$ şi π_t (în O la S) $= Oxy$; deci dreapta $d : x/l = y/m = z/n = \rho$ e osculatoare (în contact de ordin 3) dacă $n = 0$, $r_0 l^2 + 2s_0 lm + t_0 m^2 = 0$, adică : *d sînt tangente în punctul dublu al curbei după care planul tangent intersectează suprafaţa.* **59** a) Cilindrul $x^2 + y^2 - 1$; b) conul $ax^2/(a - 1) + y^2 + z^2 = 0$. **60** Fie cercul $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$; S e torul (8′). b) $S : (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(x - a) + py^2 = 0$; muchia de întoarcere degenerează în punctul fix considerat pe axa parabolei. c) Sferele $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha(x - a) - 2\beta y - 2\gamma z = a^2$ cu condiţia $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2$ admit înfăşurătoarea $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 = 4R^2\,[(x - a)^2 + y^2 + z^2]$ obţinută prin rotaţia unui melc Pascal în jurul lui Ox. **62** a) O suprafaţă de rotaţie în jurul axei dirimantei S. Această suprafaţă e compusă dintr-o pînză care se reduce la un segment de pe axă, loc al punctelor în care se întîlnesc razele reflectate în puncte situate pe acelaşi paralel al lui S, şi dintr-o pînză obţinută prin rotirea în jurul axei lui S a curbei caustice care corespunde unui meridian al lui S. b) O suprafaţă de rotaţie a cărei meridiană e evoluta unei conice, care are focarul în izvorul de lumină, axa de rotaţie fiind perpendiculară pe planul dioptrului. **64** Căci C e determinată de (53). *Obs.* Dacă $F_{xxx} = 0$, contactul e (cel puţin) de ordin 3. **67** Se elimină parametri între relaţiile din enunţ şi $F_\alpha/\varphi_\alpha = F_\beta/\varphi_\beta = F_\gamma/\varphi_\gamma$. *Apl.* Înfăşurătoarea planelor $x/\alpha + y/\beta + z/\gamma - 1 = 0$ cu $\alpha\beta\gamma = a^3$ e suprafaţa tetraedrală $27\,xyz = a^3$. **69** a) Luînd $t = v$, $z/h = u$, $S : x = a(\cos v + v\sin v - u\sin v)$, $y = a(\sin v - v\cos v + u\cos v)$, $z = hu$ iar C (elice) : $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $z = hv$. b) $S : x = a(\mathrm{ch}\,v - v\,\mathrm{sh}\,v + u\,\mathrm{sh}\,v)$, $y = a(\mathrm{sh}\,v - v\,\mathrm{ch}\,v + u\,\mathrm{ch}\,v)$, $z = hu$; $C : x = a\,\mathrm{ch}\,v$, $y = a\,\mathrm{sh}\,v$, $z = hv$. **70** Luînd $M_1(a_1, 0, 0), \ldots$, $P_1(\alpha, 0, 0), \ldots$ şi $M_1P_1 = at$ ($a \neq 0$), obţinem $x/\alpha + y/\beta + z/\gamma - 1 = 0$ cu $\alpha = at + a_1$, $\beta = at + a_2$, $\gamma = at + a_3$. C e parabola cubică $Ax = (a_2 - a_3)\cdot(at + a_1)^3$, $Ay = (a_3 - a_1)(at + a_2)^3$, $Az = (a_1 - a_2)(at + a_3)^3$ cu $A = a_1^2(a_2 - a_3) + a_2^2(a_3 - a_1) + a_3^2(a_2 - a_1)$. **71** Se pun condiţiile ca intersecţiile lui $y = \alpha x + \beta z + \gamma$ cu Oxy şi cu Oyz să fie tangente cercului, respectiv

parabolei, cînd $2a\alpha\gamma = a^2 - \gamma^2$, $2\beta\gamma = p$. S: $[(ax + pz)(2a - x) - ay^2](2a - x) = 0$ e un con cu vîrful $V(2a, 0, -2a^2/p)$. **72** Fie $P(0, 0, v) \in Oz$; atunci $M[2(v - a)^2/p, 0, 2v - a]$ şi $N[0, 2(v + a)^2/p, 2v + a]$. Deci S: $x = 2(v - a)^2/p - u(v - a)^2$, $y = u(v + a)^2$, $z = 2v - a + apu$ iar $(\bar{r}_0' \bar{a}' \bar{a}) = 0$. Găsim $u_c = (v + a)/ap$; deci C: $x = -(v - a)^3/ap$, $y = (v + a)^3/ap$, $z = 3v$. **74** a) π_p: $3u^2x - 3uy + z - u^3 = 0$, Σ: $x = 2u/3 + v$, $y = u^2/3 + 2uv$, $z = 3u^2v$ şi Γ: $3v = u$ sau $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$. b) π_p: $15ux - 6y + u^5 z - 10u^2 = 0$, Σ: $x = 4u/5 + v$, $y = 5u^2/3 + 2uv$, $z = -3u^{-4}v$ şi Γ: $3v + u = 0$ sau $x = u$, $y = u^2$, $z = u^{-3}$. *Obs.* C şi Γ sînt curbe Ţiţeica. **75** Fie π_0: $Ax + By + Cz + D = 0$; deci π: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, încît dreptele caracteristice ale celor 2 plane sînt paralele. **77** Fie S de ecuaţie (34); deci π_a (al generatoarei v): $(\bar{R} - \bar{r}_0 \bar{a}' \bar{a}) = 0$ depinde de un parametru. Dacă S e cu plan director, π_a (pt. orice v) e paralel cu planul director. *Apl.* Conul $(x + 1)^2 + y^2 - z^2 = 0$; deci S e o suprafaţă riglată cu centru. **78** Curba izotropă dată. **79** (54″) admite soluţia $x = \Delta_1/\Delta_4$, $y = \Delta_2/\Delta_4$, $z = \Delta_3/\Delta_4$, cu Δ_i determinantul matricei $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha & D_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta & D_\beta \end{vmatrix}$ prin eliminarea coloanei $i = 1, 2, 3, 4$ şi înmulţit cu $(-1)^{i-1}$. Dacă $\Delta_4 = 0$, atunci A, B, C sînt soluţii ale ecuaţiei $\lambda\theta_\alpha + \mu\theta_\beta + \nu\theta = 0$, cînd $A = f_1(t)\, g(\alpha, \beta)$, $B = f_2(t)\, g(\alpha, \beta)$, $C = f_3(t)\, g(\alpha, \beta)$ cu $t = t(\alpha, \beta)$; deci π depinde numai de un parametru. *Obs.* Înfăşurătoarea nu se schimbă cînd înmulţim pe A, B, C, D cu un acelaşi factor $\rho = \rho(\alpha, \beta)$. *Apl.* Fie $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ şi S de ecuaţie (11). Dacă $P(\alpha, \beta, \gamma) \in S$, π: $(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + \ldots + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = 0$ cu $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. **80** Fie elicoidul (15′); avem $E = \varphi'^2 + \psi'^2$, $F = k\psi'$, $G = \varphi^2 + k^2$. **81** a) S: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = \rho^2/2$; deci $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + \rho^2)d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$. b) Scriind $ds^2 = \rho^2[(1 + \rho^2)\, d\rho^2/\rho^2 + d\theta^2]$, luăm $\sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho/\rho = du$, adică $u = \sqrt{1 + \rho^2} + \{\ln[(\sqrt{1 + \rho^2} - 1)/(\sqrt{1 + \rho^2} + 1)]\}/2$. **85** a) Fie S_t: $\bar{R}_t = \bar{r}(\sigma) + v\bar{t}(\sigma)$; deci π_t: $(\bar{R} - \bar{r}\,\bar{n}\,\bar{t}) = 0$ e independent de v (de pe generatoarea g_0: $\sigma = \sigma_0$). S_t e o suprafaţă desfăşurabilă, curba de întoarcere fiind chiar C. Fie S_n: $\bar{R}_n = \bar{r}(\sigma) + v\bar{n}(\sigma)$; π_n: $(\bar{R} - \bar{r}\,\bar{t}\,\bar{n}) - v(\bar{R} - \bar{r}\,\bar{t}/\rho + \bar{b}/\tau\,\bar{n}) = 0$ generează un fascicul de axă g_0: $\sigma = \sigma_0$ (cînd $P(\sigma_0, v)$ descrie pe g_0). S_n nu e o suprafaţă desfăşurabilă. Fie S_b: $\bar{R}_b = \bar{r}(\sigma) + v\bar{b}(\sigma)$; π_b: $(\bar{R} - \bar{r}\,\bar{t}\,\bar{b}) + v(\bar{R} - \bar{r}\,\bar{n}\,\bar{b})/\tau = 0$ descrie un fascicul de axă g_0. S_b nu e o suprafaţă desfăşurabilă. b) Avem $d\bar{r} = \bar{t}\, d\sigma$; deci $d\bar{r}^2 = d\sigma^2$. Atunci $ds_t^2 = d\bar{R}_t^2 = v^2 d\sigma^2/\rho^2 + (d\sigma + dv)^2$, $ds_n^2 = d\bar{R}_n^2 = [(1 - v/\rho)^2 + 1/\tau^2]\, d\sigma^2 + dv^2$ şi $ds_b^2 = d\bar{R}_b^2 = (1 + v^2/\tau^2)\, d\sigma^2 + dv^2$. *Obs.* S-a folosit ecuaţiile S—F ale lui C. **86** $ds^2 = du^2 - 2\rho\, du\, d\sigma/\tau + (d\rho/d\sigma + u/\tau)^2 + \rho^2 d\sigma^2/\tau^2$, $ds^2 = (\rho^2 + \tau^2)\, du^2 + 2\left[\rho + u\frac{d}{d\sigma}(\rho^2 + \tau^2)/2\right] du\, d\sigma + \left[\left(1 + u\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 + u^2 (d\tau/d\sigma)^2\right] d\sigma^2$. **87** a) In P_0 $(u = v = 0)$, $E_0 = G_0 = 2$, $F_0 = 1$; cum $\bar{i}_1$ (la C_1): $du = -dv$ şi $\bar{i}_2$ (la C_2): $\delta u = \delta v$, rezultă $\theta = \pi/2$. b) $\bar{N}_0 = -(\bar{i} + \bar{j}) + \bar{k}$, deci $\cos(\widehat{\bar{N}, \bar{k}}) = 1/\sqrt{3}$. **89** $a + k = 0$. **90** $E = 1 + 4u^2$, $F = 1$, $G = 1 + 4v^2$; $3(u + v) + 4v^3 = C_1$, $3(u + v) + 4u^3 = C_2$, $3(u + v) + 2(u^3 + v^3) = C_3$. **91** Da. **93** $d\bar{r} \times \delta\bar{r} = \bar{N}(du\, \delta v - \delta u\, dv)$ cu $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v$ iar $|d\bar{r} \times \delta\bar{r}| = ds\delta s \sin\theta$. **98** $d\sigma = \sqrt{\Delta}\, du\, dv$. Prin (2): $\Delta' = J^2\Delta$, iar $du'dv' = J^{-1}\, du\, dv$; rezultă $d\sigma' = d\sigma$. *Apl.* Deci $\sigma = \iint_D \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv$,

D fiind constituit din ochiurile lemniscatei $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, $z=0$, obținută prin proiecția curbei $C=S$ (paraboloidul $x^2+y^2=2z$) $\cap S'$ (cilindrul $y^2+2z^2-z=0$) pe Oxy. Trecînd la coordonate polare în Oxy ($J=\rho$), găsim $\sigma=4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}$. **90** S se poate explicita printr-o ecuație (32) cu $p=-F_x/F_z$, $q=-F_y/F_z$ iar $d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$. **101** Fie inversiunea (de pol O și putere k): $\bar r'=k\,\bar r/\bar r^2$; cum $d\bar r=k\,d\bar r/\bar r^2-2k\bar r\,(\bar r.d\bar r)/\bar r^4$ și $ds'^2=d\bar r'^2$, $ds^2=d\bar r^2$, obținem $ds'=k\,ds/\bar r^2$. **103** Fie S de ecuații (6); $\Phi=[(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')\,du^2+\varphi\psi'dv^2]/\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}$. Pentru sfera (7) sau (7'): $\Phi=r\,(du^2+\cos^2 u\,dv^2)$, respectiv $\Phi=-r\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)$; torul (8): $\Phi=r\,du^2+\cos u\,(a+r\cos u)\,dv^2$, catenoidul (9): $\Phi=a(-du^2/(u^2-a^2)+dv^2)$, respectiv $\Phi=-du^2/a+a\,dv^2$; pseudosfera (10): $\Phi=a\,(-\operatorname{ctg} u\,du^2+\sin u\cos u\,dv^2)$. **105** a) $y=x\operatorname{tg} v$; $z=a\cos\left(g\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$, adică un conoid drept cu axa Oz. Luînd $U=u\cos v$, $V=\operatorname{tg} v$, se obține (19''). b) $E=1, F=0, G=u^2+a^2b^2\sin^2 bv$; $D=0$, $D'=ab\sin bv/\sqrt{\Delta}$, $D''=-ab^2u\cos bv/\sqrt{\Delta}$. c) Nu; căci $\bar N=ab\sin bv\,(-\sin v\,\bar i+\cos v\,\bar j)+u\,\bar k$ și $\bar N=0$ dacă $u=0$, $\sin bv=0$. Punctele ($u=0$, $bv=k\pi$) sînt singulare. Curba $u=0$ e segmentul de pe Oz cuprins între $z_1=-a$ și $z_2=a$. *Obs.* Pentru conoidul drept (19''), avem $E=1+v^2$, $F=uv$, $G=u^2+f'^2$; $D=0$, $D'=-f'/\sqrt{\Delta}$, $D''=uf''/\sqrt{\Delta}$ iar $\bar N=f'(v\bar i-\bar j)+u\bar k$; deci admite o linie de puncte planare corresp. soluției sistemului $f'=f''=0$. **108** a) $u=C_1$, $u=C_2v^2$; S e un conoid drept: $\ln z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. b) $u=C_1$, $u=C_2e^{2v}$. c) $u=C_1$, $(1-u^2)(1-v^2)=C_2(1+u^2)$. d) $u=C_1$, $uv^2=C_2$. e) $u=C_1e^{v/\sqrt{2}}$, $u=C_2e^{-v/\sqrt{2}}$. f) $x=C_1$, $y^2\cos x=C_2$. g) $u=C_1$, $v=u+C_2$. h) $z=x^m y^n$; liniile asimptotice: $\frac{dy}{y}=k_i\frac{dx}{x}$ ($i=1,2$), fiind intersecția lui S cu 2 familii de cilindri avînd generatoarele paralele cu Oz. i) $\pm\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\text{const.}$ j) $y=C_1x$, $x+y=C_2$. k) $y=C_1x$, $1/x^2-1/y^2=C_2$. l) $xy=C_1$, $x^2-y^2=C_2$. m) $v=\pm 2\operatorname{arc\,tg} e^u+C$: generatoarele hiperboloidului cu o pînză S. **109** O suprafață riglată cu directoare distincte are reprezentarea $\bar r=v\bar i+uv\bar j+u^2\bar k$; deci $u=C_1$ (generatoare) și $u=C_2v^2$ (cuartice raționale $x=v$, $y=C_2v^3$, $z=C_2^2v^4$). **111** Fie conoidul (19''); linii asimptotice: $v=C_1$, $u^2=C_2f'$. Lemniscata Bernoulli $u^2(1+v^2)=2a^2(1-v^2)$; deci $f'(v)=(1-v^2)/(1+v^2)$, adică $f(v)=v/(1+v^2)+C$. Obținem conoidul Plücker. **115** a) $z^2=c^2(1-x^2/a^2-y^2/b^2)$; prin derivare: $pz=-c^2x/a^2$, $qz=-c^2y/b^2$, $rz+p^2-c/a^2$, $sz+pq=0$, $tz+q^2=-c^2/b^2$, încît $s^2-rt=-c^2/a^2b^2z^2<0$: S are toate punctele eliptice. b) $\Delta(DD''-D'^2)=(u^2-5u+6)(u^2-6)$; deci S are puncte eliptice pentru $v\in R$, $u\in(-\infty,-\sqrt{6})\cup(2,\sqrt{6})\cup(3,+\infty)$, puncte hiperbolice pentru $v\in R$, $u\in(-\sqrt{6},2)\cup(\sqrt{6},3)$ și puncte parabolice pentru $v\in R$, $u=\{-\sqrt{6},2,\sqrt{6},3\}$. c) $S: x=u$, $y=v^3-u$, $z=v$; $D=D'=0$; deci S are toate punctele parabolice, fiind o suprafață desfășurabilă. d) $s^2-rt=1/a^2b^2>0$; S are numai puncte hiperbolice. e) $(1+\operatorname{ch}^2 v)^2(DD''-D'^2)=-\operatorname{sh}^2 v\operatorname{ch}^2 v\,(\sin u+\cos u)^2<0$; S are toate punctele hiperbolice. e) $r/(1+p^2)=s/pq=t/(1+q^2)$: $x=0$, $y=\pm B\sqrt{A-B}$, $z=B(A-B)/2$ și $x=\pm A\sqrt{B-A}$, $y=0$, $z=A(B-A)/2$. f) $D/E=D'/F=D''/G$: $u=\pm a$, $v=\pm a$, S avînd 4 puncte ombilicate. **117** a)

$D = D' = 0$: punctele lui S sînt parabolice (S e desfăşurabilă). b) $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0$ dacă $u = 0$; linia de strictiune $C_0 : u = 0$. **118** a) Linia parabolică $DD'' - D'^2 = 0$: $u = 0$ şi $v = 0$. b) Cum $rt - s^2 = 12x$, linia parabolică se obţine intersectînd pe S cu Oxy. c) $u - v = 0$ (cubica $x = 2u$, $y = u^2$, $z = 2u^3$ de pe paraboloidul hiperbolic $z = xy$). d) $2u + 1 = 0$ şi $v = 0$. **120** Raportul anarmonic k al rădăcinilor ecuaţiilor $a_i x^2 + 2b_i x + c_i = 0$ $(i = 1, 2)$ e dat de $(1 + k)/(1 - k) = (a_2c_1 + a_1c_2)/2 - b_1b_2/\sqrt{(b_1^2 - a_1c_1)(b_2^2 - a_2c_2)}$. **125** $E = 9$, $F = 1$, $G = 9$, $\sqrt{5}D = 2$, $\sqrt{5}D' = -2$, $\sqrt{5}D'' = 2$; direcţia tangentei în P a lui C : $dv = 2\,du$ iar $1/R_n = \cos\vartheta/R = \Phi/ds^2 = 2/49\sqrt{5}$. **125** $R_n = ds^2/\Phi$. Fie $C : u = k$ (deci $du = 0$), iar C_n' secţiunea normală asociată în $P(k, v)$ lui C ; $R_n' = G/D''$. Dacă C : $v = k$ ($dv = 0$), pentru secţiunea normală C_n'' în $P(u, k)$ a lui C, găsim că $R_n'' = E/D$. *Apl.* a) $E = 1 + u^2$, $F = 0$, $G = 1$, $D = -1/\sqrt{1 + u^2}$, $D' = D'' = 0$. Obţinem $1/R_n' = 0$ (u = const. sînt generatoare) şi $R_n'' = -(1 + u^2)^{3/2}$. *Obs.* Pentru curba $C : v = u^2$ în $P(u = 2, v = 4)$, cum $dv = 4\,du$, curbura lui C_n e $1/R_n = -1/21\sqrt{5}$. b) Găsim (v. şi probl. 83 şi 103) : $R_n' = (a + r\cos u)/\cos u$ şi $R_n'' = r$; C_n' şi C_n'' sînt cercuri iar C_n'' coincid cu meridianele C'' : $v = \text{const.}$ **127** Conform formulelor $S - F$: $\bar{r}_u = \bar{t} + v\bar{n}/\rho_0$, $\bar{r}_v = \bar{t}$, $\bar{r}_{uu} = -v\bar{t}/\rho_0^2 + (1/\rho_0 - v\rho_0'/\rho_0^2)\,\bar{n} - v\bar{b}/\rho_0\tau_0$, $\bar{r}_{uv} = \bar{n}/\rho_0$, $\bar{r}_{vv} = 0$; $E = 1 + v^2/\rho_0^2$, $F = G = 1$, $D = v/\rho_0\tau_0$, $D' = D'' = 0$. **131** α) S e desfăşurabilă cînd $K = 0$. β) Generatoarele g ale lui S sînt asimptotele ei. γ) Avem $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 2H$. a) $E = 8u^2 + v^2$, $F = uv$, $G = u^2 + 8v^2$, $\sqrt{\Delta}D = 8v^2$, $\sqrt{\Delta}D' = -8uv$, $\sqrt{\Delta}D'' = 8u^2$; $g : v = Cu$. S e conul $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$. b) Cu $x - y = 2v$, $x + y = 2u$, avem $S : x = u + \sin v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda v$; $E = 2$, $F = 0$, $G = 2\cos^2 v + \lambda^2$, $D = D' = 0$, $\sqrt{\Delta}D'' = -2\lambda\sin v$ şi g : $v = C$. S e un cilindru. c) $E = 2$, $F = 4$, $G = 8(u + v)^2$, $D = D' = 0$, $D'' = (u + v)/\sqrt{2}$; $g : v = C$. Cum $\bar{N} = (u + v)(\sin v\,\bar{i} - \cos v\,\bar{j} + \bar{k})$, curba de întoarcere $\Gamma : u + v = 0$. **132** Fie ecuaţia (23). Avem $p = x/A$, $q = y/B$, $r = 1/A$, $s = 0$, $t = 1/B$; deci $K = 1/AB\,(1 + x^2/A^2 + y^2/B^2)$ e maxim dacă $x = y = 0$. Obţinem un singur punct : vîrful O al lui S. În O : $K = 1/AB$, $H = (1/A + 1/B)/2$, încît ecuaţia (75) dă $\sigma_1 = 1/A$, $\sigma_2 = 1/B$. Secţiunile principale C_1 şi C_2 sînt respectiv parabolele de secţiune Oxz şi Oyz. **133** Fie S de ecuaţii (15'') ; cînd $k = 0$, S e o suprafaţă de rotaţie. Găsim $K = (u^3 f' f'' - k^2)/[u^2(1 + f'^2) + k^2] = K(u)$, $H = [(1 + f'^2)\,u^2 f' + 2k^2 f' + u^2 + k^2)uf'']/2[u^2(1 + f'^2) + k^2]^{3/2} = H(u)$; eliminînd pe u, obţinem $\Psi(K, H) = 0$. *Obs.* Suprafeţele de-a lungul cărora una din curburile principale e constantă sînt suprafeţe W. *Apl.* a) Conform problemei (83) şi (103) : $K = \cos u/r\,(a + r\cos u)$, $H = (a + 2r\cos u)/2r\,(a + r\cos u)$; deci $\Psi(K, H) = (2H - rK - 1/r)/2 = 0$. b) Fie parabola (în Oxz, Ox ca axă şi Oz ca directoare) : $z^2 = 2px - p^2$, $y = 0$. Deci $S : z^2 = 2px^2 + y^2 - p^2$ sau de forma (6) cu $\psi = u$, $\varphi = (u^2 + p^2)/2p$. Atunci (v. şi probl. 83 şi 103) : $E = (u^2 + p^2)/p^2$, $F = 0$, $G = (u^2 + p^2)^2/4p^2$, $D = -1/\sqrt{u^2 + p^2}$, $D' = 0$, $D'' = \sqrt{u^2 + p^2}/2$. a) $v/\sqrt{2} + \ln C(u + \sqrt{u^2 + p^2}) = 0$ (v. şi probl. 110). b) $K = -2p^4/(u^2 + p^2)^3$, $H = p^2/2(u^2 + p^2)^{3/2}$. c) $\sigma_1 = -2\sigma_2 = 2p^2/(u^2 + p^2)^{3/2}$; avînd $\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, S e o suprafaţă Weingarten. **135** a) Fie S de ecuaţii (7) ; avem (v. şi probl. 134) : $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/r$. Din ecuaţia (76) : $p = 2/r = \text{const.}$; deci : dacă suprafaţa de separaţie a unui lichid e sferică, presiunea normală pe elementul de suprafaţă e constantă. b) Fie $S : 2z = a(x^2 + y^2)$; deci $\sigma_1 + \sigma_2 = a^2/(1 + a^2x^2 + a^2y^2)^{3/2}$. *Obs.* În vîrful O : $p = \sigma a^2$. **136** Căci

$(\bar{n}\bar{n}_u\bar{n}_v)^2 = \Delta$, $(\bar{n}\bar{r}_u\bar{r}_v)(\bar{n}\bar{n}_u\bar{n}_v) = DD'' - D'^2$, încît $\sqrt{\Delta}K = (\bar{n}\bar{n}_u\bar{n}_v)$; însă $(\bar{n}\bar{n}_u\bar{n}_v) = \bar{n}\cdot(\bar{n}_u \times \bar{n}_v) = |\bar{n}_u \times \bar{n}_v|$. Folosind ecuaţiile (69'), avem $\bar{r}_v \times \bar{n}_u - \bar{r}_u \times \bar{n}_v = 2\sqrt{\Delta}H\bar{n}$. **137** Atunci $D = D'' = 0$, deci $\Delta^2 K = -(\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uv})^2$; de unde se obţine $\frac{1}{2}[\ln(-K)]_u = (\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uv})_u/(\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uv}) - \Delta_u/\Delta, \ldots$ şi se ţine seama de ecuaţiile (69) şi de $\begin{vmatrix} i \\ j \quad k \end{vmatrix}$. **138** Raportăm pe S la liniile asimptotice ($D = D'' = 0$) şi $H = -FD'/\Delta$. Fie linia asimptotică $C : v = \text{const.}$ (δu, $\delta v = 0$). De-a lungul traiectoriei ortogonale $C' : E du + F dv = 0$, curbura normală e $1/\rho_n' = -2FD'/\Delta = 2H$. **139** Notînd cu d şi δ diferenţialele de-a lungul liniilor asimptotice, avem $\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{2D'}{D''}$, $\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{D}{D''}$; condiţia de ortogonalitate: $ED'' - 2FD' + GD = 0$, adică $H = 0$. Reciproc: S fiind raportată la liniile asimptotice ($D = D'' = 0$) şi deoarece $D' \neq 0$ (S nu e plan), din $H = -FD'/\Delta = 0$, rezultă $F = 0$. **141** Avem $\bar{n} \times \bar{r}_u = (-F\bar{r}_u + E\bar{r}_v)/\sqrt{\Delta}$, $\bar{n} \times \bar{r}_v = (-G\bar{r}_u + F\bar{r}_v)/\sqrt{\Delta}$. În $\bar{n} \times \bar{n}_u$ şi $\bar{n} \times \bar{n}_v$ ţinem seama de ecuaţiile (69') şi de $K = -D'^2/\Delta$. *Obs.* Rezultă $H = -FD'/\Delta$, $\sqrt{-K}\, d\bar{r} = \bar{n} \times (\bar{n}_u du - \bar{n}_v dv)$. **147** Fie S de ecuaţie (34) cu centrul în O. Deducem $K/d^4 = (\bar{r}_0\bar{a}\bar{a}')^2/[(\bar{r}_0\bar{r}_0'\bar{a}) + v(\bar{r}_0\bar{a}'\bar{a})]^4$; cînd $u = \text{const.}$, K/d^4 e constant dacă şi numai dacă $(\bar{r}_0\bar{a}\bar{a}') = 0$, exprimînd că planul asimptotic (al generatoarei) $\pi_a : (\bar{R} - \bar{r}_0\bar{a}\bar{a}') = 0$ trece prin O. **148** Fie S definită de (82) cu $c = c'' = 0$. Considerînd riglata asimptotică $S_{v_0} : \bar{R} = \bar{r}(u, v_0) + t\,\bar{r}_v(u, v_0)$, planul asimptot $\pi_a : (\bar{R} - \bar{r}\,\bar{r}_v\,\bar{r}_{uv}) = 0$. După (82) şi din condiţia $O \in \pi_a$, obţinem $a'(\bar{r}\bar{r}_u\bar{r}_v) = 0$, deci $a' = 0$. Considerînd riglata asimptotică $S_{u_0} : \bar{R} = \bar{r}(u_0, v) + t\,\bar{r}_u(u_0, v)$, în acelaşi mod obţinem $b' = 0$. Reciproc, dacă S e o suprafaţă Ţiţeica, S are ecuaţiile (82) cu $c = c'' = a' = b' = 0$; atunci $\pi_a : (\bar{R}\bar{r}_u\bar{r}) = 0$, deci $O \in \pi_a$, adică: *desfăşurabilele asimptotice ale tuturor riglatelor asimptotice asociate suprafeţei Ţiţeica S sînt conuri cu vîrful în centrul lui S.* **149** Fie S de ecuaţie (23); $K/\cos^4\theta = 1/AB = \text{const.}$ **153** S: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 1/u^2$. a) $\rho = 6u^5/(u^6 + 4)^{3/2}$. b) $K = -12/(u^6+4)^2$, $H = 2(u^6-2)/u^2(u^6 + 4)^{3/2}$. $\pi_t : 2u^{-2}\cos v\, x + 2u^{-2}\sin v\, y + uz - 3u^{-1} = 0$ iar $d = -3/\sqrt{u^6 + 4}$; deci $K/d^4 = 4/27$. c) Liniile asimptotice: $v + \sqrt{3}\ln u = \text{const.}$; liniile de curbură: $u = C_1$, $v = C_2$. d) $3v = \pm(\sqrt{u^6 + 4}/u^3 + \frac{1}{2}\ln[(\sqrt{u^6 + 4} - u^3)/(\sqrt{u^6 + 4} + u^3)]) + \text{const.}$ **155** a) $H = 2(1 + 2u^2)/(1 + 4u^2)^{3/2}$, $K = 4/(1 + 4u^2)^2 > 0$; deci S are numai puncte eliptice. b) $2R_1 = (1 + 4u^2)^{1/2}$, $2R_2 = (1 + 4u^2)^{3/2}$. c) Liniile asimptotice sînt imaginare: $du^2 + u^2\,dv^2 = 0$. Liniile de curbură: $u = C_1$, $v = C_2$ ($F = D' = 0$). **156** Dacă Ω e centrul cercului generator, OM diametrul iar P punctul curent al cercului, se ia $u = \widehat{\Omega P}$, $\widehat{\Omega M}$ şi $v = \widehat{OM}, \widehat{Ox}$: atunci S: $x = a(1 + \cos u)$, $y = a(1 + \cos u)\,\text{tg}\, v$, $z = a\sin u/\cos v$. Liniile asimptotice: $\text{tg}\frac{u}{2} = C\,\text{tg}(\pi/4 \pm v/2)/\sin v$; liniile de curbură: $v = C_1$, $v = \arccos\left(C_2\,\text{ctg}\frac{u}{2}\right)$, care sînt cercuri. **157** a) $E = G = (a\cos u + \text{ch}\, v)^2$, $F = 0$, $D = -D'' = -\sqrt{1 - a^2}$, $D' = 0$; deci $H = 0$. b) Liniile asimptotice:

$u \pm v = \text{const.}$; liniile de curbură: $u = C_1$, $v = C_2$ sînt curbe plane, aflate în $x\sqrt{1-a^2}\cos C_1 - z\sin C_1 = aC_1\sqrt{1-a^2}\cos C_1$, respectiv $y\sqrt{1-a^2}\operatorname{ch} C_2 - az\operatorname{sh} C_2 = C_2\sqrt{1-a^2}\operatorname{ch} C_2$. **158** a) $f = ue^{u^2/2}$. b) $\bar{N} = [v + e^{u^2/2}(u^2+2)](-\cos u\, \bar{i} - \sin u\, \bar{j} + \bar{k})$. Deci $\Gamma: v + e^{u^2/2}(u^2+1) = 0$. Cum $\bar{i}(-\cos u/\sqrt{2}, -\sin u/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ iar $\widehat{\bar{i}, \bar{k}} = \pi/4$, Γ e o elice (trasată pe un cilindru cu axa paralelă cu Oz). *Obs.* S e înfăşurătoarea lui $\pi_t: x\cos u + y\sin u - z - e^{u^2/2} = 0$. c) $u = C_1$, $v = C_2$. **160** $E = G = (3u^2 + 3v^2 + 1/3)^2$, $F = D = D'' = 0$, $D' = 2$. a) $u = C_1$, $v = C_2$ iar $F = 0$. b) $v = \pm u + C$; $\pi_C: \mp x + y \pm 3Cz + C(C^2 + 1/3) = 0$. *Obs.* Înfăşurătoarea lui π_C: $4(\pm 3z + 1/3)^2 + 27(\pm x - y)^2 = 0$. **162** Liniile de curbură sînt formate din poziţiile diferite ale curbei generatoare şi din traiectoriile diferitelor puncte ale acestei curbe. **163** a) Se ţine seama de legea de transformare a coeficienţilor celor 2 forme fundamentale: cum $F = D' = 0$, rezultă $\mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0$. b) Cu $F = D' = 0$ în (69) şi (69') iar $\left|\begin{smallmatrix}1\\1\,1\end{smallmatrix}\right| = (\ln\sqrt{E})_u$, $\left|\begin{smallmatrix}1\\1\,2\end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix}1\\2\,1\end{smallmatrix}\right| = (\ln\sqrt{E})_v$, $\left|\begin{smallmatrix}1\\2\,2\end{smallmatrix}\right| = -G_u/2E$, $\left|\begin{smallmatrix}2\\1\,1\end{smallmatrix}\right| = -E_v/2G$, $\left|\begin{smallmatrix}2\\1\,2\end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix}2\\2\,1\end{smallmatrix}\right| = (\ln\sqrt{G})_u$, $\left|\begin{smallmatrix}2\\2\,2\end{smallmatrix}\right| = (\ln\sqrt{G})_v$. *Obs.* Ecuaţia $\bar{r}_{uv} = (\ln\sqrt{E})_v\,\bar{r}_u + (\ln\sqrt{G})_u\,\bar{r}_v$ e *ecuaţia Laplace a liniilor de curbură*; căci, pentru ca S de ecuaţie (13) să fie raportată la liniile de curbură e necesar şi suficient ca ecuaţia Laplace asociată $\bar{r}_{uv} = a\bar{r}_u + b\bar{r}_v$ să aibă respectiv soluţiile $\bar{r}$ şi $\bar{r}^2$ (*teorema Darboux*). c) $K = DD''/EG$, $H = (ED'' + GD)/2EG$, $1/R_1 = D/E$, $1/R_2 = D''/G$. Din (87') deducem $e = D/R_1$, $f = 0$, $g = D''/R_2$. **169** a) $2FH - D' = 0$; b) $2D'H - FK = 0$. **171** $u = C_1$ şi $v = C_2$ sînt curbe Ţiţeica dacă $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $a + b + c = 0$, cînd $S: xyz = ABC$ e o suprafaţă Ţiţeica, şi formează o reţea conjugată dacă $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ sau $a/\alpha = b/\beta = c/\gamma$ (cînd S se reduce la o curbă). **175** O familie de suprafeţe Liouville paralele, cuadricele familiei (99) corespunzînd valorilor α şi β ale lui λ. **182** Fie C_1: $v = \text{const.}$, cînd $du/ds = 1/\sqrt{E}, dv/ds = 0$; după (103''') rezultă $1/\rho_1 = \sqrt{\Delta}\left|\begin{smallmatrix}2\\1\,1\end{smallmatrix}\right|/E\sqrt{E}$. Considerînd C_2: $u = \text{const.}$, obţinem $1/\rho_2 = -\sqrt{\Delta}\left|\begin{smallmatrix}1\\2\,2\end{smallmatrix}\right|/G\sqrt{G}$. Cînd reţeaua (u, v) e ortogonală ($F = 0$), atunci $1/\rho_1 = -(\sqrt{E})_v/\sqrt{\Delta}$, $1/\rho_2 = (\sqrt{G})_u/\sqrt{\Delta}$. **188** Raportînd pe S la liniile izotrope, atunci $ds^2 = 2F\,du\,dv$ iar simbolurile lui Christoffel sînt toate nule afară de $\left|\begin{smallmatrix}1\\1\,1\end{smallmatrix}\right| = (\ln F)_u$ şi $\left|\begin{smallmatrix}2\\2\,2\end{smallmatrix}\right| = (\ln F)_v$; atunci ecuaţia (104) admite soluţiile $u = C_1$ şi $v = C_2$. **189** Evolventele lui C. **190** Fie $P \in C$; însă π_t (în P la S) $= \pi_r$ (în P la C), încît $\bar{n}$ (în P la S) $= \bar{\nu}$ (în P la C). **191** Fie S de ecuaţie (34) cu $\bar{a}^2 = 1$. Pentru curba directoare C_0, notăm cu $\bar{\tau} = d\bar{r}_0/ds$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ vectorii triedrului S—F. Proprietăţile fiind date de cond.: a) $\bar{\nu}\cdot\bar{a} = \text{const.}$; b) $\bar{\tau}\cdot\bar{a} = \text{const.}$; c) $\bar{\tau}\cdot\bar{a}' = 0$ (v. probl. 48, f), proprietatea enunţată e o consecinţă a relaţiei $\frac{d}{ds}(\bar{\tau}\cdot\bar{a}) = \bar{\nu}\cdot\bar{a}/\rho + \bar{\tau}\cdot\bar{a}'$. **196** Ecuaţia de mişcare a lui M: $m\bar{a} = R$; deci $\bar{a}$ e normală la S. Or, în cinematica punctului material, se demonstrează că acceleraţia e conţinută în planul

osculator (căci, fie $C: \bar{r} = \bar{r}(t)$, atunci $\bar{v} = \bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \lambda\bar{\tau}$, $\bar{a} = \bar{r}'' = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \alpha\bar{\nu} + \beta\bar{\tau}$); deci π_0 (în M la C) $\ni \bar{n}$ (în M la S). **197** Dacă S e raportată la un sistem geodezic de coordonate, atunci $\left|\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right| = 0$; deci E, F, G sînt soluţii ale sistemului $FE_u - 2EF_u + EE_v = 0$, $FG_v - 2GF_v + GG_v = 0$. Cînd $F = 0$, rezultă $E = E(u)$, $G = G(v)$ iar $K = 0$. Deci: *pentru ca S să fie izometrică cu un plan, e suficient ca pe S să existe o reţea ortogonală formată din linii geodezice.* **212** Raportăm pe S la liniile de torsiune ($F = 0$, $ED'' - GD = 0$); obţinem $1/\rho_n = H + (1/\tau_1 - 1/\tau_2)\sin\varphi\cos\varphi$, $1/\tau_g = \cos^2\varphi/\tau_1 + \sin^2\varphi/\tau_2$, unde $1/\tau_i$ ($i = 1, 2$) sînt torsiunile principale. **213** Luăm parametrizarea $S: x = \sin u\cos v$, $y = \sin u\sin v$, $z = 2\cos u$. a) Atunci $C: v = u$, iar $ds = \sqrt{1 + 4\sin^2 u}\,du$; deci $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = (\cos 2u\,\bar{i} + \sin 2u\,\bar{j} - \sin u\,\bar{k})/\sqrt{1 + 4\sin^2 u}$, $\bar{n} = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v/\sqrt{\Delta})_{v=u} = (\sin 2u\,\bar{i} + \sin^2 u\,\bar{j} + \cos u\,\bar{k})/\sqrt{1 + 3\sin^2 u}$. $\bar{g} = \bar{n} \times \bar{\tau} = [-2\sin u(1 + \sin^2 u)\bar{i} + \cos u(1 + 2\sin^2 u)\bar{j} + 2\sin^2 u\,\bar{k}]/\sqrt{(1 + 3\sin^2 u)(1 + 4\sin^2 u)}$. b) $1/\rho_n = 2(1 - 7\sin^2 u + 8\sin^4 u)/(1 + 4\sin^2 u)\sqrt{1 + 3\sin^2 u}$, $1/\rho_g = \cos u(2 + 11\sin^2 u)/(1 + 3\sin^2 u)(1 + 4\sin^2 u)^{3/2}$, $1/\tau_g = 2\sin u(7\sin^4 u - 4)/(1 + 3\sin^2 u)(1 + 4\sin^2 u)$. **214** Rezultă din (135''); pentru C_1: $v = \text{const.}$ obţinem $(1/\tau_g)_1 = (ED' - FD)/E\sqrt{\Delta}$, iar pentru C_2: $u = \text{const.}$ găsim $(1/\tau_g)_2 = (FD'' - GD')/G\sqrt{\Delta}$. **215** a) C e linie asimptotică dacă $\theta = \pi/2$; atunci $1/\tau = 1/T$ iar $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{-R_2/R_1}$. b) S fiind raportată la liniile de curbură iar $O = P$, se elimină $1/R_1$ şi $1/R_2$ din $H = (1/R_1 + 1/R_2)/2$, $1/\rho_n = \cos^2\varphi/R_1 + \sin^2\varphi/R_2$ (Euler) şi (135'''). **216** Conform (135'''), $\sum_{k=1}^{n}(1/\tau_g)_k = \frac{1}{2}(1/R_2 - 1/R_1)\sum_{k=1}^{n}\sin 2\left[\alpha + (k-1)\frac{\pi}{n}\right] = 0$; căci $\sum_{k=1}^{n}\sin[2(k-1)\pi/n] = \sum_{k=1}^{n}\cos[2(k-1)\pi/n] = 0$. *Obs.* a) Cu rezultatele de la probl. 212, se poate folosi metoda de la problema 180. b) Cînd $n = 2$, avem: *suma torsiunilor geodezice la două tangente perpendiculare e egală cu zero.* c) Problema poate fi formulată astfel: În P la S se consideră $m > 2$ tangente, unghiul a două tangente consecutive (oarecare) fiind egal cu $2\pi/m$; atunci media aritmetică a curburilor normale corespunzătoare e egală cu curbura medie a lui S (în P), iar suma torsiunilor geodezice corespunzătoare e egală cu zero. **217** Fie S raportată la liniile de curbură; atunci $1/R_1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'/R_2 = 0$ iar $\omega = \varphi - \varphi'$. Eliminăm pe $\operatorname{tg}\varphi'$ în $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$, ţinînd seama de formulele lui Euler şi Bonnet; rezultă $\operatorname{tg}\omega = \tau_g/\rho_n$.

BIBLIOGRAFIE

1. **ABRAMESCU, N.** *Lecțiuni de geometrie pură infinitezimală.* Cluj, 1930.
2. **AUBERT, P.** *et* **PAPELIER, G.** *Exercices de géométrie analytique*; t. 1—3. Paris, Librairie Vuibert, 1931—1933.
3. **BLASCHKE, W.** *Vorlesungen über Differential geometrie.* Berlin, Springer, 1921.
4. **BROCARD, H. — LEMOYNE, T.** *Courbes géométriques remarquables.* Paris, 1919.
5. **CARTAN, ELIE.** *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Paris, 1928.
6. **CONFORTO, FABIO.** *Le superficie razionali.* Zanichelli, Bologna, 1939.
7. **CREANGĂ, I.** *și alții. Curs de geometrie analitică.* București, Editura tehnică, 1951.
8. **CRUCEANU, V.** *Elemente de algebră liniară și geometrie.* București, Editura didactică și pedagogică, 1973.
9. **DARBOUX, G.** *Leçons sur la théorie générale des surfaces*; t. 1—2. Paris, Gauthier-Villars, 1914—1915.
10. **DOBRESCU, A.** *Geometrie diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1963.
11. **EISENHART, L. P.** *An introduction to differential geometry.* Princeton Univ. Press, 1947.
12. **FAVARD, T.** *Cours de géométrie différentielle locale.* Paris, Gauthier Villars, 1957.
13. **FINIKOV, S. P.** *Curs de geometrie diferențială* (trad. din l. rusă). București, Editura tehnică, 1954.
14. **GAZETA MATEMATICĂ,** *seria A.* București (diverse numere).
15. **GHEORGHIEV, G., RADU, M.** *și* **PAPUC, D.** *Geometrie analitică și diferențială*; vol. 1—2. București, Editura didactică și pedagogică, 1968—1969.
16. **GHEORGHIU, GH. TH.** *Geometrie diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
17. **GHEORGHIU, O. EM.** *și* **CRSTICI, B. D.** *Geometrie analitică și diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
18. **GÜNTHER, N. N. — CUZMIN, R. O.** *Culegere de probleme de matematici superioare*; vol. 1—2 (trad. din lb. rusă). București, Editura tehnică, 1950.
19. **IOANOVICIU, A., MIHĂILEANU, N.** *și alții. Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1970.
20. **IONESCU BUJOR, C.** *și* **SACTER, O.** *Exerciții și probleme de geometrie analitică și diferențială*; vol. 1—2. București, Editura didactică și pedagogică, 1963.
21. **LALESCU, TRAIAN.** *Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal.* București, 1927.
22. **LEXICONUL TEHNIC ROMÂN**; vol. 1—19. București, Editura tehnică, 1957—1968.
23. **LELONG—FERRAND, J.** *Géométrie différentielle (tenseur-formes différentielles).* Paris, Ed. Masson et Cie, 1963.
24. **LORIA, GINO.** *Curves piane speciali algebriche e transcendenti.* Milano, 1930.
25. **MIHĂILEANU, N.** *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
26. **MIHĂILEANU, N.** *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială — Complemente.* București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
27. **MIHĂILEANU, N.** *Geometrie diferențială neeuclidiană.* București, Editura Academiei Republicii Populare Române, 1964.
28. **NICOLESCU, M.** *și alții. Analiză matematică*; vol. 1 (ediția a patra) — 2 (ediția a doua). București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
29. **POGORELOV, A. B.** *Lekții po differențialnoi geometrii.* Harkov, 1955.
30. **POSTELNICU, T.** *și alții. Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială* (ediția a doua completată). București, Editura tehnică, 1970.
31. **RAȘEVSKII, P. K.** *Kurs differențialnoi geometrii.* Moskva, 1956.
32. **ROGAI, E.** *Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale.* București, Editura tehnică, 1965.
33. **SALMON, G.** *Treatise on the higher plane curves.* Dublin, 1852.

34. **STEPANOV, V. V.** *Curs de ecuații diferențiale* (trad. din lb. rusă). București, Editura tehnică, 1955.
35. **STOKA, M.** *și* **VRĂNCEANU, G. G.** *Probleme de geometrie diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1963.
36. **TEIXEIRA GOMES, F.** *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches.* Coimbra, 1905.
37. **TELEMAN, C.** *Geometrie diferențială locală și globală.* București, Editura tehnică, 1974.
38. **TEODORESCU, ION D.** *Geometrie analitică și elemente de algebră liniară* (ediția a doua). București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
39. **TEODORESCU, ION D.** *Geometrie analitică și elemente de algebră liniară — Culegere de probleme* (ediția a doua). București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
40. **TEODORESCU, ION D.** *Geometrie superioară.* București, Editura didactică și pedagogică, 1970.
41. **TEODORESCU, ION D.** *Analiză, teoria funcțiilor și ecuații diferențiale — Ecuații diferențiale.* Centrul de multiplicare al Universității București, 1974.
42. **TEODORESCU, N.** *Metode vectoriale în fizica matematică*; vol. 1—2. București, Editura tehnică, 1954.
43. **ȚIȚEICA, G.** *Géométrie différentielle projective des réseaux.* București, 1924.
44. **VEBLEN, O.** *și* **WHITEHEAD, J. H. C.** *The fondations of Differential geometry.* Cambridge Press, 1938.
45. **VRĂNCEANU, G.** *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială.* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
46. **VRĂNCEANU, G.** *Lecții de geometrie diferențială*; vol. 1—2. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
47. **WIELEITNER, H.** *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höltherer Ordnung.* Leipzig, 1905.

TABLA DE MATERIE

CAPITOLUL I. CURBE PLANE

1 *Reprezentări analitice ale unei curbe plane* 3
2 *Tangenta şi normala la o curbă* 44
3 *Comportarea curbei în vecinătatea unui punct ordinar* 64
4 *Comportarea curbei în vecinătatea unui punct singular* 74
5 *Asimptotele unei curbe plane* 122
6 *Lungimea unui arc de curbă* 174
7 *Contactul a două curbe plane* 181
8 *Curbura unei curbe plane* 189
9 *Ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane* 209
10 *Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane* 215
11 *Evoluta şi evolventa unei curbe plane* 238
12 *Probleme diverse* 253

CAPITOLUL II. CURBE STRÎMBE

1 *Reprezentări analitice ale unei curbe în spaţiu* 263
2 *Tangenta* 278
3 *Lungimea unui arc de curbă* 286
4 *Planul osculator* 291
5 *Planul normal la o curbă strîmbă* 298
6 *Curbura unei curbe strîmbe* 304
7 *Torsiunea unei curbe strîmbe* 305
8 *Formulele lui Serret—Frenet* 309
9 *Contactul a două curbe* 324
10 *Cerc şi sferă osculatoare la o curbă strîmbă* 329
11 *Înfăşurătoarea unei familii de curbe strîmbe* 336
12 *Probleme diverse* 342

CAPITOLUL III. SUPRAFEŢE

1 *Reprezentări analitice ale unei suprafeţe* 348
2 *Plan tangent şi normală* 365
3 *Înfăşurătoarea unei familii de suprafeţe* 384
4 *Prima formă fundamentală a unei suprafeţe* 394
5 *Proprietăţi intrinsece ale unei suprafeţe* 396
6 *A doua formă fundamentală a unei suprafeţe* 403
7 *Linii asimptotice pe o suprafaţă* 404
8 *Curbura unei curbe situate pe o suprafaţă* 407
9 *Curbura unei suprafeţe* 409
10 *Linii de curbură pe o suprafaţă* 421
11 *Forma suprafeţei în vecinătatea unui punct ordinar* 430
12 *Alte proprietăţi intrinsece ale unei suprafeţe* 434
13 *Metoda triedrului mobil* 459
14 *Probleme diverse* 363

ANEXA. *Răspunsuri şi indicaţii* 468

BIBLIOGRAFIE 485

TABLA DE MATERII 487

Plan editură 5387. Coli de tipar 30,50. Tiraj 6380 ex. legate 1/1. Bun de tipar 17.12.75. Apărut 1975.

c. 2339 I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23 — 25
București